

Trattato di Elettricità e di Magnetismo II

J. Clerck Maxwell

professore di fisica sperimentale all'università di Cambridge

Tradotto dalla seconda edizione inglese da G. Séligmann-lui studente anziano dell'École Polytechnique, Ingegnere telegrafico con note e chiarimenti di MM. Cornu, dell'istituto Potier e Sarrau, professore all'École Polytechnique

Gauthier Villars - 1887

MAGNETISMO

1 Teoria elementare del magnetismo

371. Certi corpi, come, per esempio, il ferro sono detti magneti, la stessa terra, e i pezzi di acciaio che sono stati sottoposti a certe procedure, presso le quali si constatano le proprietà seguenti.

Se in un punto qualunque vicino alla superficie della terra, escluso il polo magnetico, si sospende un magnete in modo che possa ruotare liberamente attorno a un asse verticale, tende in genere a disporsi in un certo azimut, e, se se ne allontana, oscilla attorno a questa posizione. Un corpo non magnetizzato non manifesta una simile tendenza, ma si mantiene in equilibrio in tutti gli azimut.

372. Si constata che la forza che agisce sui corpi tende a portare una certa linea del corpo, che si chiama asse del magnete, parallela a una certa linea che è detta la direzione della forza magnetica.

Supponiamo che la calamita sia sospesa in modo da poter ruotare liberamente in tutti i versi attorno a un punto fisso: per eliminare l'influenza del suo peso, possiamo supporre che questo punto sia il suo centro di gravità. Lasciamo raggiungere alla calamita la sua posizione di equilibrio, segniamo due dei suoi punti, e annotiamo le loro posizioni nello spazio; poniamo poi la calamita in un'altra posizione di equilibrio, e annotiamo la posizione che occupano nello spazio i due punti precedenti.

Poiché nelle due posizioni l'asse del magnete coincide con la direzione della forza magnetica, bisogna trovare la linea del magnete che occupa nello spazio la stessa posizione, prima e dopo il movimento. Si sa, dalla teoria del moto dei solidi invariabili, che esiste sempre una tale linea, e che un moto equivalente al movimento reali si potrebbe ottenere con una semplice rotazione attorno a tale linea.

Per trovare questa linea, congiungiamo la prima e la seconda posizione di ognuno dei punti segnati, e tracciamo il piano perpendicolare a queste linee nel loro punto medio. L'intersezione di questi piani è la linea cercata, che indica la direzione dell'asse del magnete e la direzione della forza magnetica nello spazio.

Il metodo illustrato non è conveniente nella determinazione pratica di queste direzioni: torneremo su questo aspetto trattando le misure magnetiche.

Si trova che la direzione della forza magnetica è diversa nei diversi punti della superficie della terra. Se si segna la fine dell'asse del magnete che ruota dal lato del nord, si constata che tra la direzione dell'asse e quella del meridiano, vi è, in generale, uno scarto notevole, e che, prendendo la cosa grossolanamente, la fine segnata dell'asse si dirige verso il basso nell'emisfero nord, e verso l'alto nell'emisfero sud.

L'azimut della direzione della forza magnetica, contato a partire da nord verso ovest, è ciò che si chiama la variazione o la declinazione magnetica. L'angolo compreso tra la direzione della forza magnetica e il piano orizzontale è detto l'inclinazione magnetica. Questi due angoli determinano la direzione della forza magnetica e, quando l'intensità magnetica è nota, la forza magnetica è completamente determinata. La misura dei valori di questi tre elementi nei diversi punti della terra, la discussione del modo in cui essi variano secondo il luogo e il momento dell'osservazione, e lo studio delle cause della forza magnetica e delle sue variazioni costituiscono la scienza del Magnetismo terrestre.

373. Supponiamo ora che si siano determinati gli assi di numerosi magneti, e che si sia segnato su ciascuno di essi la fine che si gira verso nord. Se si sospende liberamente uno di questi

magneti, e se se ne avvicina un'altra, si constata che le due estremità indicate si respingono, che un'estremità segnata e una non segnata si attraggono, che due estremità non segnate si respingono.

Se i magneti sono a forma di lunghe barre o di fili, magnetizzati longitudinalmente in modo uniforme (si veda poi, § 384), si constata che la più grande forza si fa sentire quando si avvicina l'una e l'altra delle estremità dei magneti, e si può rendere conto del fenomeno supponendo che le estremità simili si respingono, che quelle diverse si attraggono e che le parti mediane dei magneti non esercitano un'azione osservabile tra di loro.

Le parti finali di un magnete lungo e sono dette comunemente i suoi poli. Nel caso di un magnete infinitamente sottile, uniformemente calamitato in tutta la sua lunghezza, le estremità agiscono come due centri di forza, e il resto del magnete non sembra esercitare alcuna azione magnetica. In nessun magnete esistente, la magnetizzazione è esattamente uniforme, di modo che non si possono prendere per poli dei punti isolati. Coulomb¹ è riuscito tuttavia, impiegando magneti lunghi e sottili magnetizzate con cura, a stabilire la legge della forza che agisce tra due poli magnetici.

La repulsione che si esercita tra due poli magnetici è diretta lungo la retta congiungente, e ha per valore numerico il prodotto delle forze dei poli diviso per il quadrato della loro distanza.

374. È chiaro che questa legge suppone la forza di ogni polo misurata un funzione di una certa unità, la cui grandezza si può dedurre dai termini stessi della legge.

Il polo preso per unità si dirige verso nord ed è tale che, posto all'unità di distanza da un altro polo, lo respinge con l'unità di forza, essendo questa definita come al § 6. Si conta negativamente un polo che si dirige verso sud.

Se m_1 e m_2 sono le forze di due poli, l la distanza che li separa, e f la forza repulsiva, essendo espresse tutte queste grandezze numericamente, si ha

$$f = \frac{m_1 m_2}{l^2}$$

Ma se $[m]$, $[L]$ e $[F]$ sono le unità del polo magnetico, della lunghezza e della forza

$$f [F] = \frac{m_1 m_2}{l^2} \left[\frac{M}{L} \right]^2$$

da cui segue che

$$[m^2] = [L^2 F] = \left[L^2 \frac{ML}{T^2} \right]$$

o

$$[m] = 2 \left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$$

Le dimensioni dell'unità del polo sono quindi: $\frac{3}{2}$ per la lunghezza, -1 per il tempo, $\frac{1}{2}$ per la massa. Queste dimensioni sono le stesse di quelle dell'unità elettrostatica di elettricità, che è definita esattamente alla stessa maniera ai § 41,42.

375. Si può considerare che l'esattezza di questa legge è stata stabilita dalle esperienze di Coulomb con la bilancia di torsione, e che è stata confermata dalle misure di Gauss, di Weber e di tutti gli studiosi degli osservatori magnetici, che fanno ogni giorni misure di quantità magnetiche e che otterrebbero risultato non legati tra loro, se avessero ammesso una legge errata della forza magnetica. Essa presenta un'altra conferma del suo accordo con le leggi dei fenomeni elettromagnetici.

¹Le esperienze fatte sul magnetismo mediante la bilancia a torsione sono contenute nelle *Memoires de l'Académie de Paris*, 1780-9, e nel *Traité de Physique di Biot*, t. III.

376. La grandezza che abbiamo chiamato finora la forza di un polo può essere detta una *quantità di magnetismo*, purché non si attribuisca al magnetismo altre proprietà oltre quelle osservate per i poli dei magneti.

Poiché la legge della forza agente tra due quantità date di Magnetismo si esprime esattamente con la stessa forma matematica della legge della forza agente tra quantità di elettricità di valore numerico uguale, gli sviluppi matematici deve essere in larga parte simile a quelli che si riferiscono all'elettricità. Ma vi sono altre proprietà delle calamite che si deve richiamare e che possono gettare qualche luce sulle proprietà elettriche dei corpi.

Relazione tra i poli di un magnete

377. La quantità di magnetismo che risiede in un polo di un magnete è sempre uguale e contraria alla quantità che risiede nell'altro polo, o, più generalmente:

In un magnete, la quantità totale di magnetismo, contata algebricamente, è nulla.

Di conseguenza, in un campo di forza che è uniforme e parallelo per tutto lo spazio occupato da una calamita, la forza che agisce sull'estremità segnata è esattamente uguale, contro e parallela a quella che agisce sull'estremità non segnata, di modo che la risultante delle forze è una coppia tendente a riportare l'asse del magnete in una direzione determinata, ma non a fornire al magnete un moto d'insieme in una direzione qualunque.

Ciò si può facilmente dimostrare mettendo un magnete in un piccolo recipiente che si fa galleggiare sull'acqua. Il recipiente ruota in una direzione, in modo da riportare il magnete il più vicino possibile alla direzione della forza magnetica terrestre, ma non vi è moto d'insieme del recipiente in alcuna direzione; non è quindi possibile che la forza diretta verso il nord sia maggiore di quella diretta verso il sud o viceversa. Ciò risulta ancora dal fatto che la magnetizzazione non cambia il peso di un pezzo di acciaio, bensì la posizione apparente del suo centro di gravità che, alle nostre latitudini, sposta verso il nord, lungo l'asse. Il centro d'inerzia, come si determina dai fenomeni di rotazione, non è cambiato.

378. Se si esamina il centro di un magnete lungo e sottile, si trova che non possiede proprietà magnetiche; ma, se lo si rompe in questo punto, si trova che ogni pezzo ha un polo magnetico nel punto di rottura e che questo nuovo polo è esattamente uguale e contrario all'altro polo situato sullo stesso pezzo. È quindi impossibile, sia per magnetizzazione, sia rompendo dei magneti, sia con qualsiasi altro mezzo, procurarsi un magnete i cui poli siano disuguali.

Se si rompe un magnete lungo e sottile in un gran numero di pezzi, si ottiene una serie di piccoli magneti ognuno dei quali ha poli circa della stessa forza di quelle del magnete iniziale. Questa moltiplicazione dei poli non è necessariamente una generazione di energia, poiché dobbiamo ricordare che dopo aver rotto la calamita dobbiamo spendere lavoro per separare le parti, in ragione della loro attrazione reciproca.

379. Mettiamo ora tutti i pezzi del magnete l'uno alla fine dell'altro, come prima: in ogni punto della giunzione, due poli esattamente uguali e di specie contraria si troveranno a contatto, di modo che la loro azione combinata su un altro polo sarà nulla. Il magnete così ricostruito ha quindi le stesse proprietà di quello precedente, cioè, due poli, uno a ogni estremità, uguali e contrari tra loro, e una parte compresa tra questi poli non presentano azione magnetica.

Poiché sappiamo, in questo caso, che il grande magnete è formato da piccoli magneti corti e che i fenomeni sono gli stessi di un magnete non spezzato, possiamo considerare il magnete, anche prima della sua rottura, come formato da piccole particelle aventi ciascuna due poli uguali e contrari. Se supponiamo che tutti gli elementi sono formati da simili particelle, è chiaro che, poiché la quantità totale di magnetismo di ogni particella è nulla, la quantità sarà pure nulla nell'intero magnete; in altre parole, i suoi poli saranno uguali e di tipo opposto.

Teoria della materia magnetica

380. Poiché la legge delle azioni magnetiche è di forma identica alla legge delle azioni elettriche, le stesse ragioni che si possono far valere per attribuire i fenomeni elettrici all'azione di uno o due fluidi possono pure essere impiegati per stabilire l'esistenza di una o due specie di materia magnetica, fluido o altro. Infatti, una teoria che supponga una materia magnetica, impiegata in senso puramente matematico, non può mancare di spiegare i fenomeni, purché si possa introdurre senza restrizioni nuove leggi per tener conto dei fatti osservati.

Una di queste nuove leggi deve essere che il fluido magnetico non può passare da una molecola o da un elemento di un magnete ad un altro; ma che le operazioni della magnetizzazione consistano nel separare, in una certa misura, i fluidi contenuti in ogni molecola, in modo che uno dei fluidi sia più concentrato a una delle estremità, e l'altro fluido più concentrato all'altra estremità della molecola. Questa è la teoria di Poisson.

In questa teoria, una molecola di un corpo in grado di magnetizzarsi è analoga a un piccolo conduttore isolato senza carica, che, nella teoria dei due fluidi, contiene quantità infinitamente grandi, ma esattamente uguali, di due elettricità. Quando una forza elettromotrice agisce sul conduttore, separa le due elettricità e le rende osservabili alle due estremità opposte del conduttore. Ancora, in questa teoria, la forza magnetizzante separa le due specie di magnetismo che erano inizialmente in uno stato di neutralizzazione, e le rende osservabili alle estremità opposte della molecola magnetizzata.

In certe sostanze, come il ferro dolce e le altre sostanze magnetiche alle quali non si può comunicare una magnetizzazione permanente, questo stato magnetico scompare, come l'elettrizzazione del conduttore, non appena la forza induttrice è tolta. In altre sostanze, come l'acciaio temperato, lo stato magnetico è difficile da produrre e, una volta stabilito, persiste anche dopo la scomparsa della causa induttrice.

Ciò si esprime dicendo che, in quest'ultimo caso, vi è una forza coercitiva che tende a impedire ogni cambiamento di magnetizzazione, e che deve essere vinta prima che si possa aumentare o diminuire la potenza di un magnete. Ciò corrisponderebbe, nel caso di un corpo elettrizzato, a una specie di resistenza differente da quella che si osserva nei metalli, equivalente a un isolamento completo per le forze elettromotrici inferiori a un certo valore.

Questa teoria del magnetismo, come la corrispondente teoria dell'elettricità, è evidentemente troppo ampia per i fatti e deve essere ristretta con condizioni artificiali. Infatti, non solo essa non dà ragione del perché due corpi non possono differire per il solo fatto che si avrebbe più dell'uno e dell'altro fluido che l'altro, ma anche non permette di dire quali sarebbero le proprietà di un corpo avente un eccesso di uno dei fluidi magnetici. È vero che si dà una ragione per mostrare che un simile corpo non può esistere; ma questa ragione è introdotta solo in seguito, per spiegare questo fatto particolare, e non deriva spontaneamente dallo sviluppo della teoria.

381. Dobbiamo quindi cercare un modo di esprimere che non dice molto e che lascia spazio all'introduzione di nuove idee, con lo svilupparsi dello studio dei fatti. Credo che è quanto otterremo cominciando col dire che le molecole di un magnete sono polarizzate.

Significato della parola polarizzazione

Se una molecola di un corpo possiede proprietà relative a una retta o a una direzione di questo corpo, e se, quando il corpo conservando le sue proprietà è ribaltato in modo da invertire tale direzione, anche le proprietà della molecola sono invertite rispetto ai corpi circostanti, si dice che la molecola è polarizzata e che le sue proprietà costituiscono una specie particolare di polarizzazione.

Così, si può dire che la rotazione di un corpo attorno a un asse costituisce una specie di polarizzazione; poiché, se si inverte l'asse da capo a capo mentre la rotazione continua, il corpo ruota in senso inverso rispetto allo spazio.

Si può dire che una molecola conduttrice attraversata da una corrente elettrica è polarizzata; poiché, se la si inverte e la corrente continua a circolare nello stesso verso rispetto a questa molecola, la direzione di questa corrente nello spazio è invertita.

Brevemente, se una grandezza matematica o fisica è un vettore, così come definito al § 11, si può dire che il corpo o la molecola alla quale appartiene questa grandezza direzionale o vettoriale è polarizzata², poiché ha proprietà opposte nelle due direzioni opposte o poli della grandezza direzionale.

Così, i poli della Terra hanno un rapporto con la sua rotazione e hanno ricevuto, di conseguenza, nomi diversi.

Significato del termine polarizzazione magnetica

382. Quando diciamo che le molecole di un magnete sono in uno stato di polarizzazione magnetica, intendiamo che ognuna delle più piccole parti nelle quali il magnete può essere suddiviso possiede certe proprietà relative a un asse definito nella molecola, che si chiama asse di magnetizzazione, e che le proprietà relative a una delle estremità di tale asse sono opposte a quelle dell'altra estremità.

Le proprietà che attribuiamo alla molecola sono della stessa natura di quelle che osserviamo nell'intero magnete; e quando attribuiamo queste proprietà alla molecola, non facciamo che affermare ciò che possiamo dimostrare rompendo un magnete in piccoli pezzi, poiché si constata che ognuno di essi è un magnete.

Proprietà di una molecola magnetizzata

383. Supponiamo che l'elemento $dx dy dz$ sia una molecola di un magnete, e che le sue proprietà magnetiche siano quelle di un magnete avente un polo positivo di forza m e una lunghezza ds . Se P è un punto qualunque dello spazio, a una distanza r dal polo positivo e a una distanza r' dal polo negativo, il potenziale magnetico nel punto P sarà $\frac{m}{r}$ dovuto al polo positivo, e $-\frac{m}{r'}$ dovuto al polo negativo, o

$$V = \frac{m}{rr'} (r' - r) \quad (1.0.1)$$

se la distanza dei poli ds è molto piccola, si può porre

$$r' - r = ds \cos \epsilon \quad (1.0.2)$$

dove ϵ è l'angolo compreso tra il vettore tracciato dal magnete nel punto P e l'asse del magnete; da cui

$$V = \frac{m ds}{r^2} \cos \epsilon \quad (1.0.3)$$

²Il termine polarizzazione è stato impiegato con un significato diverso in Ottica, dove si dice che un raggio è polarizzato quando possiede proprietà relative alle sue parti, le quali sono identiche sui lati opposti del raggio. Questo tipo di polarizzazione si riferisce a un tipo di quantità direzionali, che si potrebbero chiamare grandezze dipolari in opposizione al primo tipo che si può chiamare unipolare.

Quando una grandezza dipolare è invertita, essa rimane la stessa di prima. Le tensioni e le pressioni dei solidi, le estensioni, le compressioni, le deformazioni e la maggior parte delle proprietà ottiche, dielettriche e magnetiche dei corpi cristallizzati sono grandezze dipolari.

La proprietà che il magnetismo sviluppa nei corpi trasparenti di far ruotare il piano di polarizzazione della luce incidente, è, come il magnetismo stesso, una proprietà unipolare. La proprietà rotatoria citata al § 303 è pure unipolare.

Momento magnetico

384. Si chiama *momento magnetico* di una barra magnetizzata uniformemente e longitudinalmente il prodotto della sua lunghezza per la forza del suo polo positivo.

Intensità di magnetizzazione

L'intensità di magnetizzazione di una molecola è il rapporto tra il suo momento magnetico e il suo volume. La indicheremo con I .

La magnetizzazione in un punto di un magnete può essere definita dalla sua intensità e direzione. La sua direzione può essere definita dai suoi coseni λ, μ, ν degli angoli che forma con gli assi.

Componenti della magnetizzazione

La magnetizzazione in un punto di un magnete, essendo un vettore o una quantità direzionale, può essere espressa in funzione delle sue tre componenti riferite agli assi di coordinate. Chiamiamo A, B, C queste componenti

$$A = I\lambda \quad B = I\mu \quad C = I\nu \quad (1.0.4)$$

e il valore numerico di I è dato dall'equazione

$$I^2 = A^2 + B^2 + C^2 \quad (1.0.5)$$

385. Se la parte del magnete che consideriamo è l'elemento differenziale di volume $dx dy dz$, e se I indica l'intensità di magnetizzazione di questo elemento, $I dx dy dz$ è il suo momento magnetico; sostituendo questo valore a $m ds$ nella (1-3), e ricordando che

$$r \cos \epsilon = \lambda (\xi - x) + \mu (\eta - y) + \nu (\zeta - z) \quad (1.0.6)$$

dove ξ, η, ζ sono le coordinate della estremità del vettore r , tracciato dal punto (x, y, z) , troviamo per il potenziale nel punto (ξ, η, ζ) , dovuto all'elemento magnetico posto in (x, y, z)

$$[A (\xi - x) + B (\eta - y) + C (\zeta - z)] \frac{1}{r^3} dx dy dz \quad (1.0.7)$$

Per ottenere il potenziale in un punto (ξ, η, ζ) , dovuto a un magnete di dimensioni finite, bisogna trovare l'integrale di questa quantità per tutti gli elementi di volume compresi nello spazio occupata dal magnete, cioè

$$V = \iiint [A (\xi - x) + B (\eta - y) + C (\zeta - z)] \frac{1}{r^3} dx dy dz \quad (1.0.8)$$

e integrando per parti, si ha

$$V = \iint A \frac{1}{r} dy dz + \iint B \frac{1}{r} dz dx + \iint C \frac{1}{r} dx dy + \\ - \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right) dx dy dz$$

dove la doppia integrazione dei primi termini si applica alla superficie e la tripla integrazione del quarto termine al volume occupato dal magnete.

Se λ, μ, ν indicano i coseni direttori della normale a un elemento di superficie dS tracciata verso l'esterno, si può scrivere, come al § 21, la somma dei primi tre termini nella forma

$$\iint (lA + mB + nC) \frac{1}{r} dS$$

dove l'integrazione deve essere estesa a tutta la superficie del magnete.

Se ora introduciamo due nuovi simboli, σ e ρ , definiti dalle equazioni

$$\begin{aligned}\sigma &= lA + mB + nC \\ \rho &= -\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right)\end{aligned}$$

l'espressione del potenziale si può scrivere

$$V = \iint \frac{\sigma}{r} dS + \iiint \frac{\rho}{r} dx dy dz$$

386. Questa espressione è identica a quella del potenziale elettrico dovuto a un corpo avente una elettrizzazione di densità superficiale σ e una carica distribuita in tutta la sua massa, la cui densità di volume è ρ . Pertanto, se ammettiamo che σ e ρ siano la densità superficiale e la densità di volume nella distribuzione della materia immaginaria che abbiamo chiamato materia magnetica, il potenziale dovuto a questa distribuzione immaginaria è identico a quello prodotto dalla magnetizzazione reale degli elementi del magnete.

La densità superficiale σ è la componente dell'intensità di magnetizzazione I lungo la normale tracciata dalla superficie verso l'esterno, e la densità di volume ρ è la convergenza (si veda § 25) dell'intensità di magnetizzazione in un punto qualunque del magnete.

Questo modo di rappresentare l'azione di un magnete come dovuta a una distribuzione di materia magnetica è molto comodo; ma ci dobbiamo ricordare che è solo un mezzo artificioso per raffigurare l'azione di un sistema di molecole polarizzate.

Azione di una molecola magnetica su un'altra

387. Se, come nel Capitolo delle armoniche sferiche, poniamo

$$\frac{d}{dh} = l \frac{d}{dx} + m \frac{d}{dy} + n \frac{d}{dz} \quad (1.0.9)$$

essendo l, m, n i coseni direttori dell'asse h , il potenziale dovuto a una molecola posta nell'origine, avente il suo asse parallelo a h_1 e con momento magnetico m_1 sarà

$$V_1 = -\frac{d}{dh_1} \frac{m_1}{r} = \frac{m_1}{r^2} \lambda_1 \quad (1.0.10)$$

dove λ_1 è il coseno dell'angolo tra h_1 e r .

Se una seconda molecole di momento m_2 , avente il suo asse parallelo a h_2 è posta all'estremità del raggio vettore r , l'energia potenziale dovuta all'azione di un magnete sull'altro è

$$W = m_2 \frac{dV_1}{dh_2} = -m_1 m_2 \frac{d^2}{dh_1 dh_2} \left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.0.11)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{r^3} (\mu_{12} - 3\lambda_1 \lambda_2) \quad (1.0.12)$$

dove μ_{12} è il coseno dell'angolo degli assi, e $\lambda_1 \lambda_2$ sono i coseni degli angoli degli assi con r .

Determiniamo ora il momento della coppia dovuto al primo magnete, che tende a far ruotare il secondo attorno al suo centro.

Supponiamo che il secondo magnete ruoti di un angolo $d\phi$ in un piano perpendicolare a un terzo asse h_3 : il lavoro compiuto contro le forze magnetiche sarà $\frac{dW}{d\phi} d\phi$ e il momento delle forze agenti sul magnete in questo piano sarà

$$-\frac{dW}{d\phi} = -\frac{m_1 m_2}{r^3} \left(\frac{d\mu_{12}}{d\phi} - 3\lambda_1 \frac{d\lambda_2}{d\phi}\right) \quad (1.0.13)$$

Pertanto il momento che agisce effettivamente sul secondo magnete può essere considerato come la risultante delle due coppie: il primo agisce in un piano parallelo agli assi dei due magneti e tende ad *aumentare* l'angolo di questi assi con una forza il cui momento è

$$\frac{m_1 m_2}{r^3} \sin(h_1 h_2) \quad (1.0.14)$$

mentre il secondo agisce in un piano passante per r e per l'asse del secondo magnete, e tende a *diminuire* l'angolo tra queste direzioni con una forza

$$\frac{3m_1 m_2}{r^3} \cos(r h_1) \sin(r h_2) \quad (1.0.15)$$

dove $(r h_1)$, $(r h_2)$, $(h_1 h_2)$ indicano gli angoli tra le rette r, h_1, h_2 .

Per determinare la forza agente sul secondo magnete in una direzione parallela alla retta h_3 , dobbiamo calcolare

$$-\frac{dW}{dh_3} = +m_1 m_2 \frac{d^3}{dh_1 dh_2 dh_3} \left(\frac{1}{r} \right) = -m_1 m_2 \frac{3Y_3}{r^4} \quad (1.0.16)$$

dal § 128c.

$$= \frac{3m_1 m_2}{r^4} (\lambda_1 \mu_{23} + \lambda_2 \mu_{31} + \lambda_3 \mu_{12} - 5\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \quad (1.0.17)$$

dal § 133,

$$= 3\lambda_3 \frac{m_1 m_2}{r^4} (\mu_{12} - 5\lambda_1 \lambda_2) + 3\mu_{13} \frac{m_1 m_2}{r^4} \lambda_2 + 3\mu_{23} \frac{m_1 m_2}{r^4} \lambda_1 \quad (1.0.18)$$

Se supponiamo che forza effettiva sia la risultante di tre forze R, H_1, H_2 dirette lungo r, h_1, h_2 , la forza diretta lungo h_3 è

$$\lambda_3 R + \mu_{13} H_1 + \mu_{23} H_2 \quad (1.0.19)$$

Poiché la direzione di h_3 è arbitraria, dobbiamo avere

$$R = \frac{3m_1 m_2}{r^4} (\mu_{12} - 5\lambda_1 \lambda_2) \quad H_1 = \frac{3m_1 m_2}{r^4} \lambda_2 \quad H_2 = \frac{3m_1 m_2}{r^4} \lambda_1 \quad (1.0.20)$$

La forza R è repulsiva e tende ad aumentare r ; H_1 e H_2 agiscono sul secondo magnete nella direzione degli assi del primo e del secondo magnete rispettivamente.

Questa analisi delle forze che agiscono tra due piccoli magneti è stata data per mezzo dell'*Analyse des Quaternions*, dal professor Tait, nel *Quarterly Math. Journal* del gennaio 1860. (Si veda pure la sua Opera su *Les Quaternions*, § 414).

Posizioni particolari

388. 1° Se λ_1 e λ_2 sono entrambi uguali a 1, cioè se i magneti sono in linea retta e nella stessa direzione, $\mu_{12} = 1$, e la forza che agisce tra i magneti è repulsiva,

$$R + H_1 + H_2 = -\frac{6m_1 m_2}{r^4} \quad (1.0.21)$$

Il segno $-$ indica che la forza è attrattiva.

2° Se λ_1 e λ_2 sono nulli e $\mu_{12} = 1$, gli assi dei magneti sono paralleli tra loro e perpendicolari a r , e la forza è repulsiva

$$\frac{3m_1 m_2}{r^4} \quad (1.0.22)$$

In nessuno di questi casi vi è una coppia.

3° Se $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, allora

$$\mu_{12} = 0 \quad (1.0.23)$$

la forza che agirà sul secondo magnete sarà $\frac{3m_1m_2}{r^4}$ nella direzione del suo asse, e la coppia sarà $\frac{2m_1m_2}{r^3}$ tendente a riportarlo parallelo al primo magnete. Ciò equivale a una forza unica $\frac{3m_1m_2}{r^4}$ agente parallelamente alla direzione dell'asse del secondo magnete e intersecante r in un punto posto a due terzi della sua lunghezza, a partire da m_2 .

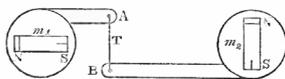


Fig. 1.

Così in fig. 1 si fanno galleggiare sull'acqua due magneti; m_2 è nella direzione dell'asse m_1 , ma ha il suo asse perpendicolare a quello di m_1 . Se due punti A e B , invariabilmente legati rispettivamente a m_1 e m_2 , sono collegati per mezzo di un filo T , il sistema sarà in equilibrio purché T tagli la linea m_1m_2 in un punto posto a un terzo della distanza m_1m_2 .

4° Se si lascia il secondo magnete ruotare liberamente attorno al suo centro, fino a raggiungere una posizione di equilibrio stabile, W sarà un minimo rispetto a h_2 , e, di conseguenza, la componente lungo la direzione di h_1 della forza dovuta a m_2 sarà massima. Pertanto, se vogliamo produrre in un punto dato e in una direzione data la più grande forza magnetica possibile, per mezzo di magneti, date le posizioni dei loro centri, per determinare le posizioni che conviene dare agli assi di questi magneti per produrre l'effetto voluto, basta porre uno dei magneti nel punto dato (fig. 2), il suo asse nella direzione data e osservare la posizione di equilibrio stabile che assume l'asse del secondo magnete quando il suo centro è posto in ognuno degli altri punti dati. Si deve allora porre gli assi dei magneti nelle direzioni indicate dall'asse del secondo magnete.

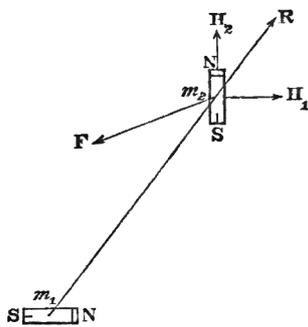


Fig. 2.

È chiaro che, se il magnetismo terrestre si fa sentire, bisogna tenerne conto quando si esegue questa esperienza.

Supponiamo il secondo magnete diretto lungo la sua posizione di equilibrio stabile: poiché la coppia che agisce su di esso è nulla, l'asse del secondo magnete deve essere nello stesso piano del primo; da cui

$$(h_1h_2) = (h_1r) + (rh_2) \quad (1.0.24)$$

ed essendo la coppia

$$\frac{m_1m_2}{r^3} [\sin(h_1h_2) - 3 \cos(h_1r) \sin(rh_2)] \quad (1.0.25)$$

troviamo quando è zero

$$\tan(h_1r) = 2 \tan(rh_2) \quad (1.0.26)$$

o

$$\tan H_1m_2R = 2 \tan Rm_2H_2 \quad (1.0.27)$$

Quando il secondo magnete ha raggiunto questa posizione, il valore di W diviene

$$m_2 \frac{dV}{dh_2}$$

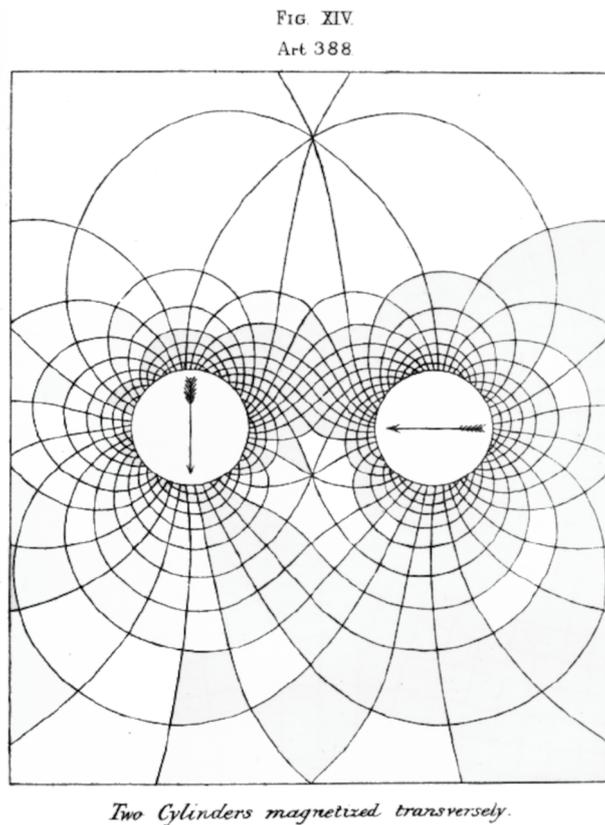
dove h_2 è la direzione della linea di forza dovuta a m_1 nel punto m_2 ; da cui

$$W = -m_2 \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2} \quad (1.0.28)$$

Pertanto, il secondo magnete tenderà a muoversi verso i punti dove la forza risultante è la maggiore.

La forza che agisce sul secondo magnete si può scomporre in una forza R , sempre attrattiva e diretta verso il primo magnete, e una forza H parallela all'asse del primo magnete

$$R = -3 \frac{m_1 m_2}{r^4} \frac{4\lambda_1^2 + 1}{\sqrt{3\lambda_1^2 + 1}} \quad H_1 = 3 \frac{m_1 m_2}{r^4} \frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2 + 1}} \quad (1.0.29)$$



Si è rappresentato sulla Tavola 14, le linee di forza e le superfici equipotenziali in uno spazio a due dimensioni. Si suppone che i magneti che le producono sono lunghe barre cilindriche, le cui sezioni sono raffigurate dagli spazi circolari bianchi e che sono magnetizzate trasversalmente nella direzione delle frecce.

Se si ricorda che vi è una tensione lungo le linee di forza, è facile vedere che ogni magnete tende a ruotare nel verso orario.

Quello di destra tenderà ad assumere un movimento d'insieme verso l'alto, quello di sinistra un movimento verso il basso della pagina.

Energia potenziale di un magnete posto in un campo magnetico

389. Sia V il potenziale magnetico dovuto a un sistema qualunque di magneti agenti sul magnete considerato. Chiameremo V il potenziale della forza magnetica esterna.

Se un piccolo magnete di forza m , di lunghezza ds , è posto in modo che il suo polo positivo sia in un punto in cui il potenziale è V , e il suo polo negativo in un punto dove il potenziale è V' , l'energia potenziale di questo magnete è $m(V - V')$ o, se ds è misurato dal polo negativo al polo positivo,

$$m \frac{dV}{ds}$$

Siano I l'intensità di magnetizzazione, λ, μ, ν i suoi coseni direttori, si può scrivere

$$mds = I dx dy dz$$

e

$$\frac{dV}{ds} = \lambda \frac{dV}{dx} + \mu \frac{dV}{dy} + \nu \frac{dV}{dz} \quad (1.0.30)$$

e, infine, se A, B, C sono le componenti della magnetizzazione

$$A = \lambda I \quad B = \mu I \quad C = \nu I$$

di modo che la (1-30) dell'energia potenziale dell'elemento di magnetizzazione diviene

$$\left(A \frac{dV}{dx} + B \frac{dV}{dy} + C \frac{dV}{dz} \right) dx dy dz \quad (1.0.31)$$

Per ottenere l'energia potenziale di un magnete di grandezza finita, dobbiamo integrare questa espressione per tutti gli elementi del magnete. Otteniamo così

$$W = \iiint \left(A \frac{dV}{dx} + B \frac{dV}{dy} + C \frac{dV}{dz} \right) dx dy dz \quad (1.0.32)$$

come valore dell'energia potenziale del magnete rispetto al campo magnetico nel quale è posto.

L'energia potenziale è qui espressa in funzione delle componenti dell'intensità di magnetizzazione e di quelle della forza magnetica dovuta a cause esterne.

Integrando per parti, la si può esprimere in funzione della distribuzione della materia magnetica e del potenziale magnetico

$$W = \iint (Al + Bm + Cn) V dS - \iiint V \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz} \right) dx dy dz \quad (1.0.33)$$

dove l, m, n sono i coseni direttori della normale all'elemento della superficie dS . Se, in questa equazione, si sostituiscono le espressioni della densità superficiale e della densità di volume della materia magnetica data al § 386, l'espressione diviene

$$W = \iint V \sigma dS + \iiint V \rho dx dy dz \quad (1.0.34)$$

Si può allora scrivere la (1-32) nella forma

$$W = - \iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz \quad (1.0.35)$$

dove α, β, γ sono le componenti della forza magnetica esterna.

Momento magnetico e asse di un magnete

390. Se, in tutto lo spazio occupata dal magnete, le componenti della forza magnetica esterna sono uniformi in direzione e modulo, le componenti α, β, γ saranno costanti; e, se poniamo

$$\begin{cases} \iiint A dx dy dz = lK \\ \iiint B dx dy dz = mK \\ \iiint C dx dy dz = nK \end{cases} \quad (1.0.36)$$

essendo l'integrazione estesa a tutta la massa del magnete, il valore di W si potrà scrivere

$$E = -K (l\alpha + m\beta + n\gamma) \quad (1.0.37)$$

In questa espressione l, m, n sono i coseni direttori dell'asse del magnete, K il suo momento magnetico. Se ϵ è l'angolo tra l'asse del magnete e la direzione della forza magnetica \mathbf{H} , il valore di W si può scrivere

$$W = -K\mathfrak{H} \cos \epsilon \quad (1.0.38)$$

Se il magnete è sospeso in modo da poter ruotare liberamente attorno ad un asse verticale, come nel caso di un ago di una bussola comune, sia ϕ l'azimut dell'asse del magnete, e sia θ la sua inclinazione sul piano orizzontale; siano δ l'azimut e ζ l'inclinazione della forza magnetica terrestre,

$$\alpha = \mathfrak{H} \cos \zeta \cos \delta \quad \beta = \mathfrak{H} \cos \zeta \sin \delta \quad \gamma = \mathfrak{H} \sin \zeta \quad (1.0.39)$$

$$l = \cos \theta \cos \phi \quad m = \cos \theta \sin \phi \quad n = \sin \theta \quad (1.0.40)$$

pertanto

$$W = -K\mathfrak{H} [\cos \zeta \cos \theta \cos (\phi - \delta) + \sin \zeta \sin \theta] \quad (1.0.41)$$

Il momento della forza che tende ad aumentare ϕ facendo ruotare il magnete attorno all'asse verticale è

$$-\frac{dW}{d\phi} = -K\mathfrak{H} \cos \zeta \cos \theta \sin (\phi - \delta)$$

Sviluppo del potenziale di un magnete in armoniche solide

391. Sia V il potenziale dovuto all'unità di polo posta nel punto (ξ, η, ζ) . Il valore di V in un punto (x, y, z) sarà

$$V = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.0.42)$$

Questa espressione può essere sviluppata in funzione di armoniche sferiche aventi il loro centro nell'origine. Si ha allora

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots \quad (1.0.43)$$

dove

$$V_0 = \frac{1}{r} \quad (1.0.44)$$

essendo r la distanza di (ξ, η, ζ) dall'origine

$$V_1 = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r^3} \quad (1.0.45)$$

$$V_2 = \frac{3(\xi x + \eta y + \zeta z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{2r^5} \quad (1.0.46)$$

ecc.

Per determinare il valore dell'energia potenziale quando il magnete è posto in un campo di forze espresso da questo potenziale, dobbiamo integrare l'espressione di W nella (1-32) rispetto a x, y, z considerando ξ, η, ζ e r come costanti.

Se consideriamo solo i termini introdotti da V_0, V_1, V_2 il risultato dipenderà dai seguenti integrali di volume

$$lK = \iiint A dx dy dz \quad mK = \iiint B dx dy dz \quad nK = \iiint C dx dy dz \quad (1.0.47)$$

$$L = \iiint A x dx dy dz \quad M = \iiint B y dx dy dz \quad nK = \iiint C z dx dy dz \quad (1.0.48)$$

$$P = \iiint (Bz + Cy) dx dy dz \quad Q = \iiint (Cx + Az) dx dy dz \quad R = \iiint (Ay + Bx) dx dy dz \quad (1.0.49)$$

Troveremo così per il valore dell'energia potenziale di un magnete in presenza di una unità di polo posta nel punto (ξ, η, ζ)

$$W = K \frac{l\xi + m\eta + n\zeta}{r^3} + \frac{\xi^2(2L - M - N) + \eta^2(2N - L - M) + 3(P\eta\zeta + Q\xi\zeta + R\xi\eta)}{r^5} + \dots \quad (1.0.50)$$

Questa espressione può essere considerata come l'energia potenziale dell'unità di polo in presenza del magnete o, più semplicemente, come il potenziale del punto (ξ, η, ζ) dovuto al magnete.

Centro di un magnete e suoi assi primari e secondari

392. Si può semplificare questa espressione cambiando il verso delle coordinate e la posizione dell'origine. In primo luogo, prendiamo la direzione dell'asse delle x parallelo all'asse del magnete, ciò che equivale a porre

$$l = 1 \quad m = 0 \quad n = 0 \quad (1.0.51)$$

Se portiamo l'origine delle coordinate nel punto (x', y', z') , rimanendo la direzione degli assi invariata, gli integrali di volume lK, mK, nK non cambiano, ma gli altri sono modificati nel modo seguente

$$L' = L - lKx' \quad M' = M - mKy' \quad N' = N - nkz' \quad (1.0.52)$$

$$P' = P - K(mz' + ny') \quad Q' = Q - K(nx' + lz') \quad R' = R - K(ly' + mx') \quad (1.0.53)$$

Se ora rendiamo l'asse delle x parallelo all'asse del magnete, e se poniamo

$$x' = \frac{2L - M - N}{2K} \quad y' = \frac{R}{K} \quad z' = \frac{Q}{K}$$

i valori di M e di N relativi ai nuovi assi rimangono gli stessi; il valore di L' diviene $\frac{1}{2}(M + N)$; P non cambia, e Q e R si annullano. Dobbiamo quindi scrivere il potenziale nella forma

$$K \frac{\xi}{r^3} + \frac{\frac{3}{2}(\eta^2 - \zeta^2)(M - N) + 3P\eta\zeta}{r^5} \quad (1.0.54)$$

Abbiamo quindi trovato un punto, fisso rispetto al magnete, e tale che il secondo termine del potenziale assume il suo valore più semplice quando questo punto è preso come origine delle coordinate. Chiameremo quindi questo punto il centro del magnete, e l'asse tracciato da questo punto nella direzione definita in precedenza come fosse l'asse magnetica sarà detto asse principale del magnete.

Si può ancora semplificare questo risultato facendo ruotare gli assi y e z attorno all'asse x della metà dell'angolo la cui tangente è $\frac{P}{M - N}$; P diviene nullo, e il potenziale prende infine la forma seguente:

$$K \frac{\xi}{r^3} + \frac{3(\eta^2 - \zeta^2)(M - N)}{2r^5} + \dots \quad (1.0.55)$$

Questa è la forma più semplice dei primi due termini del potenziale di un magnete. Possiamo pure determinare il centro di un magnete trovando la posizione dell'origine delle coordinate, che rende minimo l'integrale del quadrato del secondo termine del potenziale, esteso a tutta la superficie di una sfera di raggio unitario.

La quantità che si deve minimizzare è, dal § 141,

$$4(L^2 + M^2 + N^2 - MN - NL - LM) + 3(P^2 + Q^2 + R^2) \quad (1.0.56)$$

I cambiamenti che provano i valori di questa quantità per un cambiamento di posizione dell'origine si possono dedurre dalle (1-51,52). Pertanto, le condizioni di minimo sono

$$\begin{cases} 2l(2L - M - N) + 3nQ + 3mR = 0 \\ 2m(2M - N - L) + 3lR + 3nP = 0 \\ 2n(2N - L - M) + 3mP + 3lQ = 0 \end{cases} \quad (1.0.57)$$

Se supponiamo $l = 1, m = 0, n = 0$, queste condizioni divengono

$$2L - M - N = 0 \quad Q = 0 \quad R = 0 \quad (1.0.58)$$

che sono le condizioni di cui siamo serviti nello studio precedente.

Questo studio si può confrontare con quello con cui si sviluppa il potenziale di un sistema materiale sottoposto alla gravità. In quest'ultimo caso, il punto che è preferibile prendere per origine è il centro di gravità, e gli assi più comodi sono gli assi principali di inerzia.

Nel caso di un magnete, il punto che corrisponde al centro di gravità è a una distanza infinita nella direzione dell'asse; il punto che chiamiamo centro del magnete ha proprietà differenti da quelle del centro di gravità. Le grandezze L, M, N corrispondono ai momenti di inerzia, e, P, Q, R ai prodotti dell'inerzia di un corpo materiale, tranne che L, M, N non sono necessariamente quantità positive. Quando il centro del magnete è preso come origine, l'armonica sferica del secondo ordine è della forma settoriale e il suo asse coincide con quello del magnete, cosa che non avviene in alcun altro punto.

Quando un magnete è simmetrico tutto attorno al suo asse, come nel caso di una figura di rivoluzione, il termine contenente l'armonica del secondo ordine scompare interamente.

393. In tutti i punti della superficie della terra, tranne in qualche luogo delle regioni polari, una delle estremità del magnete si dirige verso il nord, o almeno, in una direzione vicina al nord, e l'altra in una direzione vicina al sud. Quando parleremo dei capi di un magnete, impiegheremo l'espressione popolare che indica con il nome di estremità nord del magnete il capo che si dirige verso il nord. Quando vorremo parlare il linguaggio della teoria dei fluidi magnetici, impiegheremo i termini boreale e australe. Il magnetismo boreale è una specie di materia fittizia che si ammette essere più abbondante nelle regioni boreali della terra, e il magnetismo australe è la materia magnetica fittizia che è la più distribuita nelle regioni australi della terra. Il magnetismo al polo nord di un magnete è australe, e a quello sud è boreale. Così, quando parliamo di polo nord e di polo sud di un magnete, non paragoniamo il magnete alla terra, considerata come un grande magnete, ma esprimiamo soltanto la posizione che il magnete tende ad assumere quando può muoversi liberamente. Quando, al contrario, vorremo confrontare la distribuzione del fluidi magnetico fittizio del magnete con quello del fluido terrestre, impiegheremo i termini più elevati di magnetismo boreale e australe.

394. Parlando di un campo di forza magnetico, impiegheremo l'espressione di nord magnetico per designare la direzione segnata come estremità nord di un ago di bussola posta nel campo di forza.

Quando parleremo di una linea di forza magnetica, la supporremo sempre tracciata dal sud magnetico al nord magnetico, e chiameremo questa direzione, *direzione positiva*. Analogamente,

il verso della magnetizzazione di un magnete è caratterizzato da una retta che va dall'estremità sud alla nord del magnete, e si considera come estremità positiva quella che è ruotata verso nord.

Considereremo come positivo il magnetismo australe, cioè il magnetismo di quella parte del magnete che è ruotata verso il nord. Se indichiamo con m il suo valore, il potenziale magnetico è

$$V = \sum \left(\frac{m}{r} \right)$$

e la direzione positiva lungo una linea di forza è quella nella quale V diminuisce.

2 Forza e Induzione Magnetica

395. Abbiamo già determinato (§ 385) il potenziale magnetico dovuto, in un punto dato, a un magnete la cui magnetizzazione in ogni punto è nota, e abbiamo mostrato che il risultato matematico si può esprimere sia in funzione della magnetizzazione effettiva del magnete, sia in funzione di una distribuzione immaginaria di materia magnetica, in parte condensata alla superficie del magnete e in parte distribuita nell'intera massa.

Si trova il potenziale così definito con le stesse operazioni matematiche sia che il punto assegnato sia interno o esterno al magnete. La forza che agisce sull'unità di polo magnetico posta in un punto esterno al magnete si deduce dal potenziale con la stessa operazione di differenziazione del problema corrispondente di elettricità. Se le componenti di questa forza sono α, β, γ , si ha

$$\alpha = -\frac{dV}{dx} \quad \beta = -\frac{dV}{dy} \quad \gamma = -\frac{dV}{dz} \quad (2.0.1)$$

Per determinare sperimentalmente la forza magnetica in un punto interno di un magnete, dobbiamo iniziare col togliere una parte della materia magnetica, in modo da formare una cavità nella quale si porrà il polo magnetico. La forza agente sul polo dipenderà generalmente dalla forma della cavità e dall'inclinazione delle sue pareti rispetto alla direzione di magnetizzazione. Pertanto, per evitare ogni ambiguità quando si parla della forza magnetica all'interno di un magnete, è necessario specificare bene la forma e la posizione della cavità nella quale si misura la forza. È chiaro che se si indica la forma e la posizione della cavità, non si deve più considerare il punto dove è posto il polo magnetico come interno alla sostanza del magnete, e di conseguenza i metodi ordinari di misura della forza divengono immediatamente applicabili.

396. Consideriamo ora una parte di un magnete dove la direzione e l'intensità di magnetizzazione siano uniformi. In questa parte supponiamo scavata una cavità di forma cilindrica avente il suo asse parallelo alla direzione di magnetizzazione, e poniamo nel mezzo dell'asse del cilindro un polo magnetico di forza unitaria.

Poiché le generatrici del cilindro sono parallele alla direzione di magnetizzazione, non vi sarà sulla superficie curva di distribuzione superficiale di magnetismo; e siccome le due estremità circolari del cilindro sono perpendicolari alla direzione di magnetizzazione, vi sarà su di esse una distribuzione superficiale uniforme la cui densità superficiale è I sul polo negativo e $-I$ su quello positivo.

Siano $2b$ la lunghezza del cilindro e a il suo raggio. Per un polo magnetico posto a metà dell'asse, la forza dovuta a questa distribuzione superficiale si compone dell'attrazione del disco posto dal lato positivo e della repulsione del disco posto dalla parte negativa. Queste due forze sono uguali, dirette nello stesso verso, e la loro somma è

$$R = 4\pi I \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad (2.0.2)$$

Da questa espressione risulta che la forza non dipende dalle dimensioni assolute della cavità, ma dal rapporto tra la lunghezza e il diametro del cilindro. Pertanto, per quanto piccola si faccia la cavità, la forza dovuta alla distribuzione superficiale sulle sue basi rimarrà generalmente finita.

397. Fin qui abbiamo supposto che la magnetizzazione è uniforme e con la stessa direzione in tutta la parte del magnete dove è stata ricavata la cavità cilindrica. Se si introducono queste

restrizioni sulla natura della magnetizzazione, vi è, in generale, una distribuzione di materia magnetica fittizia nella massa del magnete. Togliendo il cilindro, si toglie una parte della materia così distribuita; ma, siccome nei solidi simili le forze nei punti corrispondenti sono proporzionali alle dimensioni lineari della figura, la forza che agisce sul polo magnetico per il fatto della materia magnetica distribuita nel volume del cilindro subirà una variazione indefinitamente decrescente col diminuire delle dimensioni della cavità, mentre l'effetto dovuto alla densità superficiale sulle pareti della cavità resta, in genere, finito.

Se quindi supponiamo le dimensioni del cilindro molto piccole affinché in tutta la parte tolta si possa considerare la magnetizzazione come parallela all'asse del cilindro e di grandezza costante I , la forza agente su un polo magnetico posto nel mezzo di questo cilindro cavo sarà composta da due parti. La prima è dovuta alla materia magnetica distribuita sulla superficie esterna del magnete e in tutta la sua massa, tranne la parte tolta: le componenti di questa forza sono α, β, γ e si deducono dal potenziale tramite le (2-1). La seconda è la forza R che agisce lungo l'asse del cilindro, nel verso della magnetizzazione: la grandezza di questa forza dipende dal rapporto tra lunghezza e il diametro del cilindro cavo.

398. Primo caso. - Supponiamo questo rapporto molto grande, cioè il diametro del cilindro piccolo rispetto alla sua lunghezza. Sviluppiamo l'espressione di R in funzione di $\frac{a}{b}$, troviamo

$$R = 4\pi I \left(\frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} - \frac{3}{8} \frac{a^4}{b^4} + \dots \right) \quad (2.0.3)$$

quantità che si annulla quando si rende infinito il rapporto tra b e a . Pertanto, se la cavità è un cilindro molto stretto, avente il suo asse parallelo alla direzione della magnetizzazione, la forza magnetica all'interno della cavità non è influenzata dalla distribuzione superficiale esistente alle due estremità del cilindro, e le componenti di questa forza sono soltanto α, β, γ , dove

$$\alpha = -\frac{dV}{dx} \quad \beta = -\frac{dV}{dy} \quad \gamma = -\frac{dV}{dz}$$

Per definizione, chiameremo *forza magnetica all'interno del magnete* la forza all'interno di una cavità di questa forma. Questa è la definizione che Sir William Thomson ha chiamato *definizione polare della forza magnetica*. Quando avremo occasione di considerare questa forza come vettore, la indicheremo con \mathbf{H} .

399. Secondo caso. - Supponiamo la lunghezza del cilindro piccola rispetto al suo diametro, di modo che il cilindro si riduca a un disco sottile. Sviluppiamo R in funzione di $\frac{b}{a}$, si ha

$$R = 4\pi I \left(1 - \frac{1}{2} \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \frac{b^3}{a^3} - \dots \right) \quad (2.0.4)$$

il cui valore limite è $4\pi I$, quando il rapporto tra a e b diviene infinito.

Così, quando la cavità ha la forma di un disco sottile, il cui piano è normale alla direzione di magnetizzazione, un polo magnetico unitario posto nel mezzo dell'asse è soggetto a una forza $4\pi I$ nel verso della magnetizzazione dovuta al magnetismo distribuito sulle superfici circolari del disco¹.

¹Forza in cavità di altra forma.

1° In una stretta fenditura. La forza dovuta al magnetismo superficiale è $4\pi I \cos \epsilon$ diretta lungo la normale al piano della scanalatura, essendo ϵ l'angolo compreso tra la normale a questo piano e la direzione della magnetizzazione. Se la scanalatura è parallela alla direzione della magnetizzazione, la forza è la forza magnetica \mathbf{H} ; se invece è perpendicolare alla direzione della magnetizzazione, la forza è l'induzione magnetica \mathbf{B} .

2° Cilindro allungato, il cui asse forma un angolo ϵ con la direzione della magnetizzazione. La forza dovuta al magnetismo superficiale è $2\pi I \sin \epsilon$; essa è perpendicolare all'asse e nel piano che contiene l'asse e la direzione di magnetizzazione.

3° In una sfera la forza dovuta alla magnetizzazione superficiale è $\frac{3}{4}\pi I$; essa è diretta nella direzione della magnetizzazione.

Poiché A, B, C sono le componenti di I , le componenti di questa forza sono $4\pi A, 4\pi B, 4\pi C$. Questa forza deve essere composta con quelle le cui componenti sono α, β, γ .

400. Indichiamo la forza effettiva che agisce sull'unità del polo con il vettore \mathbf{B} e le sue componenti con a, b, c ; si ha

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A \\ b = \beta + 4\pi B \\ c = \gamma + 4\pi C \end{cases} \quad (2.0.5)$$

Per definizione, chiameremo *induzione magnetica all'interno del magnete*, la forza che agisce all'interno di una cavità a forma di disco, le cui facce piane sono normali alla direzione di magnetizzazione. Questa definizione è ciò che Sir William Thomson chiama la *definizione elettromagnetica della forza magnetica*.

I tre vettori, magnetizzazione \mathbf{I} , forza magnetica \mathbf{H} e induzione magnetica \mathbf{B} sono legati dall'equazione vettoriale

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I} \quad (2.0.6)$$

Integrale della forza magnetica lungo una linea

401. Poiché la forza magnetica, definita come al § 398, è quella che è dovuta alla distribuzione del magnetismo libero sulla superficie e nella massa del magnete, e quella non è modificata dal magnetismo superficiale della cavità, la si può dedurre direttamente dall'espressione generale del potenziale del magnete: l'integrale di linea della forza magnetica lungo una curva qualunque che va dal punto A al punto B è quindi

$$\int_A^B \left(\alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds} \right) ds = V_B - V_A \quad (2.0.7)$$

dove V_A e V_B indicano i rispettivi potenziali di A e B .

Integrale dell'induzione magnetica su una superficie

402. L'induzione magnetica attraverso la superficie S è definita come il valore dell'integrale

$$Q = \iint \mathfrak{B} \cos \epsilon dS \quad (2.0.8)$$

dove \mathbf{B} indica il modulo dell'induzione magnetica sull'elemento di superficie dS e ϵ l'angolo tra la direzione dell'induzione e la normale all'elemento di superficie, e dove l'integrazione deve essere estesa a tutta la superficie che può essere chiusa o limitata da una curva chiusa.

Se a, b, c indicano le componenti dell'induzione magnetica, l, m, n i coseni direttori della normale, l'integrale si può scrivere

$$Q = \iint (la + mb + nc) dS \quad (2.0.9)$$

Se alle componenti dell'induzione magnetica sostituiamo i loro valori in funzione della forza magnetica e della magnetizzazione data al § 400, si trova

$$Q = \iint (l\alpha + m\beta + n\gamma) dS + 4\pi \iint (lA + mB + nC) dS \quad (2.0.10)$$

Supponiamo ora che la superficie sulla quale si estende l'integrazione sia chiusa, ed esaminiamo il valore dei due termini del secondo membro.

Poiché la forza magnetica e il magnetismo libero sono legati dalla loro relazione della stessa forma matematica come la forza elettrica lo è con l'elettricità libera, possiamo applicare al primo termine di Q il risultato ottenuto al § 77, sostituendo le componenti α, β, γ della forza magnetica alle componenti X, Y, Z della forza elettrica, e la somma algebrica M di tutto il magnetismo libero contenuto all'interno della superficie alla somma algebrica e dell'elettricità libera.

Abbiamo così

$$\iint (l\alpha + m\beta + n\gamma) dS = 4\pi M \quad (2.0.11)$$

Poiché ogni molecola magnetica ha due poli che sono uguale in valore numerico, ma di segno contrario, la somma algebrica del magnetismo contenuto nella molecola è zero. Pertanto, le molecole che sono interamente all'interno della superficie non possono apportare nulla somma algebrica del magnetismo contenuto in S : il valore di M può quindi dipendere solo dalle particelle magnetiche intersecate dalla superficie S .

Consideriamo un piccolo elemento di magnete di lunghezza s , di sezione trasversale k^2 , magnetizzato nel verso della sua lunghezza, di modo che la forza dei suoi poli sia uguale a m . Il momento magnetico di questo piccolo magnete sarà ms ; la sua intensità di magnetizzazione, che è il rapporto tra il momento magnetico e il volume, sarà

$$I = \frac{m}{k^2} \quad (2.0.12)$$

Tagliamo questo piccolo magnete con la superficie S , in modo che la direzione di magnetizzazione formi un angolo ϵ' con la normale tracciata esternamente alla superficie; se dS indica l'area della sezione, si ha

$$k^2 = dS \cos \epsilon' \quad (2.0.13)$$

Il polo negativo $-m$ di questo magnete si trova all'interno della superficie.

Se quindi indichiamo con dM la parte del magnetismo libero interno a S che è fornito da questo piccolo magnete,

$$dM = -m = -Ik^2 = -I \cos \epsilon' dS \quad (2.0.14)$$

Per trovare la somma algebrica M di tutto il magnetismo libero compreso nella superficie chiusa S , dobbiamo integrare questa espressione sull'intera superficie chiusa, di modo che

$$M = - \iint l \cos \epsilon' dS$$

oppure, ponendo A, B, C come componenti della magnetizzazione, l, m, n come coseni direttori della normale esterna

$$M = - \iint (lA + mB + nC) dS \quad (2.0.15)$$

ritroviamo così il valore dell'integrale che forma il secondo termine della (2-10). Il valore di Q in questa equazione può quindi trovarsi in funzione delle (2-11) e (2-15)

$$Q = 4\pi M - 4\pi M = 0 \quad (2.0.16)$$

o, *l'integrale di superficie dell'induzione magnetica attraverso ogni superficie chiuse è zero.*

403. Se assumiamo come superficie chiusa quella dell'elemento differenziale di volume $dx dy dz$, otteniamo l'equazione

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \quad (2.0.17)$$

Questa è la condizione che è sempre soddisfatta dalle componenti dell'induzione magnetica.

Poiché la distribuzione dell'induzione magnetica è solenoidale, l'induzione attraverso una superficie qualunque limitata da una curva chiusa dipende solo dalla forma e dalla posizione di questa curva e non dalla forma della superficie.

404. Si chiamano *superfici di induzione nulla* quelle per ogni delle quali

$$la + mb + nc = 0 \quad (2.0.18)$$

L'intersezione di due simili superfici è detta *linea di induzione*. Le condizioni affinché una curva s sia una linea di induzione sono

$$\frac{1}{a} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{b} \frac{dy}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dz}{ds} \quad (2.0.19)$$

Se, per ognuno dei punti di una curva chiusa, si traccia una linea di induzione, si forma una superficie tubolare detta *tubo di induzione*.

L'induzione è la stessa attraverso tutte le sezioni di un simile tubo. Se questa induzione è uguale all'unità, il tubo è detto un *tubo di induzione unitario*. Tutto che dice Faraday² delle linee di forza e degli sfondiloidi magnetici è matematicamente vero, se si pensa a linee e tubi di induzione magnetica.

Al di fuori del magnete, la forza magnetica e l'induzione magnetica sono identici; ma, all'interno della massa, esse devono essere distinte accuratamente. In una barra rettilinea uniformemente magnetizzata, la forza magnetica dovuta al magnete stesso è diretta dall'estremità che si ruota verso nord e che chiamiamo polo positivo, all'estremità che si dirige verso sud e che chiamiamo polo negativo, e ciò all'interno del magnete così come nello spazio esterno.

Al contrario, l'induzione magnetica è diretta dal polo positivo al polo negativo all'esterno del magnete, dal polo negativo a quello positivo all'interno, di modo che le linee o tubi di induzione sono figure chiuse o cilindriche.

Si vedrà più chiaramente nello studio dei fenomeni elettromagnetici l'importanza dell'induzione magnetica come grandezza fisica. Quando si esplora il campo magnetico mediante un filo mobile, come al § 3076 delle *Exp. Res.* di Faraday, è l'induzione magnetica e non la forza magnetica, che è direttamente misurata.

Potenziale vettore dell'induzione magnetica

405. Abbiamo mostrato al § 403 che l'induzione magnetica attraverso una superficie limitata da una curva chiusa dipende solo da questa curva, e non dalla forma della superficie che la limita; si deve pertanto poter determinare l'induzione attraverso una curva chiusa con un procedimento dipendente solo dalla natura della curva, e non implicante la costruzione di una superficie passante per la curva.

Ciò si può fare, trovando un vettore \mathfrak{A} legato all'induzione magnetica \mathfrak{B} , in modo tale che l'integrale di \mathfrak{A} preso lungo la linea chiusa sia uguale all'integrale di \mathfrak{B} preso su ogni superficie limitata dalla curva chiusa.

Se, al § 24, indichiamo con F, G, H , le componenti di \mathbf{U} , e con a, b, c quelle di \mathfrak{B} , troviamo per la relazione tra queste componenti

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \quad b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \quad c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \quad (2.0.20)$$

Il vettore \mathbf{U} , le cui componenti sono F, G, H , è detto il vettore potenziale di induzione magnetica.

²*Exp. Res.*, serie XXVIII.

Se si pone nell'origine delle coordinate una molecola magnetica il cui momento è m e la cui direzione dell'asse di magnetizzazione è (λ, μ, ν) , il potenziale in un punto (x, y, z) posto a una distanza r dall'origine è, dal § 387,

$$-m \left(\lambda \frac{d}{dx} + \mu \frac{d}{dy} + \nu \frac{d}{dz} \right) \frac{1}{r}$$

e si ha

$$c = m \left(\lambda \frac{d^2}{dx dz} + \mu \frac{d^2}{dy dz} + \nu \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{1}{r}$$

che, dall'equazione di Laplace, si può mettere nella forma

$$m \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{d}{dz} - \nu \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{r} - m \frac{d}{dy} \left(\nu \frac{d}{dy} - \mu \frac{d}{dz} \right) \frac{1}{r}$$

Le quantità a, b possono essere trattate allo stesso modo; da cui

$$F = m \left(\nu \frac{d}{dy} - \mu \frac{d}{dz} \right) \frac{1}{r} = m \frac{\mu z - \nu y}{r^3}$$

Da questa espressione si ricavano per simmetria G e H . Vediamo così che il potenziale vettore in un punto dato, dovuto a una molecola magnetizzata posta nell'origine, è numericamente uguale al momento magnetico della molecola, diviso per il quadrato del raggio vettore e moltiplicato per il seno dell'angolo compreso tra l'asse di magnetizzazione e il raggio vettore; la direzione del potenziale vettore è perpendicolare al piano dell'asse di magnetizzazione e del raggio vettore, in un verso tale che, per un occhio che guarda nella direzione positiva dell'asse di magnetizzazione, il potenziale vettore sia tracciato nel verso del movimento delle lancette di un orologio.

Pertanto, essendo dato un magnete di forma qualunque, di cui A, B, C sono le componenti di magnetizzazione, posto nel punto (x, y, z) , le componenti del potenziale vettore in un punto (ξ, η, ζ) sono

$$\begin{cases} F &= \iiint \left(B \frac{dp}{dz} - C \frac{dp}{dy} \right) dx dy dz \\ G &= \iiint \left(C \frac{dp}{dx} - A \frac{dp}{dz} \right) dx dy dz \\ H &= \iiint \left(A \frac{dp}{dy} - B \frac{dp}{dx} \right) dx dy dz \end{cases} \quad (2.0.21)$$

dove, per semplificare, si indica con p l'inverso della distanza dei punti (x, y, z) e (ξ, η, ζ) e dove le integrazioni devono essere estese a tutto lo spazio occupato dal magnete.

406. Il potenziale scalare, o potenziale ordinario della forza magnetica (§ 385), diviene, quando si impiega la stessa notazione,

$$V = \iiint \left(A \frac{dp}{dx} + B \frac{dp}{dy} + C \frac{dp}{dz} \right) dx dy dz \quad (2.0.22)$$

Ricordando che $\frac{dp}{dx} = -\frac{dp}{d\xi}$ e che l'integrale

$$\iiint A \left(\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} \right) dx dy dz$$

assume il valore $-4\pi(A)$, quando il punto (ξ, η, ζ) è compreso nei limiti di integrazione, e il valore 0, quando questo punto non è compreso, essendo (A) il valore di A nel punto (ξ, η, ζ) , troviamo, per il valore della componente lungo le x dell'induzione magnetica,

$$\begin{aligned} a &= \frac{dH}{d\xi} - \frac{dG}{d\zeta} = \iiint \left[A \left(\frac{d^2 p}{dy d\eta} + \frac{d^2 p}{dz d\zeta} \right) - B \frac{d^2 p}{dx d\eta} - C \frac{d^2 p}{dx d\zeta} \right] dx dy dz = \\ &= -\frac{d}{d\xi} \iiint \left(A \frac{dp}{dx} + B \frac{dp}{dy} + C \frac{dp}{dz} \right) dx dy dz - \iiint A \left(\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (2.0.23)$$

Il primo termine di questa espressione è evidentemente $-\frac{dV}{d\xi}$, o a , la componente della forza magnetica.

La quantità sotto il segno \iiint nel secondo termine è nulla per tutti gli elementi di volume, tranne quello che contiene il punto (ξ, η, ζ) . Se il valore di A è (A) nel punto (ξ, η, ζ) , è facile dimostrare che il valore del secondo termine è $4\pi (A)$, dove (A) è evidentemente nullo per tutti i punti esterni al magnete.

Il valore della componente lungo le x dell'induzione magnetica si può quindi scrivere

$$a = \alpha + 4\pi (A) \quad (2.0.24)$$

equazione identica alla prima di quelle che sono date al § 400. Le equazioni che danno b e c sono pure in accordo con quelle del § 400.

Si è già visto che la forza magnetica \mathfrak{H} si deduce dal potenziale magnetico scalare V , applicando il simbolo di operazione ∇ di Hamilton, di modo che si può scrivere, come al § 17,

$$\mathfrak{H} = -\nabla V \quad (2.0.25)$$

equazione che è vera dall'interno verso l'esterno del magnete.

Si vede dallo studio attuale che l'induzione magnetica \mathbf{B} si deduce dal potenziale vettore \mathbf{A} applicando lo stesso operatore ∇ , e il risultato è vero all'interno così come all'esterno del magnete.

Quando si applica questo operatore a una funzione vettoriale, si ottiene in generale una parte scalare e un vettore. La parte scalare, che abbiamo chiamato la *convergenza della funzione vettoriale*, si annulla se la funzione vettoriale soddisfa la condizione solenoidale

$$\frac{dF}{d\xi} + \frac{dG}{d\eta} + \frac{dH}{d\zeta} = 0 \quad (2.0.26)$$

Differenziando le espressioni di F, G, H nella (2-21), si vede che questa condizione è soddisfatta per queste quantità.

Possiamo quindi scrivere la relazione tra l'induzione magnetica e il suo potenziale vettore

$$\mathfrak{B} = \nabla \mathfrak{A}$$

che si può esprimere dicendo che l'induzione magnetica è il gradiente del suo potenziale vettore.

3 Solenoidi e fogli magnetici¹

Forme particolari di magneti

407. Un filamento di materia magnetica, lungo e sottile come un filo, essendo magnetizzato longitudinalmente in tutti i suoi punti, si chiama *potenza del magnete*, in una sezione, il prodotto dell'area per l'intensità media di magnetizzazione in questa sezione. Se si tagliasse il filamento a questa sezione, senza cambiarne la magnetizzazione, si troverebbe, dopo aver separato le due superfici, che esse hanno quantità di magnetismo superficiale uguali e contrarie, e numericamente uguali per ognuna di esse alla potenza del magnete nella sezione.

Un filamento di materia magnetica, magnetizzato in modo che la potenza sia la stessa in tutte le sezioni, in qualunque punto della lunghezza siano prese, è detto *solenoidale magnetico*.

Se m è la potenza di un solenoide, ds un elemento della sua lunghezza, r la distanza di questo elemento da un punto dato, e ϵ l'angolo tra r e l'asse di magnetizzazione, il potenziale nel punto dato dovuto all'elemento è

$$\frac{m ds \cos \epsilon}{r^2} = \frac{m dr}{r^2 ds} ds$$

Integrando questa espressione rispetto a s , in modo da tener conto di tutti gli elementi del solenoide, il potenziale nel punto dato è

$$V = m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

essendo r_1 la distanza dell'estremità positiva e r_2 quella dell'estremità negativa del solenoide nel punto per il quale si è valutato V .

Pertanto il potenziale e, di conseguenza, tutti gli effetti magnetici dovuti a un solenoide dipendono solo dalla sua potenza e dalla posizione delle sue estremità, e non dalla forma, diritta o curva, che assume tra questi due punti.

Pertanto le estremità di un solenoide possono essere chiamate rigorosamente i suoi poli.

Se un solenoide ha la forma di una curva chiusa, il potenziale che gli è dovuto è nullo in tutti i punti, in modo che questo solenoide non può esercitare alcuna azione magnetica, e che la sua magnetizzazione stessa non può essere constatata se non rompendolo in un punto e allontanando le due estremità.

Se un magnete può essere diviso in solenoidi che gli uni hanno la forma di curve chiuse, gli altri hanno le loro estremità sulla superficie esterna del magnete, si dice che la magnetizzazione è solenoidale; e, poiché l'azione del magnete dipende solo da quella delle estremità del solenoide, la distribuzione della materia magnetica fittizia è interamente superficiale.

Pertanto la condizione affinché la magnetizzazione sia solenoidale è

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0$$

dove A, B, C sono le componenti della magnetizzazione in un punto qualunque del magnete.

408. Se, in un filamento magnetico magnetizzato longitudinalmente, la potenza varia nei diversi punti della lunghezza, si può immaginare questo solenoide come formato di un fascio di

¹Si veda la *Teoria matematica del magnetismo*, di Sir W. Thomson, *Phil. Trans.*, 1850. o *Reprint*.

solenoidi di differente lunghezza, di modo che la somma delle potenze dei solenoidi che passano in una sezione data sia uguale alla potenza del filamento in questa sezione. Pertanto un filamento qualunque magnetizzato longitudinalmente può essere chiamato un *solenoido complesso*.

Se m è la potenza di un solenoide complesso in una sezione qualunque, il potenziale dovuto all'azione di questo solenoide è

$$V = \int \frac{m}{r^2} ds$$

dove m è variabile,

$$V = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} - \int \frac{1}{r} \frac{dm}{ds} ds$$

In questo caso, si vede che, oltre all'azione delle estremità che possono essere di potenze diverse, vi è un'azione dovuta alla distribuzione di materia magnetica immaginaria, distribuita lungo il filamento con una densità lineare

$$\lambda = -\frac{dm}{ds}$$

Fogli magnetici

409. Se un foglio sottile di materia magnetica è, in tutti i punti, magnetizzato in una direzione normale alla sua superficie, si chiama *potenza magnetica del foglio* in una posizione data il prodotto dell'intensità di magnetizzazione per lo spessore dello strato in questa posizione.

Se lo strato ha la stessa potenza dappertutto, si chiama un *foglio magnetico semplice*; se la sua potenza varia da un punto a un altro, lo si può considerare come formato da un certo numero di fogli semplici sovrapposti e accavallati gli uni sugli altri. È ciò che si chiama un *foglio magnetico complesso*.

Siano dS un elemento del foglio nel punto Q , e Φ la potenza del foglio. Il potenziale in un punto P , dovuto all'elemento dello strato considerato è

$$dV = \Phi \frac{1}{r^2} dS \cos \epsilon$$

dove ϵ è l'angolo compreso tra il vettore QP o r , e la normale alla superficie tracciata dal lato positivo..

Ma, se $d\omega$ è l'angolo solido sotteso da dS al punto P

$$r^2 d\omega = dS \cos \epsilon$$

da cui

$$dV = \Phi d\omega$$

e, di conseguenza, nel caso di un foglio magnetico semplice,

$$V = \Phi \omega$$

cioè, *il potenziale in un punto qualunque dovuto a un foglio magnetico è uguale al prodotto della sua potenza per l'angolo solido sotteso nel punto P dal suo contorno².*

410. Si può ottenere lo stesso risultato in un altro modo, supponendo il foglio magnetico posto in un campo di forza magnetica qualunque, e determinando l'energia potenziale dovuta a questa posizione.

²Questo teorema è dovuto a Gauss, *Théorie générale du magnetisme terrestre*.

Se V è il potenziale sull'elemento dS , l'energia dovuta a questo elemento è

$$\Phi \left(l \frac{dV}{dx} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz} \right) dS$$

o, il prodotto della potenza dello strato per la parte dell'integrale di superficie di V relativa all'elemento dS del foglio.

Pertanto, integrando rispetto a tutti questi elementi, l'energia dovuta alla posizione del foglio nel campo è uguale al prodotto della sua potenza per l'integrale dell'induzione magnetica preso sull'intera superficie.

Poiché questo integrale è lo stesso per due superfici qualunque limitate dallo stesso contorno, e non comprendendo tra loro il centro di forza, l'azione del foglio magnetico dipende solo dal suo contorno.

Supponiamo che il campo di forza sia dovuto a un polo magnetico di forza m . Abbiamo visto (§ 76, Cor.) che l'integrale su una superficie limitata da un contorno dato è il prodotto della forza del polo per l'angolo sotteso in questo polo dal contorno. Pertanto, l'energia dovuta all'azione reciproca del polo e del foglio è

$$\Phi m \omega$$

ciò che (dal teorema di Green, § 100) è uguale al prodotto della forza del polo per il potenziale del foglio nel punto in cui è posto il polo stesso. Il potenziale dovuto al foglio è quindi

$$\Phi \omega$$

411. Se un polo magnetico m parte da un punto posto sulla faccia negativa di un foglio magnetico, e, seguendo nello spazio un cammino qualunque, ritorna ruotando attorno al contorno in un punto vicino al suo punto di partenza, ma posto sul lato positivo del foglio, l'angolo sotteso varia costantemente e cresce di 4π mentre si compie lo spostamento. Il lavoro effettuato dal polo è $4\pi\Phi m$, e il potenziale in un punto qualunque della faccia positiva del foglio eccede di $4\pi\Phi$ in ogni punto interno, essendo d'altra parte positivo se lo si prende dal lato positivo verso l'interno dello strato. Pertanto un simile foglio non esercita alcuna azione sul magnete.

412. Se si può dividere un magnete in un serie di fogli magnetici semplici, gli uni chiusi, gli altri aventi il loro contorno sulla superficie del magnete, si dice che la distribuzione del magnetismo è lamellare. Sia ϕ la somma delle forze di tutti gli strati che attraversano un punto per andare da un punto dato a un punto (x, y, z) con un cammino compreso all'interno del magnete; le condizioni affinché la magnetizzazione sia lamellare sono

$$A = \frac{d\phi}{dx} \quad B = \frac{d\phi}{dy} \quad C = \frac{d\phi}{dz}$$

La quantità ϕ che determina completamente la magnetizzazione in un punto qualunque può essere chiamata il *potenziale di magnetizzazione*. Bisogna fare attenzione a non confonderla con il potenziale magnetico.

413. Se un magnete si può scomporre in fogli magnetici complessi, si dice che ha una distribuzione magnetica lamellare complessa. La condizione per una simile distribuzione è che si possa tracciare un sistema di superfici che tagliano ortogonalmente le linee di magnetizzazione. Questa condizione si esprime con la ben nota equazione

$$A \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz} \right) + B \left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx} \right) + C \left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy} \right) = 0$$

Forma del potenziale dei magneti solenoidali e lamellari

414. L'espressione generale del potenziale scalare di un magnete è

$$V = \iiint \left(A \frac{dp}{dx} + B \frac{dp}{dy} + C \frac{dp}{dz} \right) dx dy dz$$

dove p indica il potenziale nel punto (x, y, z) dovuto all'unità del polo magnetico posto nel punto (ξ, η, ζ) , o, in altre parole, l'inverso della distanza tra il punto (ξ, η, ζ) , di cui si misura il potenziale, e il punto (x, y, z) , dove si trova l'elemento del magnete al quale il potenziale è dovuto.

Questa quantità si può integrare per parti, come ai § 96 e 386,

$$V = \iint p (Al + Bm + Cn) dS - \iiint p \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right) dx dy dz$$

dove l, m, n sono i coseni direttori della normale esterna all'elemento dS della superficie del magnete.

Se il magnete è solenoidale, l'espressione sotto il segno dell'integrale triplo è nulla per tutti i punti compresi all'interno del magnete; l'integrale triplo è quindi nullo, e il potenziale scalare è dato per un punto interno o per uno esterno al magnete, dall'integrale doppio del primo termine.

Il potenziale scalare di un magnete solenoidale è quindi completamente determinato quando si conosce per ogni punto della superficie la componente normale della magnetizzazione; non dipende dalla forma dei solenoidi all'interno del magnete.

415. Nel caso di un magnete lamellare, la magnetizzazione è determinata dal potenziale di magnetizzazione ϕ , e si ha

$$A = \frac{d\phi}{dx} \quad B = \frac{d\phi}{dy} \quad C = \frac{d\phi}{dz}$$

L'espressione di V si può quindi scrivere

$$V = \iiint \left(\frac{d\phi}{dx} \frac{dp}{dx} + \frac{d\phi}{dy} \frac{dp}{dy} + \frac{d\phi}{dz} \frac{dp}{dz} \right) dx dy dz$$

Integrando per parti questa espressione, si ha

$$V = \iint \phi \left(l \frac{dp}{dx} + m \frac{dp}{dy} + n \frac{dp}{dz} \right) dS - \iiint \phi \left(\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} \right) dx dy dz$$

Il secondo termine è nullo, a meno che il punto (ξ, η, ζ) non sia compreso all'interno del magnete, nel quale caso è uguale a $4\pi(\phi)$, essendo (ϕ) il valore di ϕ nel punto (ξ, η, ζ) . L'integrale di superficie si può esprimere in funzione della linea r che unisce i punti (x, y, z) e (ξ, η, ζ) , e dell'angolo θ che questa linea forma con la normale tracciata esternamente a dS , di modo che il potenziale si può scrivere

$$V = \iint \frac{1}{r^2} \cos \theta dS + 4\pi(\phi)$$

dove il secondo termine è nullo se il punto (ξ, η, ζ) non è compreso all'interno del magnete.

Il potenziale V rappresentato da questa espressione è continuo, anche sulla superficie del magnete dove ϕ diviene improvvisamente nullo; poiché, se di pone

$$\Omega = \iint \frac{1}{r^2} \cos \theta dS$$

e se Ω_1 è il valore di Ω per un punto vicino alla superficie all'interno del magnete, e Ω_2 quello per un punto vicino al primo, ma posto all'esterno della superficie

$$\Omega_2 = \Omega_1 + 4\pi(\phi)$$

o

$$V_2 = V_1$$

La quantità Ω non continua alla superficie.

Le componenti dell'induzione magnetica sono legate a Ω dalle relazioni

$$a = -\frac{d\Omega}{dx} \quad b = -\frac{d\Omega}{dy} \quad c = -\frac{d\Omega}{dz}$$

416. Nel caso di una distribuzione magnetica lamellare, possiamo così semplificare il potenziale vettore dell'induzione magnetica.

La sua componente lungo l'asse delle x si può scrivere

$$F = \iiint \left(\frac{d\phi}{dy} \frac{dp}{dz} + \frac{d\phi}{dz} \frac{dp}{dy} \right) dx dy dz$$

Integrando per parti, si può mettere questa espressione nella forma di un integrale di superficie

$$F = \iint \phi \left(m \frac{dp}{dz} - n \frac{dp}{dy} \right) dS$$

o

$$F = \iint p \left(m \frac{d\phi}{dz} - n \frac{d\phi}{dy} \right) dS$$

Le altre componenti del potenziale si possono dedurre da queste espressioni con opportune sostituzioni.

Angoli solidi

417. Abbiamo già dimostrato che in un punto P il potenziale, dovuto a uno strato magnetico, è uguale al prodotto dell'angolo solido sotteso dal contorno dello strato per la forza di tale strato. Come avemmo occasione di parlare di angoli solidi nella teoria delle correnti elettriche, spiegheremo ora come li si possa misurare.

Definizione. - L'angolo solido sotteso in un punto dato da una curva chiusa ha per misura l'area intercettata su una sfera di raggio unitario avente il suo centro nel punto dato per il raggio vettore proveniente da questo punto e descrivente la curva chiusa. Questa area deve essere contata positivamente o negativamente, secondo che dal punto dato la si veda a sinistra o a destra del cammino descritto dal raggio vettore.

Siano (ξ, η, ζ) il punto dato, (x, y, z) un punto preso sulla curva. Le coordinate x, y, z sono funzioni di s , la lunghezza dell'arco contata a partire da un certo punto. Queste sono funzioni periodiche di s che ripassano per lo stesso valore tutte le volte che s è aumentato di una intera lunghezza della curva chiusa.

Possiamo calcolare l'angolo solido ω direttamente partendo dalla definizione. Impiegando coordinate sferiche aventi il loro centro nel punto (ξ, η, ζ) e ponendo

$$x - \xi = r \sin \theta \cos \phi \quad y - \eta = r \sin \theta \sin \phi \quad z - \zeta = r \cos \theta$$

troviamo l'area di una curva qualunque integrando

$$\omega = \int (1 - \cos \theta) d\phi$$

o impiegando coordinate rettangolari

$$\omega = \int d\phi - \int_0^s \frac{z - \zeta}{r \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right]} \left[(x - \xi) \frac{dy}{ds} - (y - \eta) \frac{dx}{ds} \right] ds$$

essendo l'integrazione estesa lungo l'intera curva s . Se l'asse z passa una volta attraverso la curva chiusa, il primo termine è 2π . Se l'asse z non passa attraverso la curva, questo termine è nullo.

418. Questo metodo per il calcolo degli angoli solidi, presuppone una scelta di assi, cosa in certa misura arbitraria, ed essa non dipende solo dalla curva chiusa. Così il metodo seguente, che non richiede la costruzione di alcuna superficie, può essere dato in ragione della proprietà geometrica che utilizza.

Nello stesso tempo che il raggio vettore partendo dal punto dato descrive la curva chiusa, facciamo scorrere su questa curva un piano passante per il punto dato, di modo che sia tangente successivamente in tutti i punti della curva. Tracciamo dal punto dato e perpendicolarmente a questo piano una linea di lunghezza unitaria. Con lo scorrere del piano sulla curva chiusa, l'estremità della perpendicolare descrive un'altra curva chiusa: sia σ la lunghezza di questa seconda curva. L'angolo solido sotteso dalla prima è

$$\omega = 2\pi - \sigma$$

così come risulta dal teorema ben noto: *L'area di una curva tracciata su una sfera di raggio unitario, aumentata della lunghezza della curva polare, è uguale a una circonferenza di cerchio massimo della sfera.*

Questa costruzione è spesso comoda per calcolare l'angolo solido sotteso da una figura rettilinea; ma, essendo il nostro obiettivo quello di farci un'idea precisa dei fenomeni fisici, preferiamo il metodo seguente, dove non è impiegata alcuna costruzione che non derivi dai dati fisici del problema.

419. Si dà nello spazio una curva chiusa s , e si deve determinare l'angolo solido sotteso da tale curva in un punto dato P .

Se consideriamo questo angolo solido come il potenziale di uno strato magnetico avente per contorno la curva chiusa, dobbiamo definirlo come il lavoro compiuto contra la forza magnetica da un polo magnetico unitario proveniente da una distanza infinita fino al punto P . Se quindi σ è il cammino descritto dal polo avvicinandosi a P , il potenziale deve essere data dall'integrale preso lungo questo cammino. Deve pure essere il risultato dell'integrazione lungo la curva s . Pertanto la forma che conviene all'espressione dell'angolo solido deve essere quella di una doppia integrazione rispetto a s e a σ .

Se P è a una distanza infinita, l'angolo solido è evidentemente nullo. Con l'avvicinarsi di P , la curva chiusa, vista da questo punto mobile, sembra allargarsi, e si può immaginare l'angolo solido totale come generato dal moto apparente dei diversi elementi della curva chiusa, all'avvicinarsi del punto mobile.

Quando il punto P arriva in P' , percorrendo l'elemento $d\sigma$, l'elemento QQ' della curva chiusa, che indicheremo con ds , cambia posizione rispetto a P , e la linea che corrisponde a QQ' sulla sfera di raggio unitario descrive su questa superficie sferica un'area che si può rappresentare con

$$\omega = \Pi ds d\sigma \tag{3.0.1}$$

Per trovare Π , supponiamo P fisso mentre la curva chiusa si muove parallelamente a se stessa di una lunghezza $d\sigma$, uguale a PP' , ma diretta in verso contrario. Il movimento relativo del punto P sarà lo stesso che nella realtà.

Durante tale movimento, l'elemento QQ' descrive un'area a forma di parallelogrammo, i cui lati sono uguali e paralleli a QQ' e PP' . Se costruiamo una piramide avente questo parallelogrammo come base e il punto P come vertice, l'angolo solido di questa piramide sarà l'accrescimento $d\omega$ cercato.

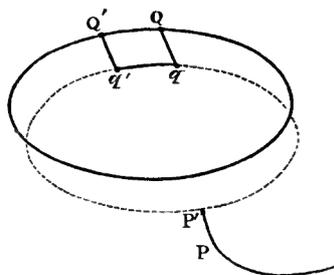


Fig. 3.

Per determinare questo angolo solido, siano θ e θ' gli angoli che ds e $d\sigma$ formano con PQ , e sia ϕ l'angolo dei piani di questi due angoli. L'area della proiezione del parallelogrammo $d\sigma ds$ su un piano perpendicolare (fig. 3) a PQ o r è

$$dsd\sigma \sin \theta \sin \theta' \sin \phi$$

e, poiché questa espressione è uguale a $r^2 d\omega$, troviamo

$$d\omega = \Pi dsd\sigma = \frac{1}{r^2} \sin \theta \sin \theta' \sin \phi dsd\sigma \quad (3.0.2)$$

da cui

$$\Pi = \frac{1}{r^2} \sin \theta \sin \theta' \sin \phi \quad (3.0.3)$$

420. Possiamo esprimere θ, θ', ϕ in funzione di r e dei suoi coefficienti differenziali relativi a s e σ , poiché

$$\cos \theta = \frac{dr}{ds} \quad \cos \theta' = \frac{dr}{d\sigma} \quad \sin \theta \sin \theta' \cos \phi = \frac{d^2 r}{dsd\sigma} \quad (3.0.4)$$

Troviamo così il seguente valore di Π^2 :

$$\Pi^2 = \frac{1}{r^4} \left[1 - \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 \right] - \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 r}{dsd\sigma} \right)^2 \quad (3.0.5)$$

Possiamo ottenere una terza espressione di Π in coordinate rettangolari, considerando la piramide il cui angolo solido è $d\omega$ e il cui asse è r : il suo volume è

$$\frac{1}{2} r^3 d\omega = \frac{1}{3} r^3 dsd\sigma$$

Ma il volume della piramide si può anche esprimere in funzione delle proiezioni di r, ds e $d\sigma$ sugli assi x, y, z : è il terzo del determinante di queste nove proiezioni; troviamo così, per il valore di Π ,

$$\Pi = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \frac{d\xi}{d\sigma} & \frac{d\eta}{d\sigma} & \frac{d\zeta}{d\sigma} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} \quad (3.0.6)$$

Questa espressione restituisce il valore di Π , senza l'ambiguità di segno che introduce la (3-6).

421. Il valore dell'angolo solido ω sotteso nel punto P dalla curva chiusa si può allora scrivere

$$\omega = \iint \Pi dsd\sigma + \omega_0 \quad (3.0.7)$$

dove l'integrazione rispetto a s deve essere estesa lungo l'intera curva chiusa, e l'integrazione relativa a σ da un punto qualunque A preso sulla curva che seguita dal polo mobile fino al punto

P . La costante ω_0 è il valore dell'angolo solido nel punto A ; esso è nullo se il punto A è a una distanza infinita dalla curva chiusa.

Il valore di ω in un punto qualunque P non dipende dalla forma della curva tra A e P , purché questa curva non attraversi lo strato magnetico stesso. Supponiamo che lo strato sia infinitamente sottile, e siano P e P' due punti vicini con P sulla superficie positiva e P' su quella negativa dello strato. Le curve AP e AP' sono forzatamente da una parte e dall'altra del contorno dello strato, di modo che PAP' costituisce con la linea infinitamente breve PP' una curva chiusa intrecciata con il contorno. Il valore di ω in P supera il suo valore in P' di 4π , cioè della superficie di una sfera di raggio unitario.

Pertanto, se si traccia una curva chiusa che attraversa una sola volta lo strato, che, in altre parole, si intreccia una sola volta con lo strato, il valore dell'integrale $\iint \Pi ds d\sigma$ preso lungo le due curve è uguale a 4π .

Questo integrale, considerato come dipendente solo dalla curva chiusa s e dalla curva arbitraria AP , è un esempio di una funzione a valori multipli; poiché, quando si passa dal punto A al punto P lungo diversi cammini, l'integrale assume differenti valori secondo il numero di volte che la curva AP si intreccia attorno alla curva s .

Se una curva congiungente i punti A e P può essere trasformata in un'altra con un movimento continuo, senza tagliare la curva chiusa s , l'integrale ha lo stesso valore per queste due curve; ma se, durante la trasformazione, si tagli n volte la curva chiusa, i valori dell'integrale differiscono di $4\pi n$.

Se σ e s sono due curve chiuse qualsiasi dello spazio, non intrecciate, il valore dell'integrale preso una volta su ognuna di esse è nullo.

Se esse sono intrecciate n volte nello stesso verso, il valore dell'integrale è $4\pi n$. Ma è possibile che due curve siano intrecciate alternativamente in verso contrario, di modo che esse siano invariabilmente legate tra loro e che il valore dell'integrale sia tuttavia zero (si veda la fig. 4).

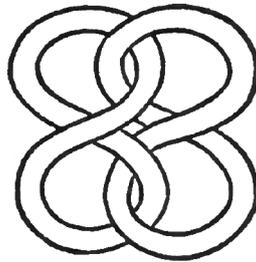


Fig. 4.

È proprio la scoperta di questo integrale esprime il lavoro effettuato da un polo magnetico che descrive una curva chiusa in presenza di una corrente elettrica chiusa, e indicante la relazione geometrica tra queste due curve chiuse, che portò Gauss a deplorare i pochi progressi fatti dalla Geometria di posizione, dai tempi di Leibniz, di Eulero e di Vandermonde. Dobbiamo ora segnalare qualche progresso principalmente dovuto a Riemann, Helmholtz e Listing.

422. Studiamo ora il risultato ottenuto integrando rispetto a s lungo la curva chiusa. Uno dei termini di Π , nella (3-7),

$$\frac{\xi - x}{r^3} \frac{d\eta}{ds} \frac{dz}{ds} = \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{r} \frac{dz}{ds} \right) \quad (3.0.8)$$

Se per brevità scriviamo ora

$$F = \int \frac{1}{r} \frac{dx}{ds} ds \quad G = \int \frac{1}{r} \frac{dy}{ds} ds \quad H = \int \frac{1}{r} \frac{dz}{ds} ds \quad (3.0.9)$$

questi integrali essendo presi una volta lungo la curva chiusa s , il termine di Π si può scrivere

$$\frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2 H}{d\xi ds}$$

e il corrispondente termine di $\int \Pi ds$ sarà

$$\frac{d\eta}{d\sigma} \frac{dH}{d\xi}$$

Riunendo tutti i termini di Π , possiamo scrivere

$$-\frac{d\omega}{d\sigma} = -\int \Pi ds = \left(\frac{dH}{d\eta} - \frac{dG}{d\zeta} \right) \frac{d\xi}{d\sigma} + \left(\frac{dF}{d\zeta} - \frac{dH}{d\xi} \right) \frac{d\eta}{d\sigma} + \left(\frac{dG}{d\xi} - \frac{dF}{d\eta} \right) \frac{d\zeta}{d\sigma} \quad (3.0.10)$$

Questa quantità è evidentemente il rapporto nel quale decresce il potenziale magnetico ω , quando si segue la curva σ , o, in altri termini, è la forza magnetica nella direzione di $d\sigma$.

Prendendo successivamente $d\sigma$ nella direzione degli assi x, y, z , otteniamo

$$\begin{cases} \alpha & = & -\frac{d\omega}{d\xi} & = & \frac{dH}{d\eta} - \frac{dG}{d\zeta} \\ \beta & = & -\frac{d\omega}{d\eta} & = & \frac{dF}{d\zeta} - \frac{dH}{d\xi} \\ \gamma & = & -\frac{d\omega}{d\zeta} & = & \frac{dG}{d\xi} - \frac{dF}{d\eta} \end{cases} \quad (3.0.11)$$

Le quantità F, G, H sono le componenti del potenziale vettore del foglio magnetico, la cui potenza è uguale all'unità e il cui contorno è la curva s . Del resto, esse non sono come il potenziale scalare ω delle funzioni aventi una serie di valori, ma sono perfettamente determinate in ogni punto dello spazio.

Si può trovare, con la costruzione geometrica seguente, il potenziale-vettore in un punto P , dovuto a un foglio magnetico limitato da una curva chiusa:

Sia un punto Q mobile lungo la curva chiusa con una velocità che è costantemente uguale alla distanza a dal punto P ; sia un secondo punto R partente da un punto fisso A con una velocità che è sempre parallela a quella di Q , ma che è sempre uguale all'unità. Quando il punto Q ha descritto una volta la curva chiusa, congiungiamo AR : la linea AR rappresenta in grandezza numerica e in direzione il potenziale vettore nel punto P dovuto alla curva chiusa.

Energia potenziale di un foglio magnetico posto in un campo di forza magnetico

423. Abbiamo già mostrato al § 410 che l'energia potenziale di un foglio magnetico di potenza ϕ posto in un campo magnetico di potenziale V è

$$M = \phi \iint \left(l \frac{dV}{dx} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz} \right) dS \quad (3.0.12)$$

dove l, m, n sono i coseni direttori della normale tracciata al foglio dal lato positivo e dove l'integrale è esteso a tutta la superficie del foglio.

Questo integrale di superficie può essere trasformato in integrale di linea per mezzo del potenziale vettore del campo magnetico; possiamo scrivere

$$M = -\phi \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (3.0.13)$$

essendo l'integrazione estesa una volta lungo la curva chiusa che forma il contorno del foglio magnetico, essendo la direzione di ds in verso antiorario per un osservatore posto dal lato positivo dello strato.

Se ora supponiamo che questo campo magnetico sia dovuto a un altro foglio di potenza ϕ' , possiamo determinare direttamente il valore di F per mezzo dei risultati del § 416 o del § 405. Se l', m', n' sono i coseni direttori della normale all'elemento dS' del secondo foglio, abbiamo

$$F = \phi' \iint \left(m' \frac{d}{dz'} \frac{1}{r} - n' \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} \right) dS'$$

dove r è la distanza dell'elemento dS' da un punto preso sul limite del primo foglio.

Ora questo integrale di superficie può essere trasformato in un integrale di linea esteso lungo il contorno del secondo foglio, che è

$$\phi' \int \frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} ds' \quad (3.0.14)$$

Analogamente

$$G = \phi' \int \frac{1}{r} \frac{dy'}{ds'} ds' \quad H = \phi' \int \frac{1}{r} \frac{dz'}{ds'} ds'$$

Sostituendo questi valori nell'espressione di M , troviamo

$$M = -\phi\phi' \iint \frac{1}{r} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \right) ds ds' \quad (3.0.15)$$

dove l'integrazione è estesa una volta lungo s e una volta lungo s' . Questa espressione fornisce l'energia potenziale dovuta all'azione reciproca dei due fogli; essa rimane la stessa, come deve essere quando si cambia s e s' . Quando la potenza di ognuno degli strati è unitaria, questa espressione, cambiata di segno, è detta potenziale di due curve chiuse s e s' . È una quantità molto importante nella teoria delle correnti. Se indichiamo con ϵ l'angolo compreso tra le direzioni degli elementi ds e ds' , il potenziale di s e s' si può scrivere

$$\iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds'$$

quantità che è evidentemente della dimensione di una linea.

4 Magnetizzazione indotta

424. Finora abbiamo considerato la distribuzione della magnetizzazione nel magnete come uno dei dati espliciti del problema. Non abbiamo avanzato alcuna ipotesi sul fatto che la magnetizzazione fosse permanente o temporanea, se non c'è nelle parti del ragionamento dove supponiamo il magnete rotto in piccoli pezzi, oppure in piccole parti tolte dal magnete in modo da non cambiare la magnetizzazione in alcun posto.

Dobbiamo ora considerare la magnetizzazione dei corpi dal punto di vista della sua produzione e modifica. Si constata che una barra di ferro, tenuta parallelamente alla direzione della forza magnetica terrestre, diviene magnetica, e che i suoi poli sono disposti in senso inverso a quelli della Terra, cioè nello stesso verso di quelli di un ago di bussola in equilibrio stabile.

Si constata che un pezzo di ferro dolce, posto in un campo magnetico, presenta proprietà magnetiche. Se è posto in una parte del campo dove la forza magnetica è grande, per esempio tra i poli di un magnete a ferro di cavallo, la sua magnetizzazione diviene interna. Se è allontanato dal campo magnetico, le sue proprietà magnetiche si indeboliscono molto o scompaiono del tutto. Quando le proprietà magnetiche del ferro dipendono interamente dalla forza magnetica del campo dove è posto e scompaiono quando è tolto da questo campo, si chiama *ferro dolce*. Il ferro dolce in senso magnetico lo è anche in senso letterale: è facile curvarlo e deformato, è difficile da rompere.

Il ferro che conserva le sue proprietà magnetiche dopo essere stato tolto dal campo magnetico è detto *ferro duro*; non assume lo stato magnetico così facilmente come quello dolce. La martellatura o qualunque altro tipo di vibrazione permette al ferro di assumere più facilmente lo stato magnetico quando è sottoposto all'azione di una forza magnetica, e di perderla più facilmente quando la forza magnetica è soppressa. Il ferro, che è duro nel senso magnetico, è anche più rigido alla flessione e più soggetto a rompersi.

Il martellamento, la laminatura, lo stiramento, il raffreddamento brusco tendono ad indurire il ferro; la cottura ad addolcirlo.

Le differenze magnetiche e meccaniche tra gli acciai di tempra dolce o dura sono molto maggiori che i ferri dolci o duri. L'acciaio dolce è quasi più facile da magnetizzare e smagnetizzare del ferro; l'acciaio più duro è il migliore materiale quando si vuole ottenere una magnetizzazione permanente.

La fusione, sebbene contenente più carbonio che acciaio, non mantiene così bene la magnetizzazione.

Se si potesse fare un magnete tale che la distribuzione del suo magnetismo non venisse alterata da alcuna forza magnetica agente su di esso, lo si potrebbe chiamare un *corpo a magnetizzazione fissa*. Non si conoscono altri corpi che soddisfano a questa condizione se non un circuito metallico conduttore attraversato da una corrente elettrica costante.

Un simile conduttore presenta proprietà magnetiche e, di conseguenza, può essere chiamato una *elettromagnete*; ma queste proprietà magnetiche non sono toccate dalle altre forze magnetiche del campo. Ritourneremo su questo punto nella parte IV.

Si constata che tutti gli altri magneti, che siano di acciaio temperato o di magnetite, sono influenzati da ogni forza magnetica che agisce su di essi.

Per le ricerche scientifiche è comodo distinguere tra la magnetizzazione permanente e quella temporanea. Per definizione, la magnetizzazione permanente è quella che esiste indipendentemente dalla forza magnetica; la magnetizzazione temporanea è quella che dipende da tale forza.

Dobbiamo osservare tuttavia che questa distinzione non è basata sulla conoscenza della natura intima delle sostanze magnetiche; è solo l'espressione di una ipotesi introdotta per poter applicare il calcolo a questi fenomeni. Torneremo al Cap. VI sulla Teoria fisica della magnetizzazione.

425. Studiamo ora la magnetizzazione temporanea, partendo dall'ipotesi che la magnetizzazione di una molecola della sostanza dipende solo dalla forza magnetica che agisce su di essa. Questa forza può essere dovuta in parte a cause esterne, in parte alla magnetizzazione temporanea delle molecole vicine.

Si dice che un corpo, magnetizzato dall'azione di una forza magnetica, è magnetizzato per induzione e che la sua magnetizzazione è indotta dalla forza magnetizzante.

La magnetizzazione indotta da una forza magnetizzante data varia per le diverse sostanze. Essa è maggiore per il ferro più puro e più dolce, il rapporto tra la magnetizzazione e a forza magnetica può raggiungere il valore 32 o anche 45¹.

Altre sostanze, come il nichel o il cobalto, possono assumere una magnetizzazione minore, e si osservano indici di polarità in tutte le sostanze, purché le si sottoponga a una forza magnetica sufficiente.

Se la magnetizzazione è nello stesso verso della forza magnetizzante, come nel caso del ferro, del nichel, del cobalto, ecc, la sostanza è detta *paramagnetica*, *ferromagnetica* o, più semplicemente, *magnetica*. In tutte queste ultime sostanze, il rapporto della magnetizzazione con la forza magnetica che la produce è sempre molto piccolo: è solo $-\frac{1}{400000}$ per il bismuto, che è la sostanza più diamagnetica conosciuta.

Nei corpi cristallizzati, soggetti a sforzi meccanici, o organizzati, la direzione della magnetizzazione non coincide sempre con quella della forza magnetica che la produce. La relazione tra le componenti della magnetizzazione, riferita a tre assi fissi nel corpo e le componenti della forza magnetica, si può esprimere con un sistema di tre equazioni lineari. Mostriamo che dei nove coefficienti che compaiono in queste equazioni, soltanto sei sono indipendenti. I fenomeni relativi ai corpi di questo tipo sono classificati con il nome di *fenomeni magnetocristallini*.

Posti in un campo di forze, i cristalli tendono a disporsi in modo che il loro asse di massima induzione paramagnetica o di minore induzione diamagnetica sia parallela alle linee di forza (si veda § 435).

Nel ferro dolce, la direzione della magnetizzazione coincide in ogni punto con quella della forza magnetica e, per piccoli valori della forza magnetica, gli è all'incirca proporzionale. Se la forza magnetica cresce, la magnetizzazione cresce più lentamente, e sembrerebbe risultare da esperienze descritte al Capitolo VI che vi è per la magnetizzazione un valore limite che non può essere superato, qualunque sia la forza magnetica.

Nell'esposizione che segue della Teoria del magnetismo indotto, supporremo dapprima che la magnetizzazione è proporzionale alla forza magnetica e nella stessa direzione.

Definizione del coefficiente di magnetizzazione indotta

426. Sia H la forza magnetica in un punto del corpo, definito come al § 398, e sia \mathfrak{I} la magnetizzazione in questo punto: si chiama coefficiente di magnetizzazione indotta il rapporto tra \mathfrak{I} e \mathfrak{H} .

Indicando questo coefficiente con κ , l'equazione fondamentale del magnetismo indotto è

$$\mathfrak{I} = \kappa \mathfrak{H} \tag{4.0.1}$$

Il coefficiente κ è positivo per il ferro e per sostanze paramagnetiche, e negativo per il bismuto e sostanze diamagnetiche. Esso raggiunge il valore 32 per il ferro, ed è considerevole per il nichel e il cobalto; ma, in tutti gli altri casi, è una quantità molto piccola e inferiore a 0,00001.

¹Thalèn, *Nova Acta Soc. Reg. Sc.*, Upsala, 1863.

La forza \mathfrak{H} è dovuta in parte all'azione dei magneti esterni al corpo magnetizzato per induzione, in parte alla magnetizzazione indotta del corpo stesso. Queste due parti soddisfano alla condizione di avere un potenziale.

427. Siano V il potenziale dovuto al magnetismo esterno al corpo, Ω quello che è dovuto alla magnetizzazione indotta; se U è il potenziale effettivo dovuto alle due cause simultaneamente

$$U = V + \Omega \quad (4.0.2)$$

Siano α, β, γ le componenti della forza magnetica \mathbf{H} lungo le direzioni x, y, z ; siano A, B, C quelle della magnetizzazione \mathbf{I} ; allora, dalla (4-1)

$$\begin{cases} A = \kappa\alpha \\ B = \kappa\beta \\ C = \kappa\gamma \end{cases} \quad (4.0.3)$$

Moltiplicando queste equazioni per dx, dy, dz rispettivamente e sommando, abbiamo

$$Adx + Bdy + Cdz = \kappa(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$

ma, poiché α, β, γ sono derivate di un potenziale U , il secondo membro si può scrivere $-\kappa dU$.

Se quindi κ è costante in tutta l'estensione del corpo, il primo membro deve pure essere il differenziale esatto di una funzione di x, y, z , che chiameremo ϕ , e l'equazione diviene

$$d\phi = -\kappa dU \quad (4.0.4)$$

dove

$$A = \frac{d\phi}{dx} \quad B = \frac{d\phi}{dy} \quad C = \frac{d\phi}{dz} \quad (4.0.5)$$

La magnetizzazione è quindi lamellare, secondo la definizione del § 412.

Si è visto al § 398 che, se ρ è la densità di volume del magnetismo libero,

$$\rho = -\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right)$$

che diviene, in virtù della (4-3)

$$\rho = -\kappa\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)$$

Ma, dal § 77,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 4\pi\rho$$

Pertanto

$$(1 + 4\pi\kappa)\rho = 0$$

da cui

$$\rho = 0 \quad (4.0.6)$$

per tutta la sostanza. La magnetizzazione è quindi nello stesso tempo solenoidale e lamellare (si veda § 407).

Non vi è quindi magnetismo libero, tranne alla superficie che limita il corpo. Se ν è la normale alla superficie, tracciata verso l'interno, la densità superficiale magnetica è

$$\sigma = -\frac{d\phi}{d\nu} \quad (4.0.7)$$

Il potenziale Ω dovuto a questa magnetizzazione si può quindi ottenere dall'integrale di superficie

$$\Omega = \iint \frac{\sigma}{r} dS \quad (4.0.8)$$

Il valore di Ω è finito e continuo e soddisfa all'equazione di Laplace in ogni punto interno o esterno alla superficie. Se distinguiamo con accenti i valori di Ω esterni alla superficie, e se ν' è la normale tracciata verso l'esterno, abbiamo alla superficie

$$\Omega = \Omega' \quad (4.0.9)$$

$$\frac{d\Omega}{d\nu} + \frac{d\Omega'}{d\nu'} = -4\pi\sigma$$

e per il § 78,

$$= 4\pi \frac{d\phi}{d\nu}$$

dalla (4-7)

$$= -4\pi\kappa \frac{dU}{d\nu}$$

, dalla (4-4)

$$= -4\pi\kappa \left(\frac{dV}{d\nu} + \frac{d\Omega}{d\nu} \right)$$

dalla (4-2).

Possiamo quindi scrivere la condizione alla superficie

$$(1 + 4\pi\kappa) \frac{d\Omega}{d\nu} + \frac{d\Omega'}{d\nu'} + 4\pi\kappa \frac{dV}{d\nu} = 0 \quad (4.0.10)$$

Quindi la determinazione del magnetismo indotto in un corpo omogeneo isotropo, limitato da una superficie S e soggetto all'azione di forze magnetiche esterne il cui potenziale è V , si può ridurre al seguente problema matematico:

Si tratta di trovare due funzioni Ω e Ω' che soddisfano alle seguenti condizioni:

All'interno della superficie S , Ω deve essere finito e continuo e deve soddisfare all'equazione di Laplace.

All'esterno della superficie S , Ω' deve essere finito e continuo, si deve annullare a una distanza infinita e deve soddisfare all'equazione di Laplace.

In ogni punto della superficie, $\Omega = \Omega'$, e le derivate di Ω , Ω' e V rispetto a ν , devono soddisfare alla (4-10).

Questo metodo, per trattare i problemi di magnetismo indotto, è dovuto a Poisson. La quantità k , di cui si fa uso nelle sue Memorie, non è la stessa della κ , ma è ad essa legata dalla relazione

$$4\pi\kappa(k-1) + 3k = 0 \quad (4.0.11)$$

Il coefficiente κ che abbiamo usato fu introdotto da J. Neumann.

428. Il problema del magnetismo indotto si può trattare in un altro modo, introducendo la grandezza che abbiamo chiamato, con Faraday, l'*induzione magnetica*.

La relazione tra l'induzione magnetica \mathbf{B} , la forza magnetica \mathfrak{H} e la magnetizzazione \mathbf{I} , è espressa dalla relazione

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathbf{I} \quad (4.0.12)$$

L'equazione che esprima la magnetizzazione indotta in termini della forza magnetica è

$$\mathfrak{I} = \kappa\mathfrak{H} \quad (4.0.13)$$

da cui, eliminando \mathbf{I} , troviamo

$$\mathfrak{B} = (1 + 4\pi\kappa) \mathfrak{H} \quad (4.0.14)$$

per la relazione tra l'induzione magnetica e la forza magnetica nelle sostanze la cui magnetizzazione è indotta da una forza magnetica.

Nel caso più generale, κ può essere una funzione, non solo della posizione del punto nella sostanza, ma anche della direzione del vettore \mathbf{H} ; ma, nel caso di cui ci occupiamo ora, κ è una quantità numerica.

Se poniamo

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa \quad (4.0.15)$$

si può definire μ come il rapporto tra l'induzione magnetica e la forza magnetica, e possiamo chiamare questo rapporto il *potere induttore magnetico della sostanza*, distinguendolo così da κ che è il coefficiente di magnetizzazione indotta.

Se indichiamo con U il potenziale magnetico totale, composto da V , potenziale dovuto alle cause esterne, e da Ω , dovuto alla magnetizzazione indotta, possiamo esprimere, come segue, le componenti a, b, c dell'induzione magnetica, e quelle di α, β, γ della forza magnetica

$$\begin{cases} a = \mu\alpha = -\mu \frac{dU}{dx} \\ b = \mu\beta = -\mu \frac{dU}{dy} \\ c = \mu\gamma = -\mu \frac{dU}{dz} \end{cases} \quad (4.0.16)$$

Le componenti a, b, c soddisfano all'equazione solenoidale

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \quad (4.0.17)$$

il potenziale U deve soddisfare all'equazione di Laplace

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0 \quad (4.0.18)$$

per tutti i punti dove μ è costante, cioè per tutti i punti di una sostanza omogenea o dello spazio vuoto.

Alla superficie stessa, indicando con ν una normale diretta verso la sostanza magnetica, e con ν' una normale diretta verso l'esterno, e distinguendo con accenti i simboli relativi alle quantità esterne alla sostanza, la condizione di continuità dell'induzione magnetica è

$$a \frac{dx}{d\nu} + b \frac{dy}{d\nu} + c \frac{dz}{d\nu} + a' \frac{dx}{d\nu'} + b' \frac{dy}{d\nu'} + c' \frac{dz}{d\nu'} = 0 \quad (4.0.19)$$

o, per le (4-16),

$$\mu \frac{dU}{d\nu} + \mu' \frac{dU'}{d\nu'} = 0 \quad (4.0.20)$$

Il coefficiente di induzione magnetica μ' relativo al mezzo esterno al magnete è uguale all'unità, a meno che il mezzo circostante non sia magnetico o diamagnetico.

Se sostituiamo a U il suo valore in funzione di V e di Ω , e a μ il suo valore in funzione di κ , otteniamo la stessa equazione (4-10), alla quale saremmo giunti con il metodo di Poisson.

Il problema del magnetismo indotto, considerato dal punto di vista della relazione tra l'induzione magnetica e la forza magnetica, corrisponde esattamente al problema della conduzione delle correnti elettriche nei mezzi eterogenei trattati al § 310.

La forza magnetica si deduce dal potenziale magnetico, assolutamente come la forza elettrica si deduce dal potenziale elettrico.

L'induzione magnetica è una grandezza della natura di un flusso e soddisfa alle stesse condizioni di continuità della corrente elettrica.

Il potere induttore specifico magnetico corrisponde in un problema alla conducibilità specifica nell'altro. Per questo motivo sir William Thomson, nella sua *Teoria del magnetismo indotto* (*Reprint*, p. 484; 1872), ha chiamato questa grandezza la *permeabilità del mezzo*.

Siamo ora preparati a esaminare la Teoria del magnetismo indotto sotto il punto di vista di Faraday.

Quando una forza magnetica agisce su un mezzo, magnetico, diamagnetico o neutro, essa produce un fenomeno detto induzione magnetica.

L'induzione magnetica è una grandezza direzionale del tipo di un flusso, e soddisfa alle stesse condizioni di continuità delle correnti elettriche e degli altri flussi.

Nei mezzi isotropi, la forza e l'induzione magnetica hanno la stessa direzione, e l'induzione magnetica è uguale al prodotto della forza magnetica per una quantità che abbiamo chiamato coefficiente di induzione e che abbiamo indicato con μ .

Nel vuoto, il coefficiente di induzione è uguale all'unità. Nelle quantità in grado di essere magnetizzate per induzione, il coefficiente di induzione $\mu = 1 + 4\pi\kappa$, essendo κ la quantità già definita con il nome di coefficiente di magnetizzazione indotta.

429. Siano μ, μ' i valori di μ da una parte e dall'altra della superficie di separazione tra due mezzi. Se V e V' sono i potenziali nei due mezzi, le forze magnetiche dirette verso la superficie sono $\frac{dV}{d\nu}$ e $\frac{dV'}{d\nu'}$.

Le quantità di induzione magnetica attraverso un elemento di superficie dS , contate verso la superficie, sono per i due mezzi rispettivamente $\mu \frac{dV}{d\nu} dS$ e $\mu' \frac{dV'}{d\nu'} dS$.

Poiché il flusso totale attraverso dS è nullo,

$$\mu \frac{dV}{d\nu} + \mu' \frac{dV'}{d\nu'} = 0$$

Ma, dalla teoria del potenziale, vicino a una superficie dove la densità è σ ,

$$\frac{dV}{d\nu} + \frac{dV'}{d\nu'} + 4\pi\sigma = 0$$

da cui

$$\frac{dV}{d\nu} \left(1 - \frac{\mu}{\mu'}\right) + 4\pi\sigma = 0$$

Se κ_1 è il rapporto tra la magnetizzazione superficiale e la forza normale nel primo mezzo il cui coefficiente è μ , abbiamo

$$4\pi\kappa_1 = \frac{\mu - \mu'}{\mu'}$$

Pertanto κ_1 è positivo o negativo a seconda che μ è maggiore o minore di μ' . Se poniamo $\mu = 1 + 4\pi\kappa$ e $\mu' = 4\pi\kappa'$,

$$\kappa_1 = \frac{\kappa - \kappa_1}{4\pi\kappa_1 + 1}$$

In questa espressione κ e κ' sono i coefficienti di magnetizzazione indotta dal primo e dal secondo mezzo, dedotti dalle esperienze fatte nell'aria; κ_1 è il coefficiente di magnetizzazione indotta del primo mezzo quando è circondato dal secondo.

Se κ' è maggiore di κ , κ_1 è negativo e la magnetizzazione apparente del secondo mezzo è in verso contrario alla forza magnetizzante.

Così, in un recipiente contenente una soluzione acquosa debole di un sale paramagnetico di ferro, sospesa nel mezzo di una soluzione più concentrata dello stesso sale, ed essendo soggetta all'azione di un magnete, si muove come se la magnetizzazione fosse in senso inverso di quella di un magnete sospeso liberamente nello stesso posto.

Si può spiegare questo fenomeno supponendo che la soluzione contenuta nel recipiente è, in realtà, magnetizzata nello stesso verso della forza magnetizzante, ma che la soluzione che circonda il recipiente è essa stessa magnetizzata più fortemente nello stesso verso. Di conseguenza, il recipiente è come un magnete debole posto tra due magneti forti, essendo tutti magnetizzati nella stessa direzione e aventi i loro poli contrari a contatto. Il polo nord del magnete debole è ruotato nella stessa direzione del polo nord dei magneti forti; ma, siccome è a contatto con il polo sud di un magnete più forte, vi è, vicino al suo polo nord, un eccesso di magnetismo sud che fa apparire il piccolo magnete magnetizzato in senso inverso.

Tuttavia, per certe sostanze, la magnetizzazione apparente è negativa, quando lo si sospende in ciò che si chiama il vuoto.

Se supponiamo $\kappa = 0$ per il vuoto, sarà negativo per queste sostanze; ma non si è scoperta alcuna sostanza per la quale κ abbia un valore negativo numericamente superiore a $\frac{1}{4\pi}$; pertanto μ è positivo per tutte le sostanze.

Le sostanze per le quali κ è negativo e, di conseguenza, μ inferiore all'unità, sono dette *sostanze diamagnetiche*. Quelle per le quali κ è positivo e μ maggiore dell'unità sono dette sostanze paramagnetiche, ferromagnetiche o semplicemente magnetiche.

Considereremo la teoria fisica delle proprietà diamagnetiche e paramagnetiche, quando affronteremo l'elettromagnetismo (§ 831-845).

430. La teoria matematica dell'induzione magnetica è stata fornita per la prima volta da Poisson². L'ipotesi sulla quale è fondata la sua teoria era quelle di due fluidi magnetici, ipotesi che ha gli stessi vantaggi matematici e le stesse difficoltà fisiche dell'ipotesi dei due fluidi elettrici. Per spiegare il fatto che un pezzo di ferro magnetizzato per induzione non si può caricare di quantità disuguali di due specie di magnetismo, suppose che la sostanza in generale non conduce questi fluidi e che queste sono soltanto certe piccole porzioni della porzioni della sostanze che contengono i fluidi in condizioni che permettano loro di obbedire alle forze che li sollecitano. Questi piccoli elementi magnetici contengono ognuno quantità esattamente uguali dei due fluidi, ed essi si muovono in ogni elemento con una libertà perfetta, ma non possono mai passare da un elemento magnetico a un altro.

Il problema è quindi dello stesso tipo di quello relativo a un certo numero di piccoli conduttori elettrici disseminati in un mezzo dielettrico isolante. I conduttori possono essere di forma qualunque, purché siano piccoli e non si tocchino.

Se questi sono corpi allungati, tutti orientati nella stessa direzione generale, dove si sono accumulati in una direzione che in un altro, il mezzo, così come ha mostrato Poisson, non è più isotropo. Per evitare complicazioni inutili, Poisson suppose che tutti questi elementi sono sferici e che la loro distribuzione non è in rapporto con alcun sistema di assi. Suppose che il volume totale di tutti gli elementi magnetici compresi in una unità di volume della sostanza fosse k .

Abbiamo già studiato (§ 314) la conducibilità elettrica di un mezzo nel quale sono distribuite piccole sfere di un'altra materia.

Se la conducibilità del mezzo è μ_1 e quella delle piccole sfere μ_2 , abbiamo trovato per la conducibilità totale del sistema composto

$$\mu = \mu_1 \frac{2\mu_1 + \mu_2 + 2k(\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_1 + \mu_2 - k(\mu_2 - \mu_1)}$$

Ponendo $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = \infty$, questa espressione diviene

$$\mu = \frac{1 + 2k}{1 - k}$$

Questa quantità μ è la conducibilità elettrica di un mezzo formato da sfere di conducibilità infinita disseminate in un mezzo di conducibilità uguale all'unità, essendo il volume totale delle sfere contenute nell'unità di volume uguale a k .

²Mémoires de l'Institut, 1824.

Il simbolo μ rappresenta il coefficiente di induzione magnetica di un mezzo formato da sfere di permeabilità infinita, disseminate in un mezzo di permeabilità uguale all'unità.

Il simbolo k , che chiameremo coefficiente magnetico di Poisson, rappresenta il rapporto tra il volume degli elementi magnetici e il volume totale della sostanza.

Il simbolo κ è conosciuto con il nome di coefficiente di magnetizzazione indotta di Neumann. Vi è il vantaggio di rendere più facile la trasformazione dei problemi magnetici in problemi relativi all'elettricità o al calore.

Le relazioni tra questi tre simboli sono le seguenti:

$$\begin{aligned} k &= \frac{4\pi\kappa}{4\pi\kappa+3} & k &= \frac{\mu-1}{\mu+2} \\ \kappa &= \frac{\mu-1}{4\pi} & \kappa &= \frac{3k}{4\pi(1-k)} \\ \mu &= \frac{1+2k}{1-k} & \mu &= 4\pi\kappa + 1 \end{aligned}$$

Se poniamo $\kappa = 32$, che è il valore dato dalle esperienze di Thalén sul ferro dolce³, troviamo $k = \frac{134}{135}$. Tale è, secondo la teoria di Poisson, il rapporto del volume delle molecole magnetiche rispetto al volume totale del ferro. Ora è impossibile riempire uno spazio con sfere uguali, in modo tale che il rapporto del loro volume con quello totale sia così vicino all'unità, ed è molto poco probabile che una parte così notevole del volume del ferro sia occupata da molecole solide, qualunque sia la loro forma. Questa è una delle ragioni per le quali dobbiamo abbandonare l'ipotesi di Poisson. Se ne presenterà un'altra al Capitolo VI. D'altra parte, il valore degli studi matematici di Poisson non è per nulla diminuito, poiché essi si basano, non sulla sua ipotesi, ma sul fatto sperimentale della magnetizzazione per induzione.

³*Recherches sur les propriétés magnétiques du fer*, (Nova Acta, Upsala, 1863)

5 Problemi particolari relativi all'induzione magnetica

Fogli sferici cavi

431. Il primo esempio di un problema di induzione magnetica interamente risolto è quello dato da Poisson, nel caso di un foglio sferico cavo soggetto all'azione di forze qualsiasi.

Per maggiore semplicità, supporremo che l'origine delle forze magnetiche sia nello spazio esterno al foglio.

Se V è il potenziale dovuto al sistema magnetico esterno, possiamo svilupparlo in una serie di armoniche solide della forma

$$V = C_0 S_0 + C_1 S_1 r + \dots + C_i S_i r^i \quad (5.0.1)$$

dove r è la distanza dal centro dello strato, S_i è un'armonica di superficie di ordine i , C_i è un coefficiente.

La serie è convergente, purché r sia inferiore alla distanza dal più vicino magnete del sistema al quale è dovuto questo potenziale. Pertanto, per il foglio sferico cavo e per lo spazio al suo interno, questo sviluppo è convergente.

Siano a_2 il raggio esterno e a_1 quello interno del foglio, e Ω il potenziale dovuto al suo magnetismo indotto. In generale, la forma della funzione Ω sarà differente nello spazio cavo, nella massa del foglio e nello spazio esterno. Sviluppiamo queste funzioni in serie armoniche, e limitiamo la nostra attenzione ai termini che contengono l'armonica di superficie S_i ; troviamo che, se Ω_1 è quella che corrisponde allo spazio cavo interno, lo sviluppo di Ω_1 deve essere formato da armoniche positive della forma $A_i S_i r^i$, poiché il potenziale non deve divenire infinito all'interno della sfera di raggio a_1 .

Nella massa del foglio, dove r_1 è compreso tra a_1 e a_2 , lo sviluppo può contenere potenze positive e negative di r , della forma

$$A_2 S_i r^i + B_2 S_i r^{-(i+1)}$$

All'esterno del foglio, r è maggiore di a_2 ; e, siccome lo sviluppo deve restare convergente per quanto grande sia r , non dobbiamo avere potenze negative della forma

$$B_3 S_i r^{-(i+1)}$$

Le condizioni alle quali deve soddisfare la funzione Ω sono: 1° di essere finita; 2° di essere continua; 3° di annullarsi all'infinito; 4° di soddisfare in ogni punto all'equazione di Laplace.

In virtù della condizione 1° $B_1 = 0$.

Per la 2°, per $r = a_1$

$$(A_1 - A_2) a_1^{2i+1} - B_2 = 0 \quad (5.0.2)$$

e quando $r = a_2$

$$(A_2 - A_3) a_1^{2i+1} + B_2 - B_3 = 0 \quad (5.0.3)$$

Per la 3° $A_3 = 0$; la condizione 4° è soddisfatta dappertutto, poiché le funzioni sono armoniche; ma vi sono, inoltre, altre condizioni da soddisfare sulla superficie interna ed esterna, per la (4-27), § 427.

Sulla superficie interna, dove $r = a_1$,

$$(1 + 4\pi\kappa) \frac{d\Omega_2}{dr} - \frac{d\Omega_1}{dr} + 4\pi\kappa \frac{dV}{dr} = 0 \quad (5.0.4)$$

e sulla superficie esterna dove $r = a_2$

$$- (1 + 4\pi\kappa) \frac{d\Omega_2}{dr} + \frac{d\Omega_3}{dr} - 4\pi\kappa \frac{dV}{dr} = 0 \quad (5.0.5)$$

Da queste condizioni ricaviamo le equazioni

$$(1 + 4\pi\kappa) (iA_2 a_1^{2i+1} - (i+1) B_2) - iA_1 a_1^{2i+1} + 4\pi\kappa i C_i a_1^{2i+1} = 0 \quad (5.0.6)$$

$$(1 + 4\pi\kappa) (iA_2 a_2^{2i+1} - (i+1) B_2) + (i+1) B_3 + 4\pi\kappa i C_i a_2^{2i+1} = 0 \quad (5.0.7)$$

e se poniamo

$$N_1 = \frac{1}{(1 + 4\pi\kappa) (2i+1)^2 + (4\pi\kappa)^2 i (i+1) \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right)} \quad (5.0.8)$$

troviamo

$$A_1 = (4\pi\kappa)^2 i (i+1) \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right) N_i C_i \quad (5.0.9)$$

$$A_2 = -4\pi\kappa i \left[2i+1 + 4\pi\kappa (i+1) \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right)\right] N_i C_i \quad (5.0.10)$$

$$B_2 = 4\pi\kappa i (2i+1) a_1^{2i+1} N_i C_i \quad (5.0.11)$$

$$B_3 = -4\pi\kappa i \{2i+1 + 4\pi\kappa i (i+1)\} (a_2^{2i+1} - a_1^{2i+1}) N_i C_i \quad (5.0.12)$$

Queste quantità, sostituite nello sviluppo armonico, danno la parte del potenziale che è dovuta alla magnetizzazione del foglio.

La quantità N_i è sempre positiva, poiché $1 + 4\pi\kappa$ non può mai essere negativa. Pertanto A_1 è sempre negativo, o, in altri termini, l'azione del foglio magnetizzato su un punto al suo interno è sempre opposto a quello della forza magnetica esterna, sia che l'involuppo sia paramagnetico o diamagnetico. Il valore effettivo del potenziale risultante, all'interno del foglio è

$$(C_i + A_1) S_i r^i$$

o

$$(1 + 4\pi\kappa) (2i+1)^2 N_i C_i S_i r^i \quad (5.0.13)$$

432. Quando κ è un numero considerevole, come nel caso del ferro dolce, la forza magnetica all'interno è solo una piccola frazione di quella all'esterno, a meno che il foglio non sia molto sottile.

In questo modo Sir William Thomson ha potuto rendere il suo galvanometro nautico indipendente da forze magnetiche esterne racchiudendolo in un tubo di ferro dolce.

433. Il caso più importante nella pratica è quello dove $i = 1$. In questo caso

$$N_1 = \frac{1}{9(1 + 4\pi\kappa) + 2(4\pi\kappa)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)} \quad (5.0.14)$$

$$\begin{cases} A_1 = -2(4\pi\kappa)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right) N_1 C_1 \\ A_2 = -4\pi\kappa \left[3 + 8\pi\kappa \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)\right] N_1 C_1 \\ B_2 = 12\pi\kappa a_1^3 N_1 C_1 \\ B_3 = -4\pi\kappa (3 + 8\pi\kappa) (a_2^3 - a_1^3) N_1 C_1 \end{cases} \quad (5.0.15)$$

In questo caso, la forza magnetica all'interno del foglio cavo è uniforme e uguale a

$$C_1 + A_1 = \frac{9(1 + 4\pi\kappa)}{9(1 + 4\pi\kappa) + 2(4\pi\kappa)^2 \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)} C_1 \quad (5.0.16)$$

Se vogliamo determinare κ , misurando la forza magnetica all'interno di un foglio cavo e confrontandola con la forza magnetica esterna, il valore più vantaggioso da assegnare allo spessore del foglio si deduce dall'equazione

$$1 - \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{9(1 + 4\pi\kappa)}{2(4\pi\kappa)^2} \quad (5.0.17)$$

La forza magnetica all'interno dell'involucro è allora la metà di quello all'esterno. Come nel caso del ferro, κ è un numero compreso tra 20 e 30, lo spessore dell'involucro dovrà essere di circa $\frac{1}{100}$ del raggio. Questo metodo si può applicare solo se il valore di κ è grande; poiché, se κ è piccolo, il valore di A_1 , che dipende dal suo quadrato, diviene trascurabile.

Per una sfera all'incirca piena, con una piccola cavità sferica

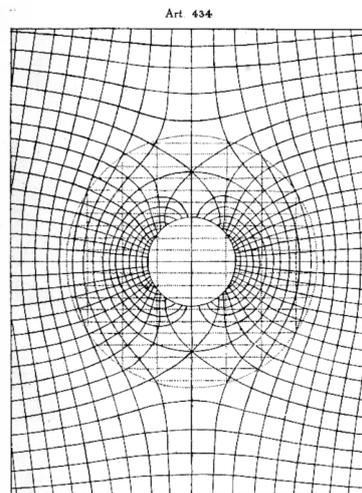
$$\begin{cases} A_1 = -\frac{2(4\pi\kappa)^2}{(3+4\pi\kappa)(3+8\pi\kappa)} C_1 \\ A_2 = -\frac{4\pi\kappa}{3+4\pi\kappa} C_1 \\ B_3 = -\frac{4\pi\kappa}{3+4\pi\kappa} C_1 a_2^3 \end{cases} \quad (5.0.18)$$

Si poteva dedurre direttamente tutto questo studio da quello della conduzione in un involucro sferico che è stato presentato al § 312; basterà porre nelle espressioni che vi sono date

$$k_1 = (1 + 4\pi\kappa) k_2$$

e ricordare che A_1 e A_2 nel problema della conduzione elettrica equivalgono a $C_1 + A_1$ e $C_1 + A_2$ nel problema dell'induzione magnetica.

434. La soluzione corrispondente per lo spazio a due dimensioni è rappresentata nella Tavola XV. Si è raffigurato il modo in cui le linee di forza, che, a una certa distanza dal centro della figura, sono all'incirca orizzontali, sarebbero deformate da un'asta cilindrica magnetizzata trasversalmente e posta nella sua posizione di equilibrio stabile.



Cylinder magnetized transversely, placed North and South in a uniform magnetic field.

Le linee che tagliano questo sistema ortogonalmente rappresentano le superfici equipotenziali: una di esse è una circonferenza. Il cerchio massimo punteggiato rappresenta la sezione del cilindro formato da una sostanza paramagnetica, e le linee rette punteggiate orizzontali, poste all'interno di questo cerchio, che continuano le linee di induzione esterne, sono linee di induzione interne alla sostanza. Le linee punteggiate verticali rappresentano le superfici equipotenziali e continuano il sistema esterno. Si osserverà che le linee di induzione si avvicinano all'interno della sostanza, e che le superfici equipotenziali si allontanano nel cilindro paramagnetico che, per impiegare il linguaggio di Faraday, conduce le linee di induzione meglio del mezzo circostante.

Se consideriamo il sistema delle linee verticali come quello delle linee di induzione, e il sistema delle linee orizzontali come quello delle superfici equipotenziali, abbiamo, in primo luogo, il caso di un cilindro magnetizzato trasversalmente, e posto nella sua posizione di equilibrio instabile nel mezzo delle linee di forza che fa allontanare. In secondo luogo, considerando il cerchio massimo punteggiato come fosse la sezione di un cilindro diamagnetico, le linee rette punteggiate che contiene, così come quelle esterne, rappresentano l'effetto dovuto a una sostanza diamagnetica, di separare le linee di induzione e di avvicinare le superfici equipotenziali, conducendo una simile sostanza l'induzione magnetica meno bene del mezzo circostante.

Caso di una sfera dove i coefficienti di magnetizzazione non sono gli stessi nelle diverse direzioni

435. Siano α, β, γ le componenti della forza magnetica; A, B, C le componenti della magnetizzazione in un punto qualunque; la relazione lineare più generale tra queste quantità è

$$\begin{cases} A = r_1\alpha + p_3\beta + q_2\gamma \\ B = q_3\alpha + r_2\beta + p_1\gamma \\ C = p_2\alpha + q_1\beta + r_3\gamma \end{cases} \quad (5.0.19)$$

dove i coefficienti r, p, q sono i nove coefficienti di magnetizzazione.

Supponiamo ora che tali siano le condizioni della magnetizzazione all'interno di una sfera di raggio a e che la magnetizzazione sia, in tutti i punti della sostanza, uniforme e nella stessa direzione e che le sue componenti siano A, B, C .

Supponiamo anche che la forza magnetizzante esterna sia uniforme e parallela a una direzione data, e che le sue componenti siano X, Y, Z .

Il valore di V è quindi

$$V = -(Xx + Yy + Zz) \quad (5.0.20)$$

e quello di Ω' , il potenziale di magnetizzazione all'esterno della sfera, è, dal § 391,

$$\Omega' = \frac{4\pi a^3}{3 r^3} (Ax + By + Cz) \quad (5.0.21)$$

Il valore di Ω , il potenziale della magnetizzazione dentro la sfera, è

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} (Ax + By + Cz) \quad (5.0.22)$$

Il potenziale effettivo dentro la sfera è $V + \Omega$, così che avremo per le componenti della forza magnetica dentro la sfera

$$\begin{cases} \alpha = X - \frac{4\pi}{3} A \\ \beta = Y - \frac{4\pi}{3} B \\ \gamma = Z - \frac{4\pi}{3} C \end{cases} \quad (5.0.23)$$

Pertanto

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{4\pi}{3}r_1\right)A + \frac{4\pi}{3}p_3B + \frac{4\pi}{3}q_2C = r_1X + p_3Y + q_2Z \\ \frac{4\pi}{3}q_3A + \left(1 + \frac{4\pi}{3}r_2\right)B + \frac{4\pi}{3}p_1C = q_3X + r_2Y + p_1Z \\ \frac{4\pi}{3}p_2A + \frac{4\pi}{3}q_1B + \left(1 + \frac{4\pi}{3}r_3\right)C = p_2X + q_1Y + r_3Z \end{cases} \quad (5.0.24)$$

Risolvendo queste equazioni, troviamo

$$\begin{cases} A = r'_1X + p'_3Y + q'_2Z \\ B = q'_3X + r'_2Y + p'_1Z \\ C = p'_2X + q'_1Y + r'_3Z \end{cases} \quad (5.0.25)$$

dove

$$\begin{cases} D'r'_1 = r_1 + \frac{4\pi}{3}(r_3r_1 - p_2q_2 + r_1r_2 - p_3q_3) + \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 D \\ Dp'_1 = p_1 - \frac{4\pi}{3}(q_2q_3 - p_1r_1) \\ Dq'_1 = q_1 - \frac{4\pi}{3}(p_2p_3 - q_1r_1) \end{cases} \quad (5.0.26)$$

dove D è il determinante dei coefficienti dei secondi membri delle (5-24), e D' il determinante dei coefficienti dei primi membri.

Il sistema dei coefficienti p', q', r' non è simmetrico ¹ a meno che il sistema dei coefficienti della forma p, q, r sia esso stesso simmetrico, cioè se i coefficienti della forma p sono uguali ai coefficienti corrispondenti della forma q .

436. Il momento della coppia che tende a far ruotare la sfera attorno agli assi x, y, z , si ottiene considerando le forze che agiscono su un elemento di volume, e prendendo la loro somma per tutta la sfera.

Il risultato è

$$\begin{aligned} L &= \frac{4\pi}{3}a^3(ZB - YC) = \\ &= \frac{4\pi}{3}a^3 \left[p'_1Z^2 - q'_1Y^2 + (r'_2 - r'_3)YZ + X(q'_3Z - p'_2Y) \right] \end{aligned} \quad (5.0.27)$$

Se facciamo

$$X = 0 \quad Y = F \cos \theta \quad Z = F \sin \theta$$

ciò che corrisponde a una forza magnetica F posta nel piano yz , e formante con l'asse y un angolo θ ; e se facciamo ruotare la sfera mentre questa forza rimane costante, il lavoro compiuto durante la rotazione della sfera sarà

$$\int_0^{2\pi} L d\theta$$

per ogni rivoluzione completa; ciò che è uguale a

$$\frac{2}{3}\pi^2 a^3 F^2 (p'_1 - q'_1) \quad (5.0.28)$$

Pertanto, affinché la sfera ruotante non possa divenire una sorgente inesauribile di energia, serve che $p'_1 = q'_1$ e $p'_2 = q'_2$ e $p'_3 = q'_3$.

Queste equazioni mostrano che, nelle condizioni iniziali, il coefficiente di B nella terza equazione è uguale a quello di C nella seconda, e così di seguito.

¹Si veda § 297.

²L'uguaglianza dei coefficienti p e q può essere dimostrato come segue:

Supponiamo che le forze che agiscono sulla sfera la facciano ruotare di un angolo $\delta\theta$ attorno a un diametro i cui coseni direttori sono λ, μ, ν ; se W indica l'energia della sfera, abbiamo per il § 436,

$$-\delta W = \frac{4\pi}{3}a^3 [(ZB - YC)\lambda + (ZC - ZA)\mu + (YA - XB)\nu] \delta\theta$$

Pertanto il sistema di equazioni è simmetrico, e le equazioni riferite agli assi principali di magnetizzazione divengono

$$\begin{cases} A = \frac{r_1}{1 + \frac{4\pi}{3}r_1} X \\ B = \frac{r_2}{1 + \frac{4\pi}{3}r_2} Y \\ C = \frac{r_3}{1 + \frac{4\pi}{3}r_3} Z \end{cases} \quad (5.0.29)$$

Il momento della coppia che tende a far ruotare la sfera attorno all'asse x è

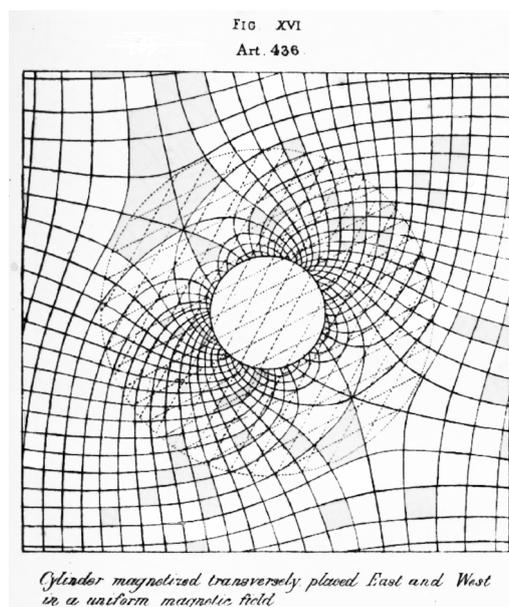
$$L = \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{r_2 - r_3}{\left(1 + \frac{4\pi}{3}r_2\right) \left(1 + \frac{4\pi}{3}r_3\right)} Y Z \quad (5.0.30)$$

Nella maggior parte dei casi, vi è solo una piccola differenza tra i coefficienti di magnetizzazione nelle diverse direzioni: possiamo quindi porre

$$L = \frac{2\pi}{3} a^3 \frac{r_2 - r_3}{\left(1 + \frac{4\pi}{3}r_2\right) \left(1 + \frac{4\pi}{3}r_3\right)} Y Z \quad (5.0.31)$$

Questa è la forza che tende a far ruotare una sfera cristallina, attorno all'asse x , da y verso z ; questa forza tende sempre a riportare parallelamente alla linea di forza magnetica l'asse del maggior coefficiente magnetico (o del minore coefficiente diamagnetico).

La Tavola XVI rappresenta il caso corrispondente nello spazio a due dimensioni.



Se supponiamo che la parte superiore della figura sia ruotata verso nord, essa rappresenta le perturbazioni delle linee di forza e delle superfici equipotenziali dovuta a un magnete con

Ma se gli assi delle coordinate sono fissi nella sfera, abbiamo, in virtù della rotazione,

$$\delta X = (Y\nu - Z\mu) \delta\theta \dots$$

possiamo quindi porre

$$-\delta W = \frac{4\pi}{3} a^3 (A\delta X + B\delta Y + C\delta Z)$$

Affinché la sfera rotante non possa divenire una sorgente di energia, bisogna che il secondo membro dell'equazione precedente sia un differenziale esatto. Quindi, poiché A, B, C sono funzioni lineari di X, Y, Z , risulta che W è una funzione di secondo grado di X, Y, Z e si deduce di conseguenza il risultato cercato. (Si veda anche Sir William Thomson, *Reprint of papers on Electricity and Magnetism*, p- 480-481)

magnetizzazione trasversale e con il suo polo nord posto a est. La forza risultante tende a far ruotare il cilindro da est verso nord. Il grande cerchio punteggiato rappresenta la sezione di un cilindro di una sostanza cristallina che avrebbe un più grande coefficiente di magnetizzazione lungo un asse nord-est sud-ovest rispetto a un asse nord-ovest sud-est. Le linee punteggiate all'interno di questo cerchio rappresentano le linee di induzione e le superfici equipotenziali, che, in questo caso, non sono più perpendicolari tra loro. La forza risultante che agisce sul cilindro tende evidentemente a farlo ruotare da est verso nord.

437. Il caso di un ellissoide posto in un campo di forza magnetico uniforme e parallelo è stato risolto da Poisson in un modo molto ingegnoso.

Se V è il potenziale in un punto (x, y, z) dovuto alla gravitazione di un corpo di forma qualunque e di densità uniforme ρ , $-\frac{dV}{dx}$ è il potenziale magnetico dovuto allo stesso corpo avente una magnetizzazione uniforme nel verso delle x e di intensità $I = \rho$.

Infatti, in un punto qualunque, $-\frac{dV}{dx}\delta x$ è l'eccesso del valore V del potenziale del corpo sul valore V' che assume questo potenziale quando il corpo è spostato di $-\delta x$ nella direzione delle x .

Se supponiamo il corpo spostato di $-\delta x$ e la sua densità ρ divenuta $-\rho$, in altre parole, la sostanza attrattiva sostituita con una repulsiva $-\frac{dV}{dx}\delta x$ sarà il potenziale dovuto all'insieme di questo nuovo corpo e di quello iniziale.

Consideriamo ora un elemento del corpo comprendente il volume δv . La quantità di materia è $\rho\delta v$ e, corrispondente a questa nel secondo corpo, è un elemento la cui quantità di materia è $-\rho\delta v$, posto a una distanza $-\delta x$. L'effetto di questi due elementi è equivalente a quello di un magnete di forza $\rho\delta v$ e di lunghezza δx . L'intensità di magnetizzazione si ottiene dividendo il momento magnetico di un elemento per il suo volume; il risultato è $\rho\delta x$.

Pertanto, $-\frac{dV}{dx}\delta x$ è il potenziale magnetico del corpo magnetizzato con l'intensità $\rho\delta x$, nella direzione delle x , e $-\frac{dV}{dx}$ è quello del corpo magnetizzato con l'intensità ρ .

Questo potenziale può essere considerato da un punto di vista diverso. Si è spostato il corpo della distanza $-\delta x$ e gli si è attribuita la densità $-\rho$. In tutto lo spazio comune alle due posizioni del corpo, la densità è zero, almeno per quanto è relativo all'attrazione; poiché le due densità uguali e contrarie si neutralizzano tra loro. Rimane quindi un foglio formato da materia positiva da un lato, da materia negativa dall'altro, nella quale si può considerare che il potenziale è dovuto. Lo spessore dell'involucro, nel punto dove la normale tracciata verso l'esterno forma con l'asse x un angolo ϵ , è $\delta x \cos \epsilon$ e la sua densità è ρ . La densità superficiale è quindi $\rho\delta x \cos \epsilon$ e, nel caso in cui il potenziale è $-\frac{dV}{dx}$, la densità superficiale è $\rho \cos \epsilon$.

Possiamo trovare in questo modo il potenziale di un corpo magnetizzato uniformemente parallelamente a una direzione data. Ora, se questa magnetizzazione uniforme è dovuta all'induzione magnetica, la forza magnetizzante deve pure essere uniforme e parallela in tutti i punti del corpo.

Questa forza è formata da due parti: l'una dovuta alle cause esterne, l'altra alla magnetizzazione del corpo. Se quindi la forza magnetica esterna è uniforme e parallela, la forza magnetica dovuta alla magnetizzazione deve pure essere uniforme e parallela in tutti i punti del corpo.

Pertanto, affinché questo metodo possa portare a una soluzione del problema dell'induzione magnetica, bisogna che $\frac{dV}{dx}$ sia, per l'interno del corpo, una funzione lineare delle coordinate x, y, z e, di conseguenza, V deve essere una funzione quadratica di queste coordinate.

I soli casi che conosciamo dove, per l'interno di un corpo, V è una funzione quadratica delle coordinate, sono quelli dove il corpo è limitato da una superficie di secondo grado completa; e il caso dove un simile corpo abbia dimensioni finite è quello dell'ellissoide. Applicheremo quindi il metodo al caso di un ellissoide.

Sia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5.0.32)$$

l'equazione dell'ellissoide, e Φ_0 denoti l'integrale definito³

$$\int_0^{\infty} \frac{d(\phi^2)}{\sqrt{(a^2 + \phi^2)(b^2 + \phi^2)(c^2 + \phi^2)}} \quad (5.0.33)$$

Allora se poniamo

$$L = 4\pi abc \frac{d\Phi_0}{d(a^2)} \quad M = 4\pi abc \frac{d\Phi_0}{d(b^2)} \quad N = 4\pi abc \frac{d\Phi_0}{d(c^2)} \quad (5.0.34)$$

il valore del potenziale dentro l'ellissoide sarà

$$V_0 = -\frac{\rho}{2} (Lx^2 + My^2 + Nz^2) + cost \quad (5.0.35)$$

Se l'ellissoide è magnetizzato all'intensità uniforme I , in una direzione formante con gli assi x, y, z angoli i cui coseni sono l, m, n , le componenti della magnetizzazione sono

$$A = Il \quad B = Im \quad C = In$$

e il potenziale dovuto a questa magnetizzazione all'interno dell'ellissoide sarà

$$\Omega = -I (Llx + Mmy + Nnz) \quad (5.0.36)$$

Se la forza magnetizzante esterna è \mathbf{H} , e se le sue componenti sono X, Y, Z , il suo potenziale sarà

$$V = - (Xx + Yy + Zz) \quad (5.0.37)$$

Pertanto le componenti della forza magnetizzante effettiva in un punto qualunque posto all'interno del corpo sono

$$X + AL \quad Y + BM \quad Z + CN \quad (5.0.38)$$

Le relazioni più generali tra la magnetizzazione e la forza magnetizzante sono date dalle tre equazioni lineari, comprendenti nove coefficienti; ma, per soddisfare alle condizioni di conservazione dell'energia, è necessario, nel caso dell'induzione magnetica, che tre di questi coefficienti siano rispettivamente uguale ad altri tre, di modo che avremo

$$\begin{cases} A = \kappa_1 (X + AL) + \kappa'_3 (Y + BM) + k'_2 (Z + CN) \\ B = \kappa'_3 (X + AL) + \kappa_2 (Y + BM) + k'_1 (Z + CN) \\ C = \kappa'_2 (X + AL) + \kappa'_1 (Y + BM) + k_3 (Z + CN) \end{cases} \quad (5.0.39)$$

Tramite queste equazioni possiamo determinare A, B, C in funzione di X, Y, Z , ottenendo così la soluzione più generale del problema.

Il potenziale all'esterno dell'ellissoide si compone allora di quello che è dovuto alla magnetizzazione dell'ellissoide e di quello che è dovuto alle forze magnetiche esterne.

438. Il solo caso importante nella pratica è quello dove

$$\kappa'_1 = \kappa'_2 = k'_3 \quad (5.0.40)$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases} A = \frac{\kappa_1}{1-\kappa_1} L X \\ B = \frac{\kappa_2}{1-\kappa_2} M Y \\ C = \frac{\kappa_3}{1-\kappa_3} N Z \end{cases} \quad (5.0.41)$$

³Si veda Thomson e Tait, *Natural Philosophy*, § 522.

Se l'ellissoide ha due assi uguali, e se è della forma planetaria appiattita

$$b = c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (5.0.42)$$

$$\begin{cases} L & = -4\pi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \sin^{-1} e \right) \\ M = N & = -2\pi \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \sin^{-1} e - \frac{1-e^2}{e^2} \right) \end{cases} \quad (5.0.43)$$

Se l'ellissoide è di forma ovoidale o allungata

$$a = b = c\sqrt{1 - e^2} \quad (5.0.44)$$

$$\begin{cases} L & = M = -2\pi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3} \log \frac{1+e}{1-e} \right) \\ N & = -4\pi \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2e} \log \frac{1+e}{1-e} - 1 \right) \end{cases} \quad (5.0.45)$$

Nel caso di una sfera, quando $e = 0$,

$$L = M = N = -\frac{4}{3}\pi \quad (5.0.46)$$

Nel caso di un ellissoide planetario molto appiattito, L diviene al limite uguale a -4π , e M e N uguali a $-\pi^2 \frac{a}{c}$.

Nel caso di un ellissoide ovoidale molto allungato, L e M si avvicinano al valore -2π , mentre n tende verso

$$-4\pi \frac{a^2}{c^2} \left(\log \frac{2c}{a} - 1 \right)$$

e si annulla quando $e = 1$.

Da questi risultati, deriva che:

1° Quando il coefficiente di magnetizzazione κ è molto piccolo, positivo e negativo, la magnetizzazione indotta è circa uguale alla forza magnetica moltiplicata per il coefficiente κ , ed è quasi indipendente dalla forma del corpo.

2° Se κ è una quantità positiva considerevole, la magnetizzazione dipende soprattutto dalla forma del corpo ed è quasi indipendente dal valore esatto di κ , eccetto nel caso in cui una forza longitudinale agisce su un ellissoide ovoidale molto allungato affinché $N\kappa$ sia una piccola quantità, sebbene κ sia grande.

3° Se il valore di κ potesse essere negativo e uguale a $\frac{1}{4\pi}$, avremmo una magnetizzazione di valore infinito nel caso di una forza magnetizzante agente normalmente a un disco piatto. L'assurdità di questo risultato conferma quanto detto al § 428.

Pertanto, finché κ è piccolo, vero per tutti i diamagnetici, e per tutti i corpi magnetici, ad eccezione del ferro, del nickel e del cobalto, le esperienze, per la misura di κ , si possono fare su corpi di forma qualunque.

Ma se, come nel caso del ferro, κ è un numero considerevole, esperienze fatte su sfere o figure appiattite non converrebbero per determinare κ . Così, nel caso di una sfera, il rapporto tra la magnetizzazione e la forza magnetizzante è di 1 a 4, 22, se $\kappa = 30$, valore presente in certi tipi di ferro; e, se κ fosse infinito, questo rapporto diverrebbe quello di 1 a 4, 19: si vede quindi che un errore molto piccolo sulla misura della magnetizzazione genererebbe un errore molto grande sul valore di κ .

Se si impiega, al contrario, un pezzo di ferro a forma di uovo molto allungato, finché $N\kappa$ avrà un valore mediocre rispetto all'unità, si potrà dedurre il valore di κ da quello della magnetizzazione; e più il valore di N sarà piccolo, e più si otterrà un valore esatto di κ .

Infatti, se si assegna a $N\kappa$ un valore sufficientemente piccolo, un piccolo errore sul valore dello stesso N , non introdurrà molto errore, di modo che si può impiegare, invece di un ovale, un corpo allungato qualunque, un filo o una lunga asta.

Dobbiamo tuttavia ricordarci che è solo quando il prodotto $N\kappa$ è piccolo rispetto all'unità che questa sostituzione è permessa. Infatti, la distribuzione del magnetismo su un lungo cilindro chiuso da superfici piane non assomiglia alla distribuzione su un ovoide allungato. Questo magnetismo libero è molto concentrato verso la fine del cilindro, mentre, nel caso dell'ovale, varia proporzionalmente alla distanza dall'equatore.

Si può, al contrario, così come visto al § 152, confrontare la distribuzione dell'elettricità su un cilindro a quello sull'ovoide.

Questi risultati permettono anche di comprendere come si può sia aumentare il momento magnetico di un magnete permanente, sia dargli una forma allungata. Se si magnetizza un disco all'intensità I , in una direzione normale alla sua superficie, e lo si lascia poi a se stesso, le molecole interne saranno soggette a una forza di smagnetizzazione costante e uguale a $4\pi I$; e, se questa forza non basta da sé a distruggere una parte del magnetismo, essa vi giunge rapidamente con l'aiuto delle vibrazioni o dei cambiamenti di temperatura.

Se si magnetizza un cilindro trasversalmente, la forza di smagnetizzazione è solo $2\pi I$.

Se il magnete è di forma sferica, essa è $\frac{4}{3}\pi I$.

In un disco magnetizzato trasversalmente, essa è $\pi\frac{2a}{c}I$ e, in un ovoide allungato magnetizzato longitudinalmente, essa è la più piccola di tutte $\frac{4}{3}\pi\frac{a^2}{c^2}I \log \frac{2c}{a}$.

Pertanto un magnete allungato ha meno di probabilità di perdere il suo magnetismo che un magnete grosso e corto.

In un ellissoide che ha coefficienti magnetici diversi per i suoi tre assi, il momento della forza che tende a farlo ruotare attorno all'asse x è

$$\frac{4}{3}\pi abc(BZ - CY) = \frac{4}{3}\pi abcYZ \frac{\kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_2\kappa_3(M - N)}{(1 - \kappa_2M)(1 - \kappa_3N)}$$

Se κ_2 e κ_3 sono piccoli, questa forza dipende soprattutto da qualità cristalline del corpo, e non dalla sua forma, purché le sue dimensioni non siano troppo disuguali; ma, se κ_2 e κ_3 sono considerevoli, come nel caso del ferro, la forza dipenderà principalmente dalla forma del corpo e lo farà ruotare in modo che il suo asse maggiore sia parallelo alle linee di forza.

Se si potesse ottenere un campo di forza magnetica sufficientemente intenso, sebbene uniforme, un corpo diamagnetico isotropo e allungato si disporrebbe in modo che la sua dimensione maggiore fosse parallela alle linee di forza magnetica.

439. La questione della distribuzione della magnetizzazione in un ellissoide di rivoluzione sottoposto all'azione di forze magnetiche qualunque è stato studiato da J. Neumann⁴. Kirchhoff ha esteso il metodo al caso di un cilindro di lunghezza infinita sottoposto all'azione di forze qualunque⁵.

Green, nella XVII sezione dei suoi *Essai*, ha presentato uno studio della distribuzione del magnetismo in un cilindro di lunghezza finita, sottoposto all'azione di una forza esterna uniforme e parallela al suo asse. Sebbene certe parti di questa analisi non siano molto rigorose, è probabile tuttavia che il risultato rappresenti all'incirca lo stato effettivo della magnetizzazione in questo caso molto importante. A colpo sicuro, esprime molto opportunamente la transizione dal caso in cui κ ha un valore considerevole a quello dove assume un valore molto piccolo; ma è assolutamente in errore nel caso in cui κ è negativo, come per le sostanze diamagnetiche.

Green trova che a una distanza x dal mezzo di un cilindro di raggio a e di lunghezza $2l$ la densità lineare è

$$\lambda = \pi\kappa Xpa \frac{e^{\frac{px}{a}} - e^{-\frac{px}{a}}}{e^{\frac{pl}{a}} + e^{-\frac{pl}{a}}}$$

⁴Journal de Crelle, bd. 37; 1848.

⁵Journal de Crelle, bd. 48; 1848.

dove p è una quantità numerica ricavabile dall'equazione

$$0,231863 - 2 \ln p + 2p = \frac{1}{\pi \kappa p^2}$$

Ecco alcuni dei valori corrispondenti di p e di κ :

κ	p	κ	p
∞	0	11,802	0,07
336,4	0,01	9,137	0,08
62,02	0,02	7,517	0,09
48,416	0,03	6,319	0,10
29,475	0,04	0,1427	1,00
20,185	0,05	0,0002	10,00
14,794	0,06	0,0000	∞
		negativo	immaginario

Se la lunghezza del cilindro è grande rispetto al suo raggio, la quantità totale di magnetismo libero da ogni lato del mezzo del cilindro è, così come deve essere,

$$M = \pi^2 a \kappa X$$

Da questa quantità, $\frac{1}{2}pM$ è distribuita sulla superficie piana che chiude il cilindro e la distanza dal centro di gravità di tutta la massa M , dal mezzo del cilindro, è $\frac{a}{p}$.

Se κ è molto piccolo, p è grande e la quasi totalità del magnetismo libero è sulle estremità del cilindro. Se κ aumenta, p diminuisce, e il magnetismo libero si spande su una maggiore lunghezza a partire dalle sue estremità. Se κ è infinito, il magnetismo libero in ogni punto del cilindro è proporzionale alla distanza dal mezzo, e la distribuzione è simile a quella dell'elettricità su un conduttore posto in un campo di forza uniforme.

440. In tutte le sostanze, ad eccezione del ferro, del nichel e del cobalto, il coefficiente di magnetizzazione è così piccolo che la magnetizzazione indotta del corpo produce solo una modificazione molto piccola delle forze in gioco nel campo magnetico. Possiamo quindi ammettere, in prima approssimazione, che la forza magnetica agente effettivamente all'interno del corpo è la stessa che in assenza del corpo stesso. Pertanto, in questa prima approssimazione, la magnetizzazione superficiale del corpo è $\kappa \frac{dV}{dv}$, dove $\frac{dV}{dv}$ è l'aumento del potenziale magnetico dovuto ai magneti esterni, lungo una normale tracciata all'interno della superficie. Se ora calcoliamo il potenziale dovuto a questa distribuzione superficiale, lo possiamo impiegare per passare a una seconda approssimazione.

Per trovare l'energia meccanica dovuta alla distribuzione magnetica in questa prima approssimazione, dobbiamo trovare l'integrale

$$E = \frac{1}{2} \iint \kappa dV \frac{dV}{dv} dS$$

preso su tutta la superficie del corpo. Abbiamo mostrato (§ 100) che esso è uguale all'integrale

$$E = -\frac{1}{2} \iiint \kappa \left(\left| \frac{dV}{dx} \right|^2 + \left| \frac{dV}{dy} \right|^2 + \left| \frac{dV}{dz} \right|^2 \right) dx dy dz$$

preso su tutto lo spazio occupato dal corpo; ossia, se R è la forza magnetica risultante

$$E = -\frac{1}{2} \iiint \kappa R^2 dx dy dz$$

Poiché il lavoro effettuato dalle forze magnetiche, durante uno spostamento δx del corpo, è $X\delta x$, dove X è la forza meccanica nel verso di x , e poiché

$$\int X\delta x + E = cost$$

$$X = -\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} \iiint \kappa R^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint \kappa \frac{dR^2}{dx} dx dy dz$$

ciò che mostra che l'effetto della forza sul corpo è la stessa come se ognuna delle parti questo corpo tendesse a spostarsi dai punti in cui R^2 è minore verso quelli in cui è maggiore, con una forza uguale a

$$\frac{1}{2} \kappa \frac{dR^2}{dx}$$

per unità di volume.

Se κ è negativo, come nei diamagnetici, la forza è diretta, così come mostrato da Faraday, da parti più energiche a parti meno energiche del campo magnetico. La maggior parte delle azioni osservate nel caso di corpi diamagnetici dipendono da queste proprietà.

Magnetismo di una nave

441. Quasi tutte le parti della scienza magnetica trovano la loro applicazione nella navigazione. L'azione direzionale del magnetismo terrestre su un ago della bussola ci fornisce il solo metodo in grado di determinare il percorso di una nave quando il Sole e le stelle sono nascoste. Si credette dapprima che la declinazione dell'ago, scostandosi dal meridiano vero, fosse un ostacolo all'impiego della bussola nella navigazione; ma, dopo che si ebbe superata tale difficoltà predisponendo carte magnetiche, si riconobbe che la declinazione stessa dovesse aiutare il marinaio nel determinare la posizione della sua nave.

L'operazione più difficile nella navigazione è sempre stata quella di determinare la longitudine. Non essendo la declinazione la stessa nei diversi punti di uno stesso parallelo, una osservazione di declinazione unita alla conoscenza della latitudine permetterebbe al marinaio di trovare la sua posizione su una carta magnetica.

Ma, da qualche tempo, si è fatto un grande uso del ferro nella costruzione delle navi, tanto che è diventato praticamente impossibile servirsi della bussola se non si tiene conto dell'azione che esercita su di essa la nave fintanto in quanto corpo magnetico.

Come abbiamo visto, è un problema molto difficile come la determinazione della distribuzione del magnetismo in un corpo di forma qualunque soggetto all'azione del magnetismo terrestre, quand'anche non intervenisse né tensione meccanica, né alcuna altra causa perturbativa.

Ma, nel caso attuale, il problema è semplificato dalle seguenti considerazioni:

Si suppone il centro della bussola posto in un punto fisso della nave, molto lontano da tutta la massa ferrosa in modo che il magnetismo dell'ago non induca sulla nave alcuna magnetizzazione apprezzabile. Si suppone, inoltre, l'ago della bussola molto piccolo per poter considerare la forza magnetica uguale in tutti i suoi punti.

Si suppone infine che entrino nella nave solo due tipi di ferro:

1° ferro duro, magnetizzato in modo costante;

2° ferro dolce, la cui magnetizzazione è indotta dalla terra o da altri magneti.

Rigorosamente, dovremmo ammettere che il ferro più duro, non solo è suscettibile di induzione, ma anche può perdere in diversi modo una parte di ciò che si chiama magnetizzazione permanente.

Il ferro più dolce è pure in grado di conservare ciò che si chiama una magnetizzazione residua. Le proprietà effettive del ferro non potrebbero essere esattamente rappresentate, se lo si suppone formato dal ferro dolce e duro, che sono state definite in precedenza. Ma si è riconosciuto che, quando una nave è sottoposta solo all'azione della forza magnetica terrestre H , senza tensioni

straordinarie, come nel caso di tempesta, l'ipotesi che il suo magnetismo è dovuto in parte a una magnetizzazione permanente e in parte all'induzione porta a risultati sufficientemente esatti, quando lo si applica alla correzione delle bussole.

Le equazioni sulle quali è basata la teoria della variazione della bussola sono state date da Poisson, nel tomo V delle *Mémoires de l'Institut*, p. 533; 1824.

Queste equazioni non comportano, relativamente al magnetismo indotto, altra ipotesi che la seguente:

Se una forza magnetica X dovuta al magnetismo esterno produce nel ferro della nave una magnetizzazione indotta, e questa esercita sull'ago un'azione perturbatrice le cui componenti sono X', Y', Z' , ogni cambiamento in un rapporto dato della forza magnetica esterna produrrà un cambiamento nello stesso rapporto delle componenti della forza perturbatrice.

È vero che, quando la forza magnetica che agisce sul ferro diviene molto grande, la magnetizzazione indotta cessa di essere proporzionale alla forza magnetica esterna; ma questa mancanza di proporzionalità è del tutto insensibile per forze magnetiche della grandezza di quelle che sono dovute all'azione della terra.

Pertanto, si può ammettere nella pratica che, se una forza magnetica, il cui valore è l'unità, produce, mediante il ferro della nave, una forza perturbatrice dell'ago della bussola, le cui componenti sono a lungo le x , d lungo le y , e g lungo le z , le componenti della forza perturbatrice dovute a una forza X nella direzione delle x saranno aX, dX, gX .

Se quindi prendiamo assi fissi nella nave, e tali che x sia diretto verso la prua, y verso tribordo, e z verso la chiglia della nave; e se X, Y, Z sono le componenti della forza magnetica terrestre in queste direzioni, e X', Y', Z' le componenti della forza dovuta all'azione combinata della terra e della nave sull'ago della bussola

$$\begin{aligned} X' &= X + Ax + By + Cz + P \\ Y' &= Y + dX + eY + fZ + Q \\ z' &= Z + Gx + hY + kZ + R \end{aligned} \tag{5.0.47}$$

In queste equazioni, $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ sono nove coefficienti costanti dipendenti dalla quantità, dalla disposizione e dalla capacità di induzione del ferro dolce posto nella nave.

P, Q, R sono quantità costanti dipendenti dalla magnetizzazione permanente della nave.

È evidente che, se l'induzione magnetica è una funzione lineare della forza magnetica, queste equazioni sono sufficientemente generali; esse non sono altro che l'espressione più generale di un vettore come funzione lineare di un altro vettore.

Si può così mostrare che esse non sono troppo generali; poiché, per una disposizione opportuna del ferro, si può far variare uno qualunque dei coefficienti indipendentemente da tutti gli altri.

Infatti, un'asta di ferro, lunga e sottile, sottoposta all'azione di una forza magnetica longitudinale, prende dei poli che hanno ognuno una forza numericamente uguale al prodotto della sezione trasversale dell'asta per la forza magnetica e per il coefficiente di magnetizzazione indotta. Una forza magnetica trasversale all'asta produce una magnetizzazione molto minore, il cui effetto è quasi insensibile alla distanza di alcuni diametri.

Se quindi si pone una lunga asta di ferro nella direzione dall'inizio alla fine, con una delle sue estremità a una distanza x dall'ago della bussola, misurata verso la prua della nave, e se la sezione dell'asta è A e il suo coefficiente di magnetizzazione κ , la forza del polo sarà $A\kappa X$, e se $A = \frac{x^2}{\kappa}$, la forza esercitata da questo polo sull'ago della bussola sarà aX . Si può supporre quest'asta assai lunga perché si possa trascurare l'effetto dell'altro polo sulla bussola.

Abbiamo così un modo per assegnare al coefficiente a il valore voluto.

Se poniamo un'altra asta di sezione B , che abbia una delle sue estremità nello stesso punto posto a una distanza x dall'ago verso la prua della nave, e che si estende verso tribordo a una distanza molto grande affinché il polo lontano non abbia un'azione valutabile sulla bussola,

la forza perturbatrice dovuta a questa asta sarà diretta lungo le x e sarà uguale a $\frac{B\kappa Y}{x^2}$, o, se $B = \frac{bx^2}{\kappa}$, la forza sarà bY .

Quest'asta introduce quindi il coefficiente b .

Una terza asta partente dallo stesso punto e diretto dall'alto in basso introdurrà il coefficiente c .

I coefficienti d, e, f possono essere prodotti per mezzo di tre aste dirette verso l'avanti, verso tribordo e verso il fondo della nave, e partenti da un punto posto a tribordo della bussola; i coefficienti g, h, k , per mezzo di tre aste dirette nelle stesse direzioni e partenti da un punto posto al di sotto della bussola.

Pertanto si può far variare separatamente ognuno di questi coefficienti, per mezzo di aste di ferro opportunamente posizionate.

Le quantità P, Q, R sono le componenti della forza agente sulla bussola, che è dovuta alla magnetizzazione permanente della nave, e a questa parte della magnetizzazione indotta che è dovuta all'azione della magnetizzazione permanente.

Una discussione completa delle equazioni (5-47) e della relazione tra la direzione magnetica vera della nave e la direzione indicata dalla bussola è stata presentata da M. Archibald Smith, nel *Manual of the Deviation of the Compass*, pubblicato dall'Ammiragliato.

Vi si presenta un buon metodo grafico per studiare il problema. Prendendo per origine un punto fisso, si traccia, a partire da questo punto, una linea rappresentante in grandezza e direzione la parte orizzontale della forza magnetica che agisce effettivamente sull'ago della bussola. Quando si fa girare attorno la nave di modo che faccia rotta nei diversi azimut successivamente, l'estremità di questa linea descrive una curva ogni punto della quale corrisponde all'azimut particolare.

Si chiama *digogramma* una simile curva che fornisce la grandezza e la direzione della forza che agisce sull'ago, in funzione dell'azimut magnetico della nave.

Vi sono due specie di digogrammi. Nel primo, la curva è tracciata su un piano che rimane fisso nello spazio quando la nave gira su se stessa. Nel secondo, la curva è tracciata su un piano fisso rispetto alla nave.

Il digogramma di prima specie è una lumaca di Pascal, quella di seconda specie è un'ellisse. Per la costruzione e l'uso di queste curve, così come per un gran numero di teoremi, così interessanti per il matematico quanto importanti per il navigatore, si rinvia il lettore al *Manual of the Deviation of the Compass* dell'Ammiragliato.

6 Teoria del magnetismo indotto di Weber

442. Abbiamo visto che Poisson considera la magnetizzazione del ferro come dovuta a una separazione di fluidi magnetici che si produrrebbero in ogni molecola magnetica. Se desideriamo evitare questa ipotesi dell'esistenza di fluidi magnetici, possiamo enunciare la stessa teoria sotto un'altra forma, dicendo che ogni molecola diviene un magnete quando una forza magnetica agisce su di essa.

La teoria di Weber differisce da questa in quanto presuppone che le molecole di ferro sono sempre magneti, anche prima dell'applicazione della forza magnetizzante; ma nel ferro comune gli assi magnetici delle molecole sono orientati indifferentemente in tutti i versi, di modo che il ferro preso nel suo insieme non manifesta proprietà magnetiche.

Quando una forza magnetica agisce sul ferro, essa tende ad orientare nella stessa direzione gli assi di tutte le molecole e a fare così un magnete del ferro preso nel suo insieme.

Se gli assi di tutte le molecole fossero resi paralleli, il ferro presenterebbe la massima intensità di magnetizzazione di cui è capace. Così, la teoria di Weber implica l'esistenza di un limite di intensità di magnetizzazione, e la prova sperimentale dell'esistenza di un tale limite è necessaria a questa teoria. Si devono a Joule¹ e a Müller² esperienze che evidenziano una tendenza verso un limite di magnetizzazione.

Le esperienze di Beetz³, eseguite su del ferro elettrolitico deposto sotto l'azione di una forza magnetica, forniscono la dimostrazione più completa dell'esistenza di questo limite.

Da filo d'argento verniciato, si grattava la vernice lungo una linea longitudinale molto sottile. Questo filo era immerso nella soluzione di un sale di ferro e posto in un campo magnetico, con la linea sverniciata parallela alle linee di forza magnetica. Facendo di questo filo il catodo di una corrente elettrica attraversante la soluzione, del ferro si deposita molecola per molecola sulla stretta superficie ripulita. Si esaminò poi, dal punto di vista magnetico, il filamento di ferro così formato, e si trovò che il suo momento magnetico era molto grande per una così piccola massa di ferro; e, se si faceva agire nello stesso verso una potente forza magnetizzante, si trovava che l'aumento di magnetizzazione temporaneo era molto piccolo, e che la magnetizzazione permanente non era variata. Una forza magnetizzante di verso contrario riportava ben presto il filamento di ferro alle condizioni del ferro magnetizzato nella maniera comune.

La teoria di Weber, che suppone che in questo caso la forza magnetizzante ha orientato nella stessa direzione gli assi di tutte le molecole di ferro, nel momento in cui esse si depositano, si accorda molto bene con i fatti osservati.

Beetz ha trovato che, se si continua l'elettrolisi sotto l'azione di una forza magnetizzante, l'intensità di magnetizzazione del ferro che si deposita ulteriormente diminuisce. Probabilmente gli assi delle molecole sono deviati della direzione delle linee di forza nel momento in cui sono messe in libertà a fianco delle molecole già depositate; di modo che non ci si può avvicinare al parallelismo se non nel caso di un filamento di ferro molto sottile.

Se, come lo suppose Weber, le molecole di ferro sono già dei magneti, ogni forza magnetizzante sufficiente a rendere i loro assi paralleli nel momento in cui le molecole si depositano per via elettrolitica deve bastare a produrre nel filamento depositato la più grande intensità di magnetizzazione.

¹ *Annals of Electricity*, t. IV, p. 131; *Phil. Mag.*, [4], t. II, p. 316.

² *Pogg. Ann.*, t. LXXIX, p. 337; 1850.

³ *Pogg. Ann.*, t. CXI; 1860.

Se, al contrario, le molecole di ferro non sono magneti, ma sono solamente capaci di magnetizzarsi, la magnetizzazione del filamento depositato dipenderà dalla forza magnetizzante come nel caso del ferro dolce comune. Le esperienze di Beetz non lasciano spazio a quest'ultima ipotesi.

443. Ammetteremo quindi, con Weber, che in ogni unità di volume di ferro vi sono n molecole magnetiche e che il momento magnetico di ognuna è m . Se gli assi di tutte le molecole fossero posti parallelamente tra loro, il momento magnetico dell'unità sarebbe $M = nm$ e si avrebbe la massima intensità di magnetizzazione di cui il ferro è capace.

Weber suppose che nel ferro comune non magnetizzato gli assi delle molecole sono dirette indifferentemente in tutte le direzioni.

Per rappresentare questo stato, supponiamo una sfera descritta e un raggio tracciato dal centro parallelamente all'asse di ognuna delle n molecole. La distribuzione delle estremità di questi raggi esprimerà quella degli assi delle molecole. Nel caso del ferro comune, questi n punti saranno ugualmente distribuiti su tutte le parti della superficie della sfera; di modo che il numero delle molecole i cui assi formano con l'asse x un angolo inferiore a α sarà

$$\frac{n}{2} (1 - \cos \alpha)$$

e il numero delle molecole i cui assi formano con l'asse x un angolo compreso tra α e $\alpha + d\alpha$ è

$$\frac{n}{2} \sin \alpha d\alpha$$

Questa è la distribuzione delle molecole in un pezzo di ferro che non è mai stato magnetizzato.

Supponiamo ora che si faccia agire sul ferro, nella direzione dell'asse x , una forza magnetica X , e consideriamo una molecola il cui asse era inizialmente inclinato sull'asse dell'angolo α .

Se questa molecola fosse perfettamente libera di ruotare, essa disporrebbe il suo asse parallelo all'asse x ; e se tutte le molecole facessero la stessa cosa, la forza magnetizzante più piccola basterebbe a sviluppare il più alto grado di magnetizzazione: ma non è questo il caso.

Le molecole non ruotano in modo da portare i loro assi paralleli all'asse x , sia che ogni molecola sia sottoposta a una forza tendente a mantenerla nella sua posizione iniziale, sia che un effetto equivalente sia prodotto dalle azioni reciproche dell'intero sistema di molecole.

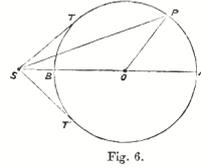
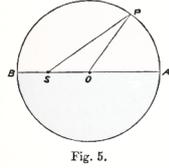
Weber adottò la prima di queste ipotesi essendo la più semplice; suppose che, quando una molecola è deviata, essa è sollecitata a ritornare alla sua posizione iniziale da una forza uguale a quella che produrrebbe una forza magnetica D , agente nella direzione iniziale del suo asse.

La direzione che prende effettivamente l'asse della molecola è quindi quella della risultante di X e di D .

Sia (fig. 5) APB la sezione di una sfera il cui raggio rappresenta, a una certa scala, la forza D , e sia OP un raggio parallelo all'asse di una molecola determinata nella sua posizione originaria.

Rappresenti SO alla stessa scala la forza magnetizzante X , che si suppone agire da S verso O . Se la molecola è sottoposta alla forza X nella direzione di SO , e a una forza D in una direzione parallela a OP , direzione iniziale dell'asse, il suo asse si disporrà nella direzione della risultante SP di X e di D .

Poiché gli assi delle molecole sono, in origine, orientate in tutte le direzioni, P può essere indifferentemente un punto qualunque della sfera. Sulla fig. 5, dove X è più piccolo di D , la posizione finale SP dell'asse può essere in una direzione qualunque, ma non indifferentemente, poiché vi sono più molecole aventi i loro assi ruotati verso A che verso B . Nella fig. 6, dove X è più grande di D , gli assi delle molecole saranno tutte comprese all'interno del cono STT' , tangente alla sfera.



Vi sono quindi due casi differenti, a seconda che X sia minore o maggiore di D .
Siano

$\alpha = AOP$ l'inclinazione iniziale dell'asse di una molecola sull'asse x ;

$\theta = ASP$ l'inclinazione di questo asse quando è stato deviato dalla forza X ;

$\beta = SPO$ l'angolo di deviazione;

$SO = X$ la forza magnetizzante;

$OP = D$ la forza che tende a riportare la molecola alla sua posizione iniziale;

$SP = R$ la risultante di X e di D ;

m il momento magnetico della molecola.

Il momento della coppia dovuta a X , che tende a diminuire l'angolo θ , è

$$mL = mX \sin \theta$$

e il momento della coppia dovuta a D , che tende ad aumentare l'angolo θ , è

$$mL = mD \sin \beta$$

Uguagliando questi valori e ricordandoci che $\beta = \alpha - \theta$, troviamo

$$\tan \theta = \frac{D \sin \theta}{X + D \cos \alpha} \quad (6.0.1)$$

che determina la direzione dell'asse dopo la deviazione.

Dobbiamo trovare ora l'intensità della magnetizzazione prodotta nella massa dalla forza X ; e, per questo, bisogna scomporre il momento magnetico di ogni molecola, lungo la direzione x , e unire tutte queste componenti.

La componente del momento di una molecola lungo la direzione x è $m \cos \theta$.

Il numero di molecole, la cui inclinazione iniziale era compresa tra α e $\alpha + d\alpha$, è $\frac{n}{2} \sin \alpha d\alpha$.

Dobbiamo quindi integrare

$$I = \int_0^{\pi} \frac{mn}{2} \cos \theta \sin \alpha d\alpha \quad (6.0.2)$$

e ricordare che θ è una funzione di α .

Possiamo esprimere θ e α in funzione di R : l'espressione da integrare diviene

$$\frac{mn}{4X^2D} (R^2 + X^2 - D^2) dR \quad (6.0.3)$$

il cui integrale generale è

$$\frac{mnR}{12X^2D} (R^2 + 3X^2 - 3D^2) + C \quad (6.0.4)$$

Nel primo caso, quello dove X è più piccolo di D , i limiti di integrazione sono $R = D + X$ e $R = D - X$. Nel secondo caso, dove X è maggiore di D , i limiti sono $R = X + D$ e $R = X - D$.

Quando $X < D$

$$I = \frac{2mn}{3D} X \quad (6.0.5)$$

Quando $X = D$

$$I = \frac{2}{3} \tag{6.0.6}$$

Quando $X > D$

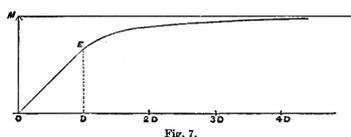
$$I = mn \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2} \right) \tag{6.0.7}$$

e quando X diviene infinito

$$I = mn \tag{6.0.8}$$

Secondo questa teoria, che è stata adottata da Weber⁴, mentre la forza magnetizzante cresce da 0 a D , la magnetizzazione aumenta nella stessa proporzione. Quando la forza magnetizzante raggiunge il valore D , la magnetizzazione raggiunge i $\frac{2}{3}$ del suo valore limite. Quando la forza magnetizzante è ancora aumentata, la magnetizzazione, invece di crescere indefinitamente, tende verso un limite finito.

Questa legge di magnetizzazione è espressa dalla fig. 7, dove la forza magnetizzante è contata da O verso destra, e dove la magnetizzazione è posta sulle ordinate. I risultati di Weber offrono un accordo soddisfacente con questa legge. Pertanto è probabile che il valore di D non sia lo stesso per tutte le molecole di uno stesso pezzo di ferro; di modo che la transizione della linea retta che va da O a E , alla curva oltre E , non è forse così brusca come nella figura.



444. Sotto questa forma, la teoria non rende conto del magnetismo residuo di cui si constata l'esistenza dove aver soppresso la forza magnetizzante. Per questo motivo ho creduto desiderabile esaminare i risultati che darebbe l'introduzione di una nuova ipotesi relativa alle condizioni nelle quali la posizione di equilibrio di una molecola può subire una modifica permanente.

Supponiamo che l'asse di una molecola magnetica possa ritornare alla sua posizione iniziale dopo la forza deviatrice ha cessato di agire finché l'angolo β è inferiore a β_0 , ma che, per una deviazione β superiore a β_0 , non possa più ritornare alla sua posizione precedente e conserva una deviazione $\beta - \beta_0$, che si può chiamare *scarto permanente della molecola*.

Non si deve considerare questa ipotesi sulla legge della deviazione molecolare come fondata su alcuna conoscenza esatta della struttura intima dei corpi; la si adotta, nella nostra ignoranza sulla stato reale delle cose, per aiutare l'immaginazione a seguire le speculazioni di Weber.

Sia

$$L = D \sin \beta_0 \tag{6.0.9}$$

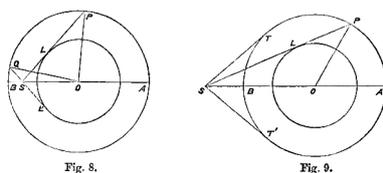
Se il momento della coppia che agisce su una molecola è inferiore a mL , non vi è deviazione permanente; ma, se è superiore a L , vi è un cambiamento permanente della posizione di equilibrio.

Per seguire le conseguenze di questa ipotesi, descriviamo una sfera di centro O e di raggio $OL = L$.

Finché X rimane inferiore a L , tutto avviene come nel caso esaminato; ma, dal momento che X supera L , inizia a prodursi una deviazione permanente di certe molecole.

⁴Vi deve essere qualche errore di svista nella formula data da Weber, come risultato di questa integrazione, per la quale non dà il cammino seguito. (Trans. Acad. Sax., t. I, p. 572, 1852; o Pogg. Ann., t. LXXXVII, p. 167, 1852). La sua formula è

$$I = mn \frac{X}{\sqrt{X^2 + D^2}} \frac{X^4 + \frac{7}{6} X^2 D^2 + \frac{2}{3} D^4}{X^4 + X^2 D^2 + D^4}$$



Prendiamo il caso della fig. 8, dove X è maggiore di L , ma più piccolo di D . Da S come vertice, tracciamo un cono tangente alla sfera L , che taglia in P e in Q la sfera. Se, nella sua posizione iniziale, l'asse di una molecola era compreso tra OA e OP o tra OB e OQ , è deviato di un angolo inferiore a β_0 , e non ha una deviazione permanente; ma, se l'asse della molecola si trovava inizialmente tra OP e OQ , una coppia, il cui momento è superiore a L , agisce su di essa e la devia nella posizione SP ; e, quando la forza deviante cessa di agire, non riprende la sua posizione iniziale, ma rimane in modo permanente nella direzione OP .

Poniamo

$$L = X \sin \theta_0$$

dove $\theta_0 = PSA$ o QSB ; tutte le molecole i cui assi avrebbero stati, nella prima ipotesi, inclinazioni θ comprese tra θ_0 e $\pi - \theta_0$, avranno l'inclinazione θ_0 finché agisce la forza X .

Pertanto, durante il tempo in cui agisce la forza X , le molecole i cui assi sono compresi all'interno di due falde del cono che ha θ_0 per semi angolo al vertice saranno disposte come nel primo caso; ma tutte le molecole i cui assi sarebbero, nella prima teoria, esterni alle falde del cono, subiranno una deviazione permanente, di modo che i loro assi formeranno una cappa chiusa attorno alla falda del cono che è ruotata verso A .

Quando X cresce, il numero di molecole che appartengono al cono descritto attorno a B decresce costantemente, e, quando X diviene uguale a D , tutte le molecole sono strappate dalla loro posizione di equilibrio e sono spinte nella frangia del cono che circonda A ; di modo che, quando X diviene maggiore di D , tutte le molecole fanno parte del cono che circonda A o della sua cappa.

Una volta soppressa la forza X , tutto torna al suo stato iniziale, nel caso in cui X è minore di L . Se X è compreso tra L e D , vi è attorno ad A un cono il cui angolo è

$$AOP = \theta_0 + \beta_0$$

e attorno a B un altro cono il cui angolo è

$$BOQ = \theta_0 - \beta_0$$

all'interno del quale gli assi delle molecole hanno una distribuzione uniforme. Ma tutte le molecole, i cui assi avevano inizialmente una direzione esterna a questi due coni, sono stati strappati dalla loro posizione iniziale, e formano una cappa attorno al cono che circonda A .

Se X è maggiore di D , il cono che circonda B scompare del tutto, e le molecole che lo formavano producono una cappa attorno ad A e sono inclinate dell'angolo $\theta_0 + \beta_0$.

445. Trattando questo caso allo stesso modo di prima⁵, troviamo, per l'intensità della magnetizzazione temporanea mentre la forza X agisce su un pezzo di ferro che si suppone non essere mai stato magnetizzato:

⁵I risultati indicati nel testo si possono ottenere, con una piccola eccezione, dalle operazioni date prima, la teoria modificata del § 441 enunciate come segue: l'asse di una molecola magnetica ritorna alla sua posizione iniziale quando la forza di deviazione cessa di agire, se è stata deviata di un angolo β più piccolo di β_0 ; ma, se la deviazione è superiore a β_0 , la forza che tende a impedire la deviazione è vinta e la molecola può essere deviata nella stessa direzione delle molecole la cui deviazione è β_0 ; e, quando la forza di deviazione cessa di agire, la molecola prende una direzione parallela a quella delle molecole la cui deviazione era β_0 . Questa direzione può essere detta lo *scarto permanente delle molecole*.

Nel caso in cui $X > L$ e $< D$, l'espressione I del momento magnetico è formata da due parti: la prima è dovuta alle molecole interne ai coni AOP, BOQ e si ottiene esattamente come quella del § 443, considerando

Per $X < L$,

$$I = \frac{2}{3}M \frac{X}{D}$$

per $X = L$

$$I = \frac{2}{3}M \frac{L}{D}$$

Quando X è compreso tra L e D

$$I = M \left\{ \frac{2X}{3D} + \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right) \left[\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{X^2}{D^2} - \frac{L^2}{D^2}} \right] \right\}$$

Quando $X = D$,

$$I = M \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Quando $X > D$,

$$I = M \left[\frac{1}{3} \frac{X}{D} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{D}{X} + \frac{(D^2 - L^2)^{\frac{3}{2}}}{6X^2D} - \frac{\sqrt{X^2 - L^2}}{6X^2D} (2X^2 - 3XD + L^2) \right]$$

Quando X è infinito $I = M$.

Quando X è minore di L , la magnetizzazione segue la prima legge ed è proporzionale alla forza magnetizzante. Dopo che X supera L , la magnetizzazione cresce più rapidamente, poiché le molecole iniziano a passare da un cono sull'altro; ma questo aumento rapido si interrompe presto, poiché il numero di molecole che formano il cono negativo diminuisce e infine la magnetizzazione raggiunge il suo valore limite M .

Se ammettiamo che i valori di L e di D sono diversi per le differenti molecole, otterremo risultati dove le diverse fasi della magnetizzazione non saranno così distintamente marcate.

La magnetizzazione residua I' , prodotta dalla forza magnetizzante X e osservata dopo che questa forza ha cessato di agire, varia come segue:

Per $X < L$, nessuna magnetizzazione residua;

i limiti di integrazione. Riferendoci alla fig. 8, troviamo, dall'enunciato della teoria precedente, che la seconda parte è

$$\frac{1}{2}mn \cos ASP \frac{\text{proiezione di } QP \text{ su } BA}{OP}$$

L'insieme delle due parti dà, dopo riduzione, il risultato enunciato nel testo.

Se $X > D$, l'integrale è ancora formato da due parti, di cui una deve essere presa sul cono AOP come la § 443. La seconda parte è (fig. 9)

$$\frac{1}{2}mn \cos ASP \frac{\text{proiezione di } BP \text{ su } BA}{OP}$$

In questo caso, il valore di I , dopo la riduzione, differisce da quelle che è dato nel testo per il terzo termine: abbiamo allora $-\frac{1}{6} \frac{D^2}{X^2}$ invece di $-\frac{1}{6} \frac{D}{X}$.

L'effetto di questo cambiamento sulla Tabella dei valori numerici dati nel testo sarà che, per $X = 6, 7, 8$ i valori corrispondenti di I saranno 889, 917, 930. Queste modifiche non cambiano il carattere generale della curva di magnetizzazione temporanea data nella fig. 10.

Il valore di I' , nel caso della fig. 8, è

$$\frac{1}{2}mn \left(\int_0^{AOP} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + \int_{AOQ}^{\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + \cos AOP \frac{\text{proiezione di } QP \text{ su } BA}{OP} \right)$$

Si troverà allo stesso modo il valore di I' nel caso della fig. 9.

Per X compreso tra L e D

$$I' = M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)$$

Quando $X = D$

$$I' = M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^2$$

Quando $X > D$

$$I' = \frac{1}{4}M \left(1 - \frac{L^2}{x^2} + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} \sqrt{1 - \frac{L^2}{x^2}}\right)^2$$

Quando X è infinito

$$I' = \frac{1}{4}M \left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right)^2$$

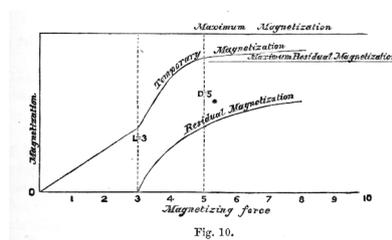
Se poniamo

$$M = 1000 \quad L = 3 \quad D = 5$$

troviamo i seguenti valori della magnetizzazione temporanea e residua:

Forza Magnetizzante X	Magnetizzazione temporanea I	Magnetizzazione residua I'
0	0	0
1	133	0
2	267	0
3	400	0
4	729	280
5	837	410
6	864	485
7	882	537
8	897	574
∞	1000	810

I risultati sono rappresentati sulla fig. 10.



La curva della magnetizzazione temporanea è dapprima un retta da $X = 0$ a $X = L$; poi cresce più rapidamente fino a $X = D$; e, al crescere di X , si avvicina al suo asintoto orizzontale.

La curva di magnetizzazione residua inizia per $X = L$, e tende verso un asintoto posto ad un'altezza uguale a $0,81M$.

Ci si deve ricordare che il magnetismo residuo calcolato si riferisce al caso in cui, dopo l'eliminazione della forza magnetizzante, non vi è più forza di smagnetizzazione dovuta alla

distribuzione del magnetismo sul corpo. I calcoli si applicano quindi al solo caso di corpi molto allungati magnetizzati longitudinalmente. Per corpi corti e spessi, il magnetismo residuo è diminuito dalla reazione del magnetismo libero, come se si facesse agire su di esso una forza magnetizzante di verso contrario.

446. Il valore scientifico di una tale teoria, dove si introducono tante ipotesi, dove si fanno intervenire tante costanti di cui si può disporre, non sarebbe quello di stimare unicamente la sua concordanza numerica con certe serie di esperienze. Se essa ha qualche interesse, è perché ci permette di immaginare ciò che avviene in un pezzo di ferro durante la magnetizzazione. Per mettere questa teoria alla prova la applicheremo al caso di un pezzo di ferro sottoposto dapprima a una forza magnetizzante X_0 e poi a una nuova forza magnetizzante X_1 .

Se la forza magnetizzante X_1 agisce nello stesso verso di X_0 , verso che chiameremo la direzione positiva, e se è minore di X_0 , essa non produrrà spostamento permanente delle molecole, e, quando cesserà di agire, la magnetizzazione residua sarà la stessa che aveva prodotto X_0 . Se X_1 è maggiore di X_0 , essa produrrà esattamente lo stesso effetto che se X_0 non avesse agito prima.

Ma supponiamo che X_1 agisca nella direzione negativa e che

$$X_0 = L \csc \theta_0 \quad X_1 = -L \csc \theta_1$$

Quando X_1 cresce numericamente, θ_1 diminuisce; le prime molecole sulle quali X_1 produrrà una deviazione permanente sono quelle che formano la cappa del cono attorno ad A ; queste molecole, quando non sono deviate, hanno un'inclinazione $\theta_0 + \beta_0$.

Quando $\theta_1 - \beta_0$ diviene inferiore a $\theta_0 + \beta_0$, la smagnetizzazione inizia. Poiché, in questo istante, $\theta_1 = \theta_0 + 2\beta_0$, la forza X necessaria per produrre la smagnetizzazione è inferiore alla forza X_0 che ha prodotto la magnetizzazione.

Se i valori di D e di L fossero gli stessi per tutte le molecole, per il più piccolo aumento di X_1 , tutta la cappa delle molecole i cui assi hanno l'inclinazione $\theta_0 + \beta_0$ sarà lanciata in un'altra posizione dove gli assi saranno inclinati di $\theta_1 + \beta_0$ sull'asse negativo OB .

Sebbene la smagnetizzazione non avvenga in un modo improvviso, essa è tuttavia molto rapida perché questo modo di spiegare i fatti vi trovi una conferma.

Supponiamo che dando alla forza inversa X_1 un valore opportuno si abbia esattamente smagnetizzato il pezzo di ferro.

Gli assi delle molecole non sono più disposti indifferentemente in tutte le direzioni, come in un pezzo di ferro che non è mai stato magnetizzato, ma formano tre gruppi.

1° All'interno di un cono il cui semiangolo al vertice è $\theta_1 - \beta_0$ e che circonda il polo positivo, gli assi delle molecole restano nella loro posizione iniziale.

2° Analogamente in un cono il cui semiangolo al vertice è $\theta_0 - \beta_0$, che circonda il polo negativo.

3° Le direzioni degli assi delle altre molecole formano una cappa conica circondante il polo negativo la cui inclinazione è $\theta_1 + \beta_0$.

Quando X_0 è maggiore di D , il secondo gruppo scompare. Quando X_1 è maggiore di D , anche il primo gruppo scompare.

Pertanto lo stato del ferro che appare smagnetizzato è diverso da quello del ferro che non lo è mai stato.

Per mostrare che è così, consideriamo l'effetto di una forza magnetizzante X_2 , agente nella direzione positiva o in quella negativa; il primo effetto permanente che produrrà tale forza sarà sulle molecole del terzo gruppo, i cui assi formano con l'asse negativo angoli $\theta_1 + \beta_0$.

Se la forza X_2 agisce nel verso negativo, essa comincia a produrre un effetto permanente non appena $\theta_2 + \beta_0$ diviene inferiore a $\theta_1 + \beta_0$, cioè quando X_2 diviene maggiore di X_1 . Se essa agisce nel verso positivo, comincia a magnetizzare di nuovo il ferro dal momento che $\theta_2 - \beta$ è inferiore a $\theta_1 + \beta_0$, cioè quando $\theta_2 = \theta_1 + 2\beta_0$ o quando X_2 è ancora assai inferiore a X_1 .

Dalla nostra ipotesi risulta quindi che:

Quando un pezzo di ferro è stato magnetizzato da una forza X_0 , la sua magnetizzazione può essere aumentata solo da una forza superiore a X_0 . Al contrario, una forza inversa inferiore a X_0 basta a diminuire la sua magnetizzazione.

Se il ferro è stato esattamente smagnetizzato dalla forza inversa X_1 , non può essere magnetizzata nel verso contrario se non da una forza superiore a X_1 ; ma una forza positiva inferiore a X_1 basta per cominciare a magnetizzare nuovamente il ferro nella direzione iniziale.

Questi risultati sono in accordo con le osservazioni di Ritchie⁶, Jacobi⁷, Marianini⁸ e Joule⁹.

Una esposizione molto completa delle relazioni che esistono tra la magnetizzazione del ferro e dell'acciaio e le forze magnetiche o le tensioni meccaniche è data da Wiedemann, nel suo *Galvanismus*. Da un confronto dettagliato degli effetti della magnetizzazione e di quelli della tensione, mostra che le nozioni di elasticità e di plasticità alle quali siamo portati dalle esperienze sulla torsione temporanea e permanente dei fili si applicano pure alla magnetizzazione temporanea e a quella permanente del ferro e dell'acciaio.

447. Matteucci¹⁰ ha riconosciuto che, se una barra di ferro duro è sottoposta a estensione mentre si fa agire su di essa una forza magnetizzante, la sua magnetizzazione temporanea aumenta. Questo risultato è stato confermato da Wertheim. Il magnetismo è diminuito dall'estensione per le barre di ferro dolce.

Il magnetismo permanente di una barra aumenta quando la si sottopone all'estensione e diminuisce quando la si comprime.

Pertanto, se un pezzo di ferro magnetizzato dapprima in una certa direzione è poi stirato in un'altra direzione, la direzione della magnetizzazione tende ad avvicinarsi alla direzione dello stiramento; e, se viene compresso, la direzione della magnetizzazione tende a divenire normale alla direzione della compressione.

Questo è quanto mostrano i risultati di un'esperienza di Wiedemann. Se si fa passare in un filo verticale una corrente dall'alto in basso e se, durante il passaggio di corrente o al suo cessare, si fa subire al filo una torsione a destra, l'estremità inferiore diviene un polo nord.

Qui la corrente dall'alto in basso magnetizza ogni parte del filo in una direzione tangenziale, così come indicano le lettere NS (fig. 11).

La torsione del filo a destra determina l'estensione della parte $ABCD$ (fig. 12), lungo la diagonale AC e la sua compressione lungo la diagonale BD . La direzione della magnetizzazione tende quindi ad avvicinarsi ad AC e ad allontanarsi da BD ; anche l'estremità inferiore diviene un polo nord e quella superiore un polo sud.

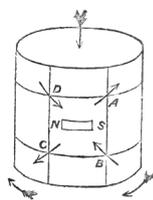


Fig. 11.

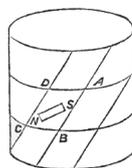


Fig. 12.

⁶ *Phil. Mag.*, 1833.

⁷ *Pogg. Ann.*, 1834.

⁸ *Annales de Chimie et de Physique*, 1846.

⁹ *Phil. Trans.*, 1855; p. 287.

¹⁰ *Annales de Chimie et de Physique*, 1858.

Effetto della magnetizzazione sulle dimensioni del magnete

448. Nel 1842, Joule¹¹ ha riconosciuto che una barra di ferro si allunga quando la si magnetizza facendo passare una corrente elettrica in una bobina che la circonda. Più tardi¹², ha mostrato, ponendo la barra di ferro in tubo di vetro pieno d'acqua, che il volume del ferro non aumenta per la magnetizzazione: ne concluse che le dimensioni trasversali diminuiscono.

Infine, ha fatto passare una corrente elettrica per l'asse di un tubo di ferro, e l'ha fatta ritornare esternamente al tubo, in modo da racchiuderlo in una sorta di solenoide magnetico la cui magnetizzazione era perpendicolare al suo asse e, in questo caso, ha trovato che la lunghezza dell'asse del tubo diminuiva.

Ho riconosciuto che un'asta di ferro sottoposta a una pressione longitudinale si allunga quando la si magnetizza; ma, se l'asta è sottoposta a una tensione longitudinale notevole, l'effetto della magnetizzazione è di accorciarla.

Questo è il filo per un filo di un quarto di pollice di diametro (0,635 *cm*) sottoposto a una tensione di oltre 600 libbre (224 *kg* circa).

Un filo di acciaio duro si accorcia sempre per la magnetizzazione, sottoposto sia a una tensione che a una pressione. Il cambiamento di lunghezza dura solo finché agisce la forza magnetizzante, e non si osserva variazione di lunghezza dovuta alla magnetizzazione permanente dell'acciaio.

Joule ha trovato che l'allungamento dei fili di ferro è circa proporzionale al quadrato della loro magnetizzazione effettiva, di modo che il primo effetto della corrente di smagnetizzazione è di accorciare il filo.

D'altra parte, ha trovato che l'accorciamento dei fili tesi e dell'acciaio varia proporzionalmente al prodotto della magnetizzazione e della corrente magnetizzante.

Wiedemann ha trovato che un filo verticale magnetizzato, con il polo sud in alto, e inviando una corrente dall'alto in basso nel filo, l'estremità inferiore, se è libera, si torce nel verso del movimento dell'ago di una bussola, così come visto in precedenza, o, in altri termini, che il filo si torce come una vite destrorsa, se la relazione tra la corrente longitudinale e la corrente di magnetizzazione è una relazione a destra.

In questo caso, la magnetizzazione dovuta all'azione della corrente sulla magnetizzazione precedentemente esistente è nel verso di una vite destrorsa circondante il filo. Questa torsione indicherebbe quindi che, quando il filo è magnetizzato, si allunga nel verso della magnetizzazione e si contrae nelle direzioni perpendicolari, in accordo con i risultati di Joule.

Per maggiori dettagli sulla teoria della magnetizzazione, si vedano i § 832-845.

¹¹ *Annales d'Électricité* de Sturgeon, t. VIII, p. 219.

¹² *Phil. Mag.*, 1847.

7 Misure magnetiche

449. Le principali misure magnetiche sono la determinazione dell'asse magnetico e del momento magnetico di un magnete, della direzione e della grandezza della forza magnetica in un punto dato.

Poiché queste misure si fanno vicino alla superficie della Terra, i magneti sono sempre sottoposto all'azione della gravità e a quella del magnetismo terrestre, e, siccome sono fatti di acciaio, la loro magnetizzazione è in parte permanente e in parte indotta. Il magnetismo permanente è modificato dai cambiamenti di temperatura, da un'induzione energica o da urti violenti; la magnetizzazione temporanea cambia con ogni variazione della forza magnetica esterna.

Il modo più comodo di osservare la forza che agisce su di un magnete consiste nel renderlo mobile liberamente attorno ad un asse verticale. È quanto avviene nelle comuni bussole, sospendendo il magnete in equilibrio su un perno verticale. Più la punta del perno è sottile, e più piccolo il momento d'attrito che contrasta l'azione della forza magnetica. Per osservazioni più precise, si sospende il magnete con un filo formato da una fibra di seta senza torsione, semplice o ripiegato parallelamente su se stesso un numero sufficiente di volte, ogni filo sopportante una frazione del peso il più uguale possibile. La forza di torsione di un tale filo è assai inferiore a quella di un filo di metallo della stessa resistenza, e la si può calcolare in funzione dell'azimut osservato del magnete, e ciò non vale per la forza dovuta all'attrito di un perno.

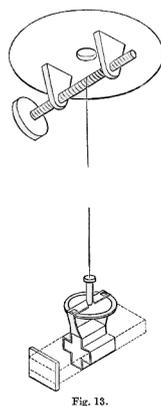
Si può alzare o abbassare il filo di sospensione agendo su una vite orizzontale che ruota in un dado fisso: il filo si arrotola nel filetto della vite, in modo da rimanere sempre nella stessa linea verticale mentre la vite gira.

Il filo di sospensione porta un piccolo cerchio graduato orizzontale, che si chiama cerchio di torsione, e una staffa munita di un indice che si può porre in coincidenza con una divisione a piacere del cerchio di torsione. La staffa è fatta in modo tale che vi si possa fissare il magnete, l'asse orizzontale e una delle sue facce ruotata verso l'alto.

Per determinare lo zero di torsione, si pone nella staffa un corpo non magnetico, dello stesso peso del magnete, e si osserva la posizione del cerchio di torsione una volta in equilibrio.

Il magnete stesso è un pezzo di acciaio temperato annerito. Secondo Gauss e Weber, la sua lunghezza deve essere uguale (fig. 13) almeno a otto volte la più grande dimensione trasversale. Ciò è necessario quando interessa soprattutto la fissità della direzione dell'asse magnetico nel magnete. Se si vogliono ottenere movimenti rapidi, il magnete può essere più corto; e anche, per osservare cambiamenti bruschi di forza magnetica, può essere vantaggioso impiegare una barra magnetizzata trasversalmente e avente la sua dimensione maggiore lungo la verticale¹.

¹Joule, *Proc. Phil. Soc. Manchester*, 29 novembre 1864.



450. Il magnete è provvisto di un dispositivo che permette di determinare la sua posizione angolare. Per le osservazioni comuni, si spuntano le sue estremità che si muovono al di sopra di un cerchio graduato, e si legge la loro posizione su questa graduazione ponendo l'occhio nel piano determinato dal filo di sospensione e la punta dell'ago.

Per osservazioni più precise, si fissa al magnete uno specchio piano, di modo che la normale allo specchio coincide, il più possibile, con l'asse di magnetizzazione. Questo è il metodo di Gauss e Weber.

Un altro metodo consiste nel fissare a una delle estremità del magnete una lente, e all'altra una scala incisa sul vetro, essendo la distanza tra la scala e la lente uguale alla distanza focale principale della lente. Serve che la retta che unisce lo zero della scala al centro ottico della lente coincida, il più possibile, con l'asse magnetico.

Siccome questi metodi ottici hanno una grande importanza in un grande numero di ricerche scientifiche per determinare la posizione angolare di un sistema sospeso, esamineremo, una volta per tutte, la teoria matematica.

Teoria del metodo dello specchio

Supporremo che lo strumento di cui si vuole determinare la posizione angolare possa ruotare attorno ad un asse verticale. Questo asse è in genere formato da un filo di sospensione, metallico o altro. Lo specchio deve essere esattamente piano, di modo che a una distanza di parecchi metri vi si possa vedere distintamente per riflessione una scala graduata in millimetri.

La normale al mezzo dello specchio deve passare per l'asse di sospensione ed essere rigorosamente orizzontale. Indicheremo questa normale con il nome di linea di collimazione dello strumento.

Avendo determinato approssimativamente la direzione media della linea di collimazione nelle esperienze che si devono fare, si installa, a una distanza opportuna, un cannocchiale davanti e un poco al di sotto dello specchio.

Questo cannocchiale si può muovere in un piano verticale: esso è puntato sul filo di sospensione, proprio al di sopra dello specchio, e si stabilisce sulla linea visuale un riferimento fisso, posto a una distanza orizzontale dall'obiettivo uguale al doppio della distanza tra l'obiettivo e lo specchio: se ciò è possibile, si dispone lo strumento in modo che questo riferimento si trovi su un muro o su qualche altro oggetto fisso. Per vedere insieme nel cannocchiale il riferimento e il filo di sospensione, si può porre sull'obiettivo un opercolo presentante una fenditura lungo un diametro verticale, che si toglie per le altre osservazioni. Si regola allora il cannocchiale in modo da vedere distintamente il riferimento in coincidenza con il reticolo verticale, poi si pone un filo a piombo davanti l'obiettivo, molto vicino al suo centro ottico, in modo che penda più in basso del cannocchiale. Al di sopra di questo, e proprio dietro il filo a piombo, si installa una scala graduata in parti uguali, in modo che sia tagliata nella sua metà, e ad angolo retto, da un piano

passante per il riferimento, il filo di sospensione, e il filo a piombo. La somma delle altezze della scala e dell'obiettivo al di sopra del suolo deve essere uguale al doppio dell'altezza dello specchio. Se la divisione della scala dove passa il filo a piombo è vista in coincidenza con il reticolo del cannocchiale, la linea di collimazione dello specchio è compresa nel piano di riferimento e del centro ottico dell'obiettivo. Se il reticolo coincide con un'altra divisione della scala, ecco come si trova la posizione angolare della linea di collimazione.

Prendiamo per piano orizzontale quello del foglio, e proiettiamo i diversi punti su questo piano. Siano O il centro dell'obiettivo del cannocchiale e P il riferimento fisso; P e il reticolo sono fuochi coniugati rispetto all'obiettivo; sia M il punto dove OP taglia il piano dello specchio, e sia MN la normale allo specchio. $OMN = \theta$ è l'angolo che la linea di collimazione forma con il piano fisso. Sia MS una retta nel piano di OM e di MN , tale che NMS sia uguale a OMN : S sarà la parte della scala che si vedrà per riflessione nello specchio in coincidenza con il reticolo. Ma, poiché MN è orizzontale, gli angoli proiettati OMN e NMS della fig. 14 sono uguali e $OMS = 2\theta$. Pertanto $OS = OM \tan 2\theta$

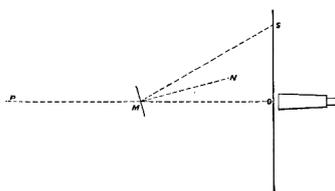


Fig. 14.

Dobbiamo quindi misurare OM in divisioni della scala; se s_0 è la divisione della scala che coincide con il filo a piombo, e s quello che si è osservato,

$$s - s_0 = OM \tan 2\theta$$

da cui si può ricavare θ . Quando si misura OM , bisogna ricordare che se lo specchio è in vetro argentato nella parte posteriore, l'immagine virtuale della superficie riflettente è dietro la faccia anteriore del vetro a una distanza uguale a $\frac{tt}{\mu}$, dove t è lo spessore del vetro e μ il suo indice di rifrazione.

Dobbiamo pure ricordare che, se la linea di sospensione non passa per il punto di riflessione, posizione di M cambia con θ . Così è bene, quando si può, far coincidere il centro dello specchio con la linea di sospensione.

È pure utile, soprattutto se si devono osservare dei movimenti angolari notevoli, dare alla scala la forma di un cilindro circolare cavo, avente per asse la linea di sospensione. Gli angoli si osservano subito in misura circolare, senza ricorrere a una delle tabelle delle tangenti. la scala deve essere disposta con cura perché l'asse del cilindro coincida con il filo di sospensione. I numeri scritti sulla scala devono sempre scorrere nello stesso verso, da un capo all'altro, per evitare le letture negative. la fig. 15 rappresenta la parte centrale di una scala destinata a servire con uno specchio e un cannocchiale che inverte le immagini.

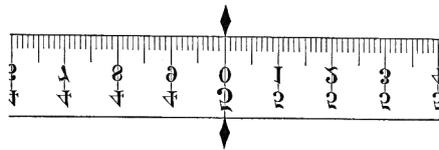


Fig. 15.

Questo metodo è il migliore quando i movimenti da osservare sono lenti. L'osservatore, posto davanti al cannocchiale, vede l'immagine della scala spostarsi verso destra o verso sinistra

sfilando davanti al reticolo. Con un orologio a fianco, può annotare l'istante del passaggio di una divisione data dalla scala, oppure la divisione che passa a un'istante dato segnato da un battito dell'orologio, o ancora i limiti estremi di ogni oscillazione.

Se il movimento è rapido, diviene impossibile leggere le divisioni della scala, tranne nel momento di riposo che regna la fine di un'oscillazione. Si può porre in una divisione data della scala un segno ben visibile e annotare l'istante del passaggio da questo segno.

Se lo strumento è molto leggero e le forze molto variabili, il movimento è così rapido e brusco da rendere impossibili le osservazioni al cannocchiale. In questo caso, l'osservatore guarda direttamente la scala e osserva l'immagine di un filo proiettato per mezzo di una lampada.

È chiaro che, poiché l'immagine della scala riflessa dallo specchio e rifratta dall'obiettivo coincide con il reticolo, l'immagine di quest'ultimo sufficientemente illuminata coinciderà con la scala. Per osservare in questo modo, si oscura la camera e si proiettano sul reticolo i raggi concentrati di una lampada nella direzione dell'obiettivo. Si vede sulla scala una macchia luminosa brillante attraversata dall'ombra del filo. Si può seguire con l'occhio questo movimento, segnare e leggere poi con comodo le divisioni della scala. Se si desidera annotare il momento del passaggio della macchia in un punto dato della scala, vi si può posizionare uno spillo o un pezzo di filo metallico brillante, che getterà un lampo di luce nel momento del passaggio.

Se si sostituisce la macchia e il filo che la attraversa con un diaframma con un piccolo foro, l'immagine si riduce a un piccolo punto luminoso che si muove a destra e a sinistra sulla scala; e, se si sostituisce la scala con un cilindro che un movimento a orologeria fa ruotare attorno a un asse orizzontale, e che si ricopre con carta fotografica, il punto luminoso traccia una curva che si può più tardi rendere visibile. Ogni ascissa della curva corrisponde a un istante determinato, e l'ordinata indica la posizione angolare dello specchio in questo istante. Così si è organizzato a Kew e in altri osservatori un sistema di registrazione continuo di tutti gli elementi del magnetismo terrestre.

In certi casi, si ricorre al cannocchiale: un filo verticale è illuminato da una lampada posta dietro di lui, e lo specchio, di forma concava, forma sulla scala l'immagine del filo, che si stacca come una linea nera su una macchia luminosa.

451. Nello strumento portatile le Kew, il magnete è a forma di tubo; a una delle estremità vi è una lente, all'altra una scala tracciata sul vetro, posta in modo da essere nel fuoco principale della lente. La luce inviata da dietro la scala attraversa la lente ed è poi ricevuta in un cannocchiale.

Poiché la scala è al fuoco principale della lente, i raggi emessi da una qualunque delle divisioni escono paralleli; e, se il cannocchiale è stato regolato per i corpi celesti, si vede la scala in coincidenza ottica con i fili del reticolo. Se una divisione data della scala coincide con l'incrocio dei fili del reticolo, la linea che unisce questa divisione al centro ottico della lente deve essere parallela alla linea di collimazione del cannocchiale. Fissando il magnete e spostando il cannocchiale, si può determinare il valore angolare delle divisioni della scala; e poi, quando il magnete è sospeso e la posizione del cannocchiale è nota, si può, in ogni istante, determinare la posizione del magnete leggendo la divisione della scala che coincide con l'incrocio dei fili.

Il cannocchiale è supportato da un braccio che ruota attorno a un asse posto sulla stessa linea del filo di sospensione. La posizione del cannocchiale si legge per mezzo del nonio sul cerchio di azimut dello strumento.

Questa disposizione è comoda per un piccolo magnetometro portatile, dove tutto lo strumento appoggia su un treppiede, e dove le oscillazioni dovute alle perturbazioni esterne si spengono rapidamente.

Determinazione della direzione dell'asse di un magnete e della direzione del magnetismo terrestre

452. Sia un sistema di assi tracciato in un magnete, essendo l'asse z parallelo alla lunghezza e gli assi x, y perpendicolari alle facce della barra a forma di parallelepipedo.

Siano l, m, n e λ, μ, ν gli angoli che formano con gli assi l'asse magnetico e la linea di collimazione.

Siano M il momento magnetico del magnete, H la componente orizzontale del magnetismo terrestre, Z la sua componente verticale e δ l'azimut nel quale agisce H , essendo questo azimut contato da nord verso ovest.

Sia ζ l'azimut osservato della linea di collimazione; siano α l'azimut della staffa, β la lettura dell'indice del cerchio di torsione: $\alpha - \beta$ è l'azimut dell'estremità inferiore del filo di sospensione.

Sia γ il valore di $\alpha - \beta$, quando non vi è torsione: il momento della forza di torsione che tende a diminuire α è

$$\tau (\alpha - \beta - \gamma)$$

dove τ è un coefficiente di torsione dipendente dalla natura del filo.

Per determinare λ , fissiamo la staffa in modo che y sia verticale e diretto verso l'alto; che z sia diretto verso il nord e x verso ovest, e osserviamo l'azimut ζ della linea di collimazione. Togliamo allora il magnete, facciamolo ruotare di un angolo π attorno all'asse z , e mettiamolo in questa nuova posizione, poi osserviamo l'azimut ζ' della linea di collimazione, quando y è diretto verso il basso e x verso est,

$$\zeta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \lambda \quad (7.0.1)$$

$$\zeta' = \alpha - \frac{\pi}{2} + \lambda \quad (7.0.2)$$

da cui

$$\lambda = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\zeta' - \zeta) \quad (7.0.3)$$

Agganciamo ora la staffa al filo di sospensione e mettiamo il magnete, avendo cura che y sia verticale e ruotato verso l'alto: il momento della forza che tende ad aumentare α è

$$MH \sin m \sin \left(\delta - \alpha - \frac{\pi}{2} + l \right) - \tau (\alpha - \beta - \gamma) \quad (7.0.4)$$

Ma se ζ è l'azimut osservato della linea di collimazione

$$\zeta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \lambda \quad (7.0.5)$$

così che la forza può essere scritta

$$MH \sin m \sin (\delta - \zeta + l - \lambda) - \tau \left(\zeta + \lambda - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma \right) \quad (7.0.6)$$

Quando il dispositivo è in equilibrio, questa quantità è nulla per un certo valore di ζ .

Se lo strumento non giunge mai a riposo e se lo si deve osservare durante le oscillazioni, si può calcolare il valore di ζ che corrisponderebbe alla posizione di equilibrio con un metodo che sarà descritto al § 735.

Se la forza di torsione è piccola rispetto al momento della forza magnetica, si può mettere $\delta - \zeta + l - \lambda$ al posto del seno di questo angolo.

Osservando i valori di ζ_1 e ζ_2 di ζ che corrispondono a due diverse letture β_1 e β_2 del cerchio di torsione, si ha

$$MH \sin m \sin (\zeta_1 - \zeta_2) = \tau (\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2) \quad (7.0.7)$$

o, se poniamo

$$\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2} = \tau'$$

allora

$$\tau = MH \sin m\tau' \quad (7.0.8)$$

e la (7-6) diviene, dividendo per $MH \sin m$,

$$\delta - \zeta + l - \lambda - \tau' \left(\zeta + \lambda - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma \right) = 0 \quad (7.0.9)$$

Se invertiamo il magnete e regoliamo lo strumento in modo che y sia ruotato verso il basso e rigorosamente verticale, se ζ' è il nuovo valore dell'azimut e δ' quella della declinazione corrispondente,

$$\delta' - \zeta' + l - \lambda - \tau' \left(\zeta' + \lambda - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma \right) = 0 \quad (7.0.10)$$

da cui

$$\frac{\delta - \delta'}{2} = \frac{1}{2} (\zeta + \zeta') + \frac{1}{2} \tau' [\zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma)] \quad (7.0.11)$$

Si regola allora la posizione del cerchio di torsione in modo che il coefficiente di τ' sia il più vicino possibile a zero. Per questo, bisogna determinare il valore γ che assume $\alpha - \beta$ in assenza di torsione. Lo si può fare mettendo nella staffa una barra non magnetica dello stesso peso del magnete e determinando $\alpha - \beta$ quando questa barra è in equilibrio. Siccome τ' è piccolo, non è richiesta una grande precisione. Un altro metodo consiste nell'impiegare una barra di torsione, dello stesso peso del magnete e contenente internamente un magnete molto piccolo il cui momento magnetico è $\frac{1}{n}$ del momento del magnete principale. Poiché τ rimane lo stesso, τ' diverrà $n\tau'$, e, se ζ_1 e ζ'_1 sono i valori dei ζ trovati con la barra di torsione

$$\delta = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta'_1) + \frac{1}{2} n\tau' [\zeta_1 + \zeta'_1 - 2(\beta + \gamma)] \quad (7.0.12)$$

Sottraendo questa equazione dalla (7-11)

$$2(n-1)(\beta + \gamma) = \left(n + \frac{1}{\tau'}\right) (\zeta_1 + \zeta'_1) - \left(1 + \frac{1}{\tau'}\right) (\zeta + \zeta') \quad (7.0.13)$$

Avendo trovato il valore di $\beta + \gamma$ in questo modo, β , la lettura del cerchio di torsione, finché, nella posizione ordinaria dello strumento

$$\zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma) = 0 \quad (7.0.14)$$

sia, per quanto possibile, uguale a zero.

Allora, poiché τ' è una quantità numerica molto piccola così come il suo coefficiente, il valore del secondo termine dell'espressione δ non varia molto, per piccoli errori sui valori di τ' e di γ che sono le quantità meno esattamente conosciute.

In questo modo, il valore della declinazione magnetica δ si può ottenere con una precisione molto grande, alla condizione che essa sia rimasta costante durante tutta la durata dell'esperienza e che, di conseguenza, si possa prendere $\delta' = \delta$.

Ma, se si vuole raggiungere una grande precisione, è necessario tener conto della variazione di δ nel corso dell'esperienza. A tale scopo, negli stessi istanti in cui si osservano i diversi valori di ζ , si osserva un altro magnete sospeso; e, se η e η' sono gli azimut osservati del secondo magnete che corrispondono a ζ e a ζ' , e se δ e δ' sono i valori corrispondenti di δ , si ha

$$\delta' - \delta = \eta' - \eta \quad (7.0.15)$$

Pertanto, per trovare il valore di δ , dobbiamo aggiungere alla (7-11) una correzione

$$\frac{1}{2}(\eta' - \eta)$$

La declinazione è quindi, nell'istante della prima osservazione

$$\delta = \frac{1}{2}(\zeta - \zeta' + \eta' - \eta) + \frac{1}{2}\tau'(\zeta + \zeta' - 2\beta - 2\gamma) \quad (7.0.16)$$

Per trovare la direzione dell'asse magnetico all'interno del magnete, si sottrae la (7-10) dalla (7-9) e si aggiunge la (7-15)

$$l = \lambda + \frac{1}{2}(\zeta - \zeta') - \frac{1}{2}(\eta' - \eta) + \frac{1}{2}\tau'(\zeta - \zeta' + 2\lambda - \pi) \quad (7.0.17)$$

Ripetendo l'esperienza con la barra sulle due altre facce, in modo che l'asse x sia diretto verticalmente verso l'alto e verso il basso, si può trovare il valore di m . Se l'asse di collimazione può essere regolato, lo si dovrà far coincidere, il più esattamente possibile, con l'asse magnetico del magnete, in modo da ridurre, il più possibile, l'errore dovuto all'inesatta inversione del magnete².

Misura delle forze magnetiche

453. Le più importanti misure di forze magnetiche sono la determinazione del momento magnetico M di un magnete e quella dell'intensità della componente orizzontale H del magnetismo terrestre. Le si effettua in genere combinando i risultati di due esperienze che danno, l'una rispetto all'altra, il prodotto di queste due quantità.

L'intensità della forza magnetica dovuta a un magnete infinitamente piccolo di momento magnetico M , in un punto posto a una distanza r dal centro del magnete, nella direzione positiva dell'asse del magnete, è

$$R = 2\frac{M}{r^3} \quad (7.0.18)$$

ed è diretta lungo r . Se il magnete è di dimensioni finite, ma di forma sferica e magnetizzato uniformemente nella direzione del suo asse, la forza è sempre rappresentata dalla stessa formula. Se il magnete è una barra solenoidale di lunghezza $2L$,

$$R = 2\frac{M}{r^3} \left(1 + 2\frac{L^2}{r^2} + 3\frac{L^4}{r^4} + \dots \right) \quad (7.0.19)$$

E per un magnete qualsiasi, purché tutte le sue altre dimensioni siano piccole rispetto a r ,

$$R = 2\frac{M}{r^3} \left(1 + A_1\frac{1}{r} + A_2\frac{1}{r^2} + \dots \right) \quad (7.0.20)$$

dove A_1, A_2, \dots sono coefficienti dipendenti dalla distribuzione della magnetizzazione sulla barra.

Sia H l'intensità della componente orizzontale del magnetismo terrestre in un posto qualunque: H è diretta verso il nord magnetico. Sia r misurato verso l'ovest magnetico: le forze magnetiche che agiscono all'estremità di r sono H verso nord e r verso ovest, e la forza risultante forma con il meridiano magnetico un angolo θ contato verso ovest e tale che

$$R = H \tan \theta \quad (7.0.21)$$

Di conseguenza, per determinare $\frac{H}{R}$, si procede nel modo seguente:

²Si veda un articolo su *Imperfect Inversion* di W. Swan. *Trans. R. S. Edin.*, vol. XXI (1885), p. 349.

Una volta determinata la direzione del nord magnetico, un magnete le cui dimensioni non devono essere troppo grandi è sospeso come nelle esperienze precedenti. Il magnete di deviazione M è posto nello stesso piano orizzontale del magnete sospeso, nella direzione dell'est magnetico, di modo che il suo centro sia a una distanza r da quello del magnete sospeso.

Si regola con cura l'asse di M , in modo che sia orizzontale e nella direzione di r .

Il magnete sospeso è osservato prima che M sia stato portato vicino, e dopo che è stato posizionato. Se θ è la deviazione osservata, si ha, dalla formula approssimata (7-18),

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} \tan \theta \quad (7.0.22)$$

o, se usiamo la (7-20),

$$\frac{1}{2} \frac{H}{M} r^3 \tan \theta = 1 + A_1 \frac{1}{r} + A_2 \frac{1}{r^2} + \dots \quad (7.0.23)$$

Dobbiamo qui ricordare che si può misurare con una grande precisione la deviazione θ , ma che la distanza r tra i centri dei magneti è una quantità che non potrà essere determinata con esattezza, a meno che i magneti non siano fissi e che i loro centri non definiti da riferimenti.

Ecco come superare questa difficoltà:

Essendo posto il magnete M su una scala graduata che si estende da est a ovest, da una parte all'altra del magnete sospeso, si prende per centro il punto posto a uguali distanze dalle sue estremità, si segna questo punto sul magnete, e si osserva la sua posizione sulla scala; oppure, si osservano le posizioni delle estremità e se ne prende la media aritmetica. Chiamiamola s_1 e sia s_0 il punto dove il prolungamento del filo di sospensione del magnete sospeso incontrerà la scala. Allora $r_1 = s_1 - s_0$; si conosce esattamente s_1 e pressapoco s_0 . Sia θ_1 la deviazione osservata per questa posizione di M .

Invertiamo ora M , cioè, poniamolo sulla scala scambiando le posizioni delle sue estremità; r_1 resterà lo stesso, ma M, A_1, A_2, \dots cambieranno di segno, e, se θ_2 è la deviazione,

$$-\frac{1}{2} \frac{H}{M} r_1^3 \tan \theta_2 = 1 - \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_1^2} - \dots \quad (7.0.24)$$

Prendiamo la media aritmetica tra le (7-22) e (7-23),

$$\frac{1}{4} \frac{H}{M} r_1^3 (\tan \theta_1 - \tan \theta_2) = 1 + \frac{A_2}{r_1^2} + \frac{A_4}{r_1^4} + \dots \quad (7.0.25)$$

Mettiamo ora M ad ovest del magnete sospeso, essendo il suo centro nel punto segnato sulla scala $2s_0 - s_1$. Siano θ_2 e θ_4 le deviazioni quando l'asse è nella prima o nella seconda posizione; allora, come in precedenza,

$$\frac{1}{4} \frac{H}{M} r_2^3 (\tan \theta_3 - \tan \theta_4) = 1 + \frac{A_2}{r_2^2} + \frac{A_4}{r_2^4} + \dots \quad (7.0.26)$$

Supponiamo che la posizione reale del centro del magnete sospeso sia, non più s_0 , ma $s_0 + \sigma$; allora

$$r_1 = r - \sigma \quad r_2 = r + \sigma \quad (7.0.27)$$

e

$$\frac{1}{2} (r_1^n + r_2^n) = r^n \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\sigma^2}{r^2} + \dots \right) \quad (7.0.28)$$

e poiché si può trascurare $\frac{\sigma^2}{r^2}$ quando le misure sono fatte con cura, siamo sicuri che si può prendere per r^n la media aritmetica di r_1^n e di r_2^n ,

Prendendo quindi la media aritmetica tra (7-25) e (7-26)

$$\frac{1}{8} \frac{H}{M} r^3 (\tan \theta_1 - \tan \theta_2 + \tan \theta_3 - \tan \theta_4) = 1 + A_2 \frac{1}{r^2} + \dots \quad (7.0.29)$$

o, ponendo

$$\frac{1}{4} (\tan \theta_1 - \tan \theta_2 + \tan \theta_3 - \tan \theta_4) = D \quad (7.0.30)$$

$$\frac{1}{2} \frac{H}{M} D r^3 = 1 + A_2 \frac{1}{r^2} + \dots$$

454. Possiamo ora considerare D e r come suscettibili di una misura esatta.

La quantità A_2 non può in alcun caso essere superiore a $2L^2$, essendo L la semi lunghezza del magnete; se quindi r è grande rispetto a L , si può trascurare il termine in A_2 e determinare di seguito il rapporto tra H e M . Tuttavia non possiamo ammettere che A_2 è uguale a $2L^2$; poiché può essere più piccolo: può anche essere negativo per un magnete le cui dimensioni maggiori sono trasversali all'asse. Il termine in A_4 e quelli di ordine superiore possono essere trascurati senza inconvenienti.

Per eliminare A_2 , si ripete l'esperienza impiegando distanze r_1, r_2, r_3, \dots ; siano D_1, D_2, D_3, \dots i valori di D

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2M}{H} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{A_2}{r_1^5} \right) \\ D_2 &= \frac{2M}{H} \left(\frac{1}{r_2^3} + \frac{A_2}{r_2^5} \right) \\ &\dots \end{aligned}$$

Supponiamo uguali gli errori probabili di queste equazioni, ciò che avviene se essi dipendono solo dalla determinazione di D , senza che si abbia incertezza sul valore di r ; conformemente alla regola generale data nella teoria della combinazione delle misure approssimate, quando si suppone l'errore probabile lo stesso per tutte le equazioni, moltiplichiamo ogni equazione per r^{-3} e sommiamo i risultati, poi moltiplichiamo ogni equazione per r^{-5} e sommiamo i risultati: otteniamo così due nuove equazioni.

Poniamo

$$\sum (Dr^{-3}) \text{ per } D_1 r_1^{-3} + D_2 r_2^{-3} + D_3 r_3^{-3} + \dots$$

e usiamo espressioni analoghe per le somme degli altri gruppi di simboli; le due equazioni risultanti si possono scrivere

$$\sum (Dr^{-3}) = \frac{2M}{H} \left[\sum (r^{-6}) + A_2 \sum (r^{-8}) \right]$$

$$\sum (Dr^{-5}) = \frac{2M}{H} \left[\sum (r^{-8}) + A_2 \sum (r^{-10}) \right]$$

da cui

$$\frac{2M}{H} \left\{ \sum (r^{-6}) \sum (r^{-10}) - \left[\sum (r^{-8}) \right]^2 \right\} = \sum (Dr^{-3}) \sum (r^{-10}) - \sum (Dr^{-5}) \sum (r^{-8})$$

e

$$A_2 \left[\sum (Dr^{-3}) \sum (r^{-10}) - \sum (Dr^{-5}) \sum (r^{-8}) \right] = \sum (Dr^{-5}) \sum (r^{-6}) - \sum (Dr^{-3}) \sum (r^{-8})$$

Il valore di A_2 tratto da queste equazioni deve essere inferiore alla metà del quadrato della lunghezza del magnete M . Se così non è, possiamo sospettare qualche errore nelle misure. Questo metodo di osservazione e di riduzione è stato dato da Gauss nel *First Report of the Magnetic Association*.

Quando l'osservatore può fare solo due serie di esperienze, alle distanze r_1 e r_2 , i valori di $\frac{2M}{H}$ e di A_2 , ricavati da queste esperienze, sono i seguenti:

$$Q = \frac{2M}{H} = \frac{D_1 r_1^5 - D_2 r_2^5}{r_1^2 - r_2^2} \quad A_2 = \frac{D_2 r_2^3 - D_1 r_1^3}{r_1^2 - r_2^2} r_1^2 r_2^2$$

Se δD_1 e δD_2 sono gli errori che inficiano le deviazioni osservate D_1 e D_2 , l'errore del risultato calcolato Q sarà

$$\delta D = \frac{r_1^5 \delta D_1 - r_2^5 \delta D_2}{r_1^2 - r_2^2}$$

Se supponiamo gli errori δD_1 e δD_2 indipendenti e se ammettiamo δD come errore probabile su ognuno di essi, il valore probabile δQ dell'errore sul valore calcolato di Q sarà dato da

$$(\delta Q)^2 = \frac{r_1^{10} + r_2^{10}}{(r_1^2 - r_2^2)^2} (\delta D)^2$$

Se supponiamo data una di queste distanze, la più piccola per esempio, si potrà determinare la maggiore in modo che δQ sia minimo. Questa condizione porta a una equazione di quinto grado in r_1^2 , che ha una sola radice reale maggiore di r_2^2 ; si trova così che il miglior valore di r_1 è $1,3189r_2^3$.

Se si prende una sola osservazione, la distanza che conviene di più è quella per la quale

$$\frac{\delta D}{D} = \sqrt{3} \frac{\delta r}{r}$$

dove δD è l'errore probabile su una misura di deviazione, e δr l'errore probabile su una misura di lunghezza.

Metodo dei seni

455. Il metodo che abbiamo descritto può essere detto *metodo delle tangenti*, poiché la forza magnetica è misurata attraverso la tangente della deviazione.

Se, invece di contare la linea r_1 verso est o verso ovest, si regola la sua direzione fino ad essere perpendicolare all'asse del magnete deviato, R è lo stesso di prima; ma, affinché il magnete sospeso possa restare perpendicolare a r , la componente della forza H nella direzione di r deve essere uguale e opposta a R . Se quindi θ è la deviazione, $R = H \sin \theta$.

Questo è detto *metodo dei seni*; lo si può applicare solo quando R è minore di H .

Questo è il metodo che si impiega nello strumento portatile di Kew. Il magnete mobile è sospeso a una parte dello strumento che ruota con il cannocchiale e il braccio che porta il magnete di deviazione, e la rotazione del tutto si misura sul cerchio di azimut. Si comincia col regolare lo strumento in modo che l'asse del cannocchiale coincida con la posizione media della linea di collimazione del magnete nella posizione di riposo. Se il magnete oscilla, l'azimut reale del nord magnetico si ottiene osservando le estremità delle oscillazioni della scala trasparente, e apportando la correzione voluta sulla lettura del cerchio azimutale.

Poi il magnete di deviazione è posto su un'asta diritta passante per l'asse dello strumento mobile perpendicolarmente all'asse del cannocchiale, e regolato in modo che il suo asse sia su una retta passante per il centro del magnete sospeso.

Si sposta allora l'insieme dello strumento mobile finché la linea di collimazione del magnete sospeso coincide nuovamente con l'asse del cannocchiale, e, se necessario, si corregge la nuova lettura di azimut tramite letture della scala alle estremità di una oscillazione.

La differenza degli azimut corretti dà la deviazione; dopo di che si procede come nel metodo delle tangenti, salvo che nell'espressione di D si mette $\sin \theta$ invece di $\tan \theta$.

³Si veda Airy, *Magnetism*.

In questo metodo, non vi è correzione per la torsione del filo di sospensione, poiché le posizioni relative del filo, del cannocchiale e del magnete sono le stesse in tutte le osservazioni.

Inoltre, gli assi dei due magneti rimangono sempre perpendicolari tra loro, ciò che permette di fare più esattamente la correzione della lunghezza.

456. Avendo così misurato il rapporto del momento del magnete di deviazione rispetto alla componente orizzontale del magnetismo terrestre, dobbiamo ora trovare il momento della coppia per la quale il magnetismo terrestre tende a far ruotare lo stesso magnete, quando il suo asse è deviato dal meridiano magnetico.

Vi sono due metodi per fare questa misura: il metodo dinamico, dove si osserva la durata delle oscillazioni del magnete sottoposto all'azione del magnetismo terrestre, e il metodo statico, dove si mantiene il magnete in equilibrio stabile per l'azione simultanea di una coppia misurabile e della forza magnetica.

Il metodo dinamico richiede strumenti più semplici ed è più esatto per misure assolute; ma richiede un tempo notevole. Il metodo statico permette una misura quasi istantanea, ciò che lo rende comodo per seguire i cambiamenti di intensità del magnetismo terrestre; ma richiede strumenti più sensibili e non è così esatto per le misure assolute.

Metodo delle oscillazioni

Il magnete è sospeso in modo che il suo asse magnetico sia orizzontale, e gli si imprimono delle oscillazioni di piccola ampiezza. Si osservano queste oscillazioni con uno dei metodi già descritti.

Si prende sulla scala il punto corrispondente a metà oscillazione e si osserva l'istante del passaggio in questo punto della scala nel verso positivo. Se passa un molto tempo prima che il magnete ripassi in questo punto, si annota l'istante del suo passaggio nel verso negativo, e si continua così finché si sono osservati $n + 1$ passaggi positivi e n passaggi negativi. Se le oscillazioni sono troppo rapide perché si possano osservare tutti i passaggi successivi, si osservano i passaggi di tre in tre, o di cinque in cinque, avendo cura che i passaggi osservati siano alternativamente positivi e negativi.

Siano $T_1, T_2, \dots, T_{2n+1}$ gli istanti osservati dei passaggi; se poniamo

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}T_1 + T_3 + T_5 + \dots + T_{2n-1} + \frac{1}{2}T_{2n+1} \right) = T_{n+1}$$

$$\frac{1}{n} \left(T_2 + T_4 + \dots + \frac{1}{2}T_{2n} \right) = T'_{n+1}$$

T_{n+1} è il momento medio dei passaggi positivi e si deve accordare con T'_{n+1} , momento medio dei passaggi negativi, se il punto è stato ben scelto. È la media di questi risultati che si prende come tempo medio del passaggio nel punto di mezzo.

Dopo che si è verificato un gran numero di oscillazioni, ma prima che le oscillazioni abbiano cessato di essere distinte e regolari, l'osservatore fa una nuova serie di osservazioni, da cui deduce il tempo medio del passaggio nel punto di mezzo in questa seconda serie.

Calcolando il periodo di oscillazione per mezzo di una o dell'altra serie di osservazioni, si deve poter essere sicuri del numero di oscillazioni complete che sono state effettuate nell'intervallo di tempi compreso tra i passaggi medi delle due serie; e, dividendo questo intervallo per il numero delle oscillazioni, si otterrà la durata media delle oscillazioni.

La durata di oscillazione osservata deve allora essere ridotta alla durata delle oscillazioni infinitamente piccole con una formula dello stesso tipo di quella che si impiega nelle osservazioni del pendolo; se si trova che l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce rapidamente, vi è ancora un'altra correzione da fare per la resistenza (si veda § 740). D'altra parte queste correzioni sono molto piccole quando il magnete è sospeso con un filo di seta e quando gli archi delle oscillazioni sono solo di qualche grado.

L'equazione del movimento del magnete è

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + MH \sin \theta + MH\tau'(\theta - \gamma) = 0$$

dove θ è l'angolo compreso tra l'asse magnetico e la direzione della forza H ; A il momento di inerzia del magnete e dello strumento di sospensione; M il momento magnetico del magnete; H l'intensità della forza magnetico orizzontale, e $MH\tau'$ il coefficiente di torsione; τ' è determinato come al § 452; è una quantità molto piccola.

Il valore di θ corrispondente all'equilibrio è

$$\theta_0 = \frac{\tau'\gamma}{1 + \tau'}$$

un angolo molto piccolo e una soluzione dell'equazione, per piccoli valori dell'ampiezza, è

$$\theta = C \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right) + \theta_0$$

essendo T il periodo, C l'ampiezza, con la relazione

$$T^2 = \frac{4}{MH} \frac{\pi^2 A}{(1 + \tau')}$$

da cui ricaviamo il valore di MH

$$MH = \frac{4\pi^2 A}{T^2 (1 + \tau')}$$

Qui T è la durata di una oscillazione completa, determinata dall'esperienza. Il momento di inerzia A del magnete si ottiene, una volta per tutte, pesando e misurando il magnete se è di forma regolare, o confrontandolo con un metodo dinamico con un corpo il cui momento d'inerzia è noto.

Combinando questo valore di MH con quello di $\frac{M}{H}$ ottenuto in precedenza, otteniamo

$$M^2 = (MH) \left(\frac{M}{H}\right) = \frac{2\pi^2 A}{T^2 (1 + \tau')} Dr^2$$

$$H^2 = (MH) \left(\frac{M}{H}\right) = \frac{8\pi^2 A}{T^2 (1 + \tau')} Dr^2$$

457. Abbiamo supposto che M e H rimangano costanti durante le due serie di esperienze. Le variazioni di H possono essere determinate dall'osservazione simultanea del magnetometro bifilare che si va a descrivere; e, se il magnete è in servizio dopo qualche tempo e se non è soggetto durante l'esperienza né a cambiamenti di temperatura né a urti, si può ammettere che la parte di M che dipende dal magnetismo permanente rimane costante. Ma tutti i magneti di acciai possono prendere per induzione un magnetismo che dipende dall'azione della forza magnetica esterna.

Ora, quando si impiega il magnete nelle esperienze di deviazione, il suo asse è posto da est a ovest, e l'azione del magnetismo terrestre, essendo trasversale al magnete, non tende ad aumentare o a diminuire M . Al contrario, quando si fa oscillare il magnete, il suo asse è diretto da nord a sud, e l'azione del magnetismo terrestre tende a magnetizzare nella direzione dell'asse e, di conseguenza, ad aumentare il suo momento magnetico di una quantità kH , dove k è un coefficiente che deve essere determinato da esperienze sul magnete stesso.

Vi sono due modi di evitare questa causa di errore senza calcolare k , e ciò disponendo l'esperienza in modo che il magnete sia nella stessa situazione quando serve a deviare un altro magnete o quando esso stesso oscilla.

Si può porre il magnete di deviazione, l'asse diretto verso nord, a una distanza r dal centro del magnete sospeso, formando la linea r con il meridiano magnetico un angolo il cui coseno è $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Allora l'azione del magnete di deviazione è perpendicolare alla propria direzione ed è uguale a

$$R = \sqrt{2} \frac{M}{r^3}$$

Qui M è il momento magnetico, essendo l'asse diretto verso nord come nelle esperienze di oscillazione; non vi è quindi più motivo di fare una correzione di induzione.

Ma questo metodo è molto poco comodo: grandi errori si introdurranno per un piccolo spostamento del magnete di deviazione; e, siccome non si può applicare la correzione consistente nel capovolgere questo magnete, questo metodo deve essere impiegato solo quando si vuole determinare il coefficiente di induzione.

Si deve al Dr J. P. Joule⁴ il metodo seguente, nel quale si sottrae il magnete, mentre oscilla, all'azione induttrice del magnetismo terrestre.

Si preparano due magneti i cui momenti magnetici sono il più esattamente uguali possibile, e, nelle esperienze di deviazione, li si impiega separatamente o li si pone insieme da una parte e dall'altra del magnete sospeso, in modo da aumentare la deviazione: in queste esperienze, la forza induttrice del magnetismo terrestre è trasversale all'asse.

Si sospende uno di questi magneti, e si pone l'altro parallelamente, il suo centro esattamente al di sotto di quello del magnete sospeso e il suo asse nella stessa direzione. L'azione che il magnete fisso esercita su quello sospeso è in verso contrario a quello del magnetismo terrestre. Se si avvicina gradualmente il magnete fisso a quello mobile, la durata delle oscillazioni cresce finché per una certa posizione l'equilibrio cessa di essere stabile; se si supera questa posizione, il magnete mobile esegue le sue oscillazioni in verso contrario. Procedendo così, si trova una posizione del magnete fisso, per la quale neutralizza esattamente l'effetto del magnetismo terrestre sul magnete sospeso. Si fissano allora i magneti tra loro, di modo che siano paralleli e che i loro assi ruotati nello stesso verso, alla distanza che si trova con le esperienze; si sospendono nel modo ordinario, e si fa loro eseguire delle oscillazioni di piccola ampiezza.

Il magnete inferiore neutralizza esattamente l'effetto del magnetismo terrestre sul magnete superiore; e, poiché i magneti hanno momenti uguali, quello in alto neutralizza l'azione induttrice della Terra su quello in basso.

Il valore di M è quindi lo stesso nell'esperienza di oscillazione e in quella di deviazione, e non si devono apportare correzioni di induzione.

458. Il metodo più esatto per determinare l'intensità della forza magnetica orizzontale è quello descritto. ma serve non meno di un'ora per effettuare, con una sufficiente precisione, tutta la serie di queste esperienze; e, di conseguenza, i cambiamenti di intensità, il cui periodo è di alcuni minuti soltanto, sfuggirebbero all'osservazione. Serve quindi un altro metodo per osservare in ogni istante l'intensità della forza magnetica.

Il metodo statico consiste nel deviare il magnete per mezzo di una coppia agente in un piano orizzontale. Se L è il momento di questa coppia, M il momento magnetico del magnete, K la componente orizzontale del magnetismo terrestre, θ la deviazione,

$$MH \sin \theta = L$$

pertanto, se si conosce L in funzione di θ , si può trovare MH .

La coppia L può essere prodotta in due modi: mediante l'elasticità di torsione di un filo, come nella comune bilancia di torsione, o con il peso dello strumento sospeso, come nella sospensione bifilare.

⁴*Proc. Phil. soc. Manchester*, 19 marzo 1867.

Nella bilancia di torsione, il magnete è fissato all'estremità di un filo verticale, di cui si può far ruotare l'estremità superiore, e di cui si misura la rotazione su un cerchio di torsione.

Si ha allora

$$L = \tau (\alpha - \alpha_0 - \theta) = MH \sin \theta$$

dove α_0 è la lettura del cerchio di torsione quando il magnete è nel meridiano magnetico, e α è la lettura attuale. Se si fa ruotare il cerchio di torsione in modo da riportare il magnete all'incirca ad angolo retto sul meridiano magnetico, di modo che

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

allora

$$\tau \left(\alpha - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} + \theta' \right) = MH \left(1 - \frac{1}{2} \theta'^2 \right)$$

o

$$MH = \tau \left(1 + \frac{1}{2} \theta'^2 \right) \left(\alpha - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} + \theta' \right)$$

Osservando la deviazione θ' del magnete giunto all'equilibrio, si può calcolare MH , conoscendo τ .

Se si vogliono soltanto conoscere i valori relativi di H nei diversi momenti, non è necessario conoscere né M né τ .

È facile determinare τ in misura assoluta: si sospende allo stesso filo un corpo non magnetico, e si osserva la durata di oscillazione; se A è il momento di inerzia di questo corpo e T la durata di una oscillazione completa,

$$\tau = \frac{4\pi^2 A}{T^2}$$

La principale critica che si possa opporre all'impiego della bilancia di torsione è che lo zero della graduazione può cambiare. Sotto l'azione della forza di torsione permanente, dovuta alla tendenza del magnete a girarsi verso nord, il filo prende poco alla volta una torsione permanente, di modo che per brevi intervalli diviene necessario determinare nuovamente lo zero del cerchio di torsione.

Sospensione bifilare

459. L'impiego di due fili di seta o di metallo per sospendere il magnete è stato indicato da Gauss e Weber. Siccome la sospensione bifilare è impiegata in un gran numero di strumenti elettrici, la studieremo in dettaglio.

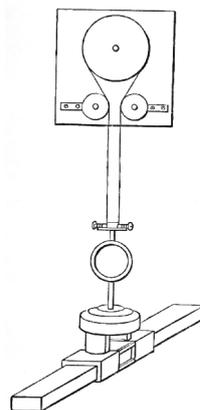


Fig. 16.

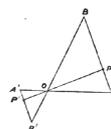


Fig. 17.

La fig. 16 ne mostra l'aspetto generale; la fig. 17 rappresenta la proiezione dei fili sul piano orizzontale.

AB e $A'B'$ sono le proiezioni dei due fili;

AA' e BB' sono le linee che congiungono le estremità superiori e inferiori dei fili;

a e b sono le lunghezze delle linee AA' e BB' ;

α e β i loro azimut;

W e W' le componenti verticali delle tensioni dei fili;

Q e Q' le componenti orizzontali;

h la distanza verticale tra AA' e BB' .

Le forze che agiscono sul magnete sono: il suo peso; la coppia dovuta al magnetismo terrestre; la tensione dei fili e, se del caso, la loro torsione. Di queste forze, quelle che sono dovute al magnetismo e alla torsione sono del tipo di coppie. Pertanto la risultante delle tensioni deve comporsi di una forza verticale uguale al peso del magnete e di una coppia.

La risultante verticale delle tensioni è quindi diretta lungo la linea che si proietta in O , intersezione di AA' e BB' , e ognuno di queste linee è divisa da O nel rapporto di W con W' .

Le componenti orizzontali delle tensioni formano una coppia e, di conseguenza, sono uguali in modulo e parallele in direzione. Chiamando Q una di esse, il momento della coppia che esse formano è

$$L = Q \cdot PP' \quad (7.0.31)$$

dove PP' è la distanza tra le linee parallele AB e $A'B'$.

Per trovare il valore di L , abbiamo le equazioni dei momenti

$$Qh = W \cdot AB = W' \cdot A'B' \quad (7.0.32)$$

e l'equazione geometrica

$$(AB + A'B') PP' = ab \sin(\alpha - \beta) \quad (7.0.33)$$

da cui ricaviamo

$$L = Q \cdot PP' = \frac{ab}{h} \frac{WW'}{W + W'} \sin(\alpha - \beta) \quad (7.0.34)$$

Se m è la massa dello strumento sospeso e g l'intensità del peso,

$$W + W' = mg \quad (7.0.35)$$

Se poniamo anche

$$W - W' = nmg \quad (7.0.36)$$

troviamo

$$L = \frac{1}{4} (1 - n^2) mg \frac{ab}{h} \sin(\alpha - \beta) \quad (7.0.37)$$

Il valore di L è quindi massimo rispetto a n , quando n è nullo, cioè quando il peso della massa sospesa è pure sostenuto dai due fili.

Si può rendere uguale la tensione dei fili, osservando la durata delle oscillazioni e minimizzandola; oppure, si può ottenere una regolazione automatica attaccando le estremità dei fili a una puleggia (fig. 16) che ruota sul suo asse affinché le tensioni siano uguali.

Una volta regolata la tensione, la coppia dovuta alla tensione dei fili diviene

$$L = \frac{1}{4} mg \frac{ab}{h} \sin(\alpha - \beta)$$

Il momento della coppia dovuta alla torsione dei fili è della forma

$$\tau(\gamma - \beta)$$

dove τ è la somma dei coefficienti di torsione dei fili.

Dovendo questi essere senza torsione quando $\alpha = \beta$, possiamo fare $\gamma = \alpha$.

Il momento della coppia dovuto alla forza magnetica orizzontale è della forma

$$MH \sin(\delta - \alpha)$$

dove δ è la declinazione magnetica e θ l'azimut dell'asse del magnete.

Eviteremo di introdurre simboli inutili, senza perdita di generalità dell'esposizione, supponendo che l'asse del magnete è parallelo a BB' o che $\beta = \theta$.

L'equazione del movimento diviene quindi

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} = MH \sin(\delta - \alpha) + \frac{1}{4} mg \frac{ab}{h} \sin(\alpha - \beta) + \tau(\gamma - \beta) \quad (7.0.38)$$

Vi sono tre posizioni principali dello strumento:

(1) α è quasi uguale a δ . Se T_1 è la durata di una oscillazione completa in questa posizione

$$\frac{4\pi^2 A}{T_1^2} = \frac{1}{4} mg \frac{ab}{h} + \tau + MH \quad (7.0.39)$$

(2) α è circa uguale a $\delta + \pi$. Se T_2 è la durata di una oscillazione completa in questa posizione, l'estremità nord del magnete sarà ruotata allora verso sud,

$$\frac{4\pi^2 A}{T_1^2} = \frac{1}{4} mg \frac{ab}{h} + \tau - MH \quad (7.0.40)$$

Si può rendere il secondo membro piccolo a piacere diminuendo a o b ; ma non lo si deve rendere negativo, altrimenti l'equilibrio del magnete diverrebbe instabile. In questa posizione, il magnete costituisce uno strumento che può rendere osservabili piccole variazioni nella direzione della forza magnetica.

Infatti, quando $\delta - \theta$ è quasi uguale a π , $\sin(\delta - \theta)$ è quasi uguale a $(\theta - \delta)$, e si trova

$$\theta = \alpha - \frac{MH}{\frac{1}{4} mg \frac{ab}{h} + \tau - MH} (\delta - \alpha) \quad (7.0.41)$$

Diminuendo il denominatore della funzione nel secondo membro, si può rendere la variazione di θ molto grande, rispetto a quella di δ . Osserveremo che, quando la direzione della forza magnetica cambia in un certo verso, il magnete ruota nel verso opposto.

(3) Nella terza posizione, si fa ruotare la parte superiore della sospensione affinché l'asse del magnete sia all'incirca perpendicolare al meridiano magnetico.

Se si pone

$$\theta - \delta = \frac{\pi}{2} + \theta' \quad \alpha - \theta = \beta - \theta' \quad (7.0.42)$$

l'equazione del moto si può scrivere

$$A \frac{d^2\theta'}{dt^2} = MH \cos \theta' + \frac{1}{4} mg \frac{ab}{h} \sin(\beta - \theta') + \tau(\beta - \theta') \quad (7.0.43)$$

Se vi è equilibrio quando $H = H_0$ e $\theta' = 0$

$$MH_0 + \frac{1}{4} mg \frac{ab}{h} \sin \beta + \beta\tau = 0 \quad (7.0.44)$$

e se H è il valore della forza orizzontale corrispondente a un piccolo angolo θ'

$$H = H_0 \left(1 - \frac{\frac{1}{4} mg \frac{ab}{h} \cos \beta + \tau}{\frac{1}{4} mg \frac{ab}{h} \sin \beta + \tau\beta} \right) \quad (7.0.45)$$

Affinché il magnete sia in equilibrio stabile, il numeratore della frazione del secondo membro deve essere positivo; ma più sarà vicino a zero, più lo strumento sarà sensibile per consentire l'osservazione di cambiamenti di valore nell'intensità della componente orizzontale del magnetismo terrestre.

Il metodo statico di valutazione dell'intensità della forza dipende dal funzionamento di uno strumento che assume di per sé diverse posizioni di equilibrio per diversi valori della forza. Pertanto, fissando al magnete uno specchio che riflette una macchia luminosa su una superficie fotografica mossa da un ingranaggio di orologeria, si potrà ottenere una curva che permetterà di determinare in ogni istante l'istante della forza in funzione di una scala che possiamo considerare, per l'istante, come arbitrario.

460. In un osservatorio dove la declinazione e l'intensità sono l'oggetto di un sistema di registrazione continua, sia mediante osservazione diretta, sia con il metodo automatico della fotografia, è possibile determinare con maggiore precisione i valori della declinazione e dell'intensità, così come la posizione e il momento dell'asse magnetico di un magnete.

Infatti, in ogni istante, il declinometro dà la declinazione affetta da un errore costante, e il magnetometro bifilare, l'intensità moltiplicata per un coefficiente costante. Nelle esperienze, a δ si sostituisce $\delta' + \delta_0$, dove δ' è la lettura del declinometro a un istante dato e δ_0 è l'errore incognito, ma costante; di modo che $\delta' + \delta_0$ è la declinazione effettiva.

Allo stesso modo, si sostituisce H con CH' , dove H' è la lettura del magnetometro alla sua scala arbitraria, e dove C è il fattore incognito, ma costante, che converte queste letture in misure assolute, di modo che CH' è la forza orizzontale in un istante dato.

Le esperienze destinate a determinare il valore assoluto delle quantità devono essere fatte molto lontano dal declinometro e dal magnetometro perché i diversi magneti non possano essere l'uno per l'altro una causa di perturbazioni apprezzabili. Si annota il momento di ogni osservazione e si introducono i valori corrispondenti di δ' e di H' ; poi si trattano le equazioni in modo da ricavare l'errore costante δ_0 del declinometro, e il coefficiente C per il quale si devono moltiplicare le letture del magnetometro. Una volta trovati questi due valori, è possibile esprimere in misura assoluta le letture dei due strumenti. Ma queste misure assolute devono essere ripetute frequentemente per tener conto dei cambiamenti che si possono produrre nell'asse magnetico e nel momento magnetico dei magneti.

461. I metodi destinati a determinare la componente verticale del magnetismo terrestre non sono stati portati allo stesso grado di perfezione. La forza verticale deve agire su un magnete che ruota attorno a un asse orizzontale. Si può rendere un corpo ruotante attorno a un asse orizzontale così sensibile all'azione di piccole forze solo con un corpo sospeso a un filo e mobile attorno a un asse verticale. Inoltre, il peso del magnete è così grande rispetto alla forza magnetica che agisce su di esso, che un piccolo spostamento del centro di inerzia (dovuto a una diversa dilatazione, ecc.) produce sulla posizione del magnete un maggiore effetto di un cambiamento considerevole della forza magnetica.

Di conseguenza, la misura della forza verticale, o il confronto della forza verticale e di quella orizzontale, è la parte meno perfetta del sistema di misure magnetiche.

Di solito, la componente verticale della forza magnetica totale si deduce dalla componente orizzontale, determinando la direzione della forza totale.

Chiamando i l'angolo della forza totale e della sua componente orizzontale, i è detta l'inclinazione magnetica, e H la componente orizzontale già ottenuta; la componente verticale è $H \tan i$ e la forza totale $H \sin i$.

L'inclinazione magnetica si ottiene per mezzo dell'ago di inclinazione.

Teoricamente, l'ago di inclinazione è un magnete montato su un asse passante per il suo centro di inerzia e perpendicolare all'asse magnetico dell'ago. Le estremità di questo asse sono lavorate in forma di cilindro di piccolo raggio, i cui assi coincidono con la linea passante per il

centro di inerzia. Queste due estremità cilindriche riposano su piani orizzontali sui quali possono ruotare liberamente.

Quando l'asse è posto nel verso dall'est all'ovest magnetico, l'ago può muoversi liberamente nel piano del meridiano magnetico; e, se lo strumento è perfettamente regolato, l'asse magnetico si pone nella direzione della forza magnetica totale.

Ma è praticamente impossibile regolare un ago di inclinazione in modo che il suo peso non influisca sulla posizione di equilibrio; poiché, anche quando il centro d'inerzia fosse inizialmente sulla linea degli assi dei cilindri sui quali avviene la rotazione, cessa di trovarsi quando l'ago subisce una flessione impercettibile o una dilatazione ineguale. Inoltre, la determinazione del vero centro di gravità di un magnete non è cosa facile, poiché gli effetti della forza magnetica si mescolano a quelli della gravità.

Supponiamo di fare dei segni su una delle estremità dell'ago e su uno degli estremi del suo asse, e tracciamo nell'ago una linea reale o immaginaria che chiameremo linea di collimazione, la cui posizione si legge su un cerchio verticale. Sia θ l'angolo che questa linea forma con il raggio passante per lo zero, che supporremo essere orizzontale; sia λ l'angolo che l'asse magnetico forma con la linea di collimazione, di modo che, essendo l'ago in questa posizione, la linea di collimazione sia inclinata di $\theta + \lambda$ sull'orizzontale.

Sia p la perpendicolare abbassata dal centro d'inerzia sul piano di rotazione degli assi: qualunque sia la forma delle superfici ruotanti, p è una funzione di θ . Se le due sezioni sulle quali avviene la rotazione agli estremi degli assi sono cerchi

$$p = c - a \sin(\theta + \alpha) \quad (7.0.46)$$

dove a è la distanza dal centro d'inerzia della linea dei centri delle sezioni di rotazione, e dove α è l'angolo che questa linea forma con la linea di collimazione.

Siano

M il momento magnetico; m la massa del magnete; g la forza di gravità; I la forza magnetica totale; i l'inclinazione.

Dal principio di conservazione dell'energia, quando l'equilibrio è stabile

$$M \cos(\theta + \lambda - i) - mgp \quad (7.0.47)$$

deve essere un massimo rispetto a θ ; da cui

$$MI \sin(\theta + \lambda - i) = -mg \frac{dp}{d\theta} = mga \cos(\theta + \alpha) \quad (7.0.48)$$

se le estremità dell'asse sono cilindriche.

Se quindi T è la durata di una oscillazione attorno alla posizione di equilibrio,

$$MI + mga \sin(\theta + \alpha) = \frac{4\pi^2 A}{T^2} \quad (7.0.49)$$

dove A è il momento d'inerzia dell'ago attorno al suo asse di rotazione, e dove θ è determinato dalla (7-48).

Quando si determina l'inclinazione, si prende una lettura mentre il cerchio è in un piano del meridiano magnetico, la divisione ruotata dal lato ovest.

Sia θ_1 questa lettura; abbiamo allora

$$MI \sin(\theta_1 + \lambda - i) = mga \cos(\theta_1 + \alpha) \quad (7.0.50)$$

Poi si fa ruotare lo strumento di 180° attorno a un asse verticale, in modo che la graduazione sia a est; se θ_2 è la nuova lettura,

$$MI \sin(\theta_2 + \lambda - i) = mga \cos(\theta_2 + \alpha) \quad (7.0.51)$$

Sottraendo queste ultime due relazioni, e ricordando che θ_1 è circa uguale a i e θ_2 a $\pi - i$, e che λ è un piccolo angolo, di modo che si può trascurare $mga\lambda$ rispetto a MI ,

$$MI(\theta_1 - \theta_2 + \pi - 2i) = 2mga \cos i \cos \alpha \quad (7.0.52)$$

Togliendo allora il magnete da sopra i suoi supporti e ponendo nello strumento a deviazione del § 453, in modo che esso indica il suo momento magnetico tramite la deviazione del magnete sospeso, si ha

$$M = \frac{1}{2}r^2HD \quad (7.0.53)$$

dove D è la tangente della deviazione.

Invertiamo la magnetizzazione dell'ago, e determiniamo il suo nuovo momento magnetico M' osservando una nuova deviazione la cui tangente è D' ,

$$M' = \frac{1}{2}r^2HD' \quad (7.0.54)$$

da cui

$$MD' = M'D \quad (7.0.55)$$

Rimettiamo il magnete sui suoi supporti, e prendiamo due nuove letture θ_3 e θ_4 , una delle quali è circa $\pi + i$ e l'altra circa $-i$,

$$M'I \sin(\theta_3 + \lambda' - \pi - i) = mga \cos(\theta_3 + \alpha) \quad (7.0.56)$$

$$M'I \sin(\theta_4 + \lambda' + i) = mga \cos(\theta_4 + \alpha) \quad (7.0.57)$$

da cui si ricava, come in precedenza

$$M'I(\theta_3 - \theta_4 - \pi - 2i) = 2mga \cos i \cos \alpha \quad (7.0.58)$$

e, sommando la (7-52),

$$MI(\theta_1 - \theta_2 + \pi - 2i) + M'I(\theta_3 - \theta_4 - \pi - 2i) = 0 \quad (7.0.59)$$

o

$$D(\theta_1 - \theta_2 + \pi - 2i) + D'(\theta_3 - \theta_4 - \pi - 2i) = 0 \quad (7.0.60)$$

da cui si ricava l'inclinazione

$$i = \frac{D(\theta_1 - \theta_2 + \pi) + D'(\theta_3 - \theta_4 - \pi)}{2D + 2D'} \quad (7.0.61)$$

dove D e D' sono le tangenti delle deviazioni prodotte dall'ago con la sua prima e con la sua seconda magnetizzazione.

Quando si compiono osservazioni al cerchio di inclinazione, si regola accuratamente l'asse verticale in modo che i supporti piani sui quali riposa l'asse del magnete siano orizzontali in tutti gli azimut. Essendo la magnetizzazione del magnete di verso tale che l'estremità A sia diretta verso il basso, si pone l'asse su sui suoi supporti e si prendono delle letture, essendo il piano del cerchio nel meridiano magnetico e la scala graduata di fronte all'est. Ogni estremità del magnete è osservata per mezzo di un microscopio sostenuto da un'asta che si muove concentricamente al cerchio di inclinazione. Si porta in coincidenza il reticolo del microscopio e l'immagine di un segno fatto sul magnete, e si legge per mezzo di un nonio la posizione dell'alidada sul cerchio.

Si ottiene così, mentre la scala graduata è rivolta verso est, una lettura per l'estremità A e un'altra per la B . È necessario osservare le due estremità per eliminare gli errori che potrebbero sorgere se l'asse del magnete e il cerchio di inclinazione non fossero concentrici.

Si ruota allora la scala graduata verso ovest, e si prendono altre due letture.

Si fa allora ruotare il magnete su se stesso, di modo che le estremità dell'asse siano scambiate rispetto allo strumento, e si prendono quattro nuove letture sulla seconda faccia del magnete.

La magnetizzazione è allora invertita, di modo che l'estremità B si dirige verso il basso; si determina il nuovo momento magnetico, e si prendono in questa nuova condizione otto letture: sono queste sedici osservazioni combinate che determinano l'inclinazione effettiva.

462. Si constata che, malgrado la cura più minuziosa, il valore così dedotto di osservazioni fatte su un cerchio di inclinazione differisce sensibilmente da quella che si otterrebbe osservando nello stesso luogo su un altro cerchio di inclinazione. M. Broun ha segnalato l'effetto dovuto all'ellitticità del perno dell'asse, e ha mostrato come si possa correggerlo facendo osservazioni su un magnete magnetizzato con diverse intensità.

Il principio di questo metodo si può enunciare come segue: Supponiamo che l'errore su una osservazione qualunque sia una piccola quantità non superiore a un grado; supponiamo anche che una forza sconosciuta, ma regolare, agisca sul magnete e lo sposti dalla sua posizione reale.

Se L è il momento di questa forza, θ_0 l'inclinazione effettiva e θ l'inclinazione osservata,

$$L = MI \sin(\theta - \theta_0) \quad (7.0.62)$$

$$= MI(\theta - \theta_0) \quad (7.0.63)$$

poiché $\theta - \theta_0$ è piccolo.

È chiaro che, più M diviene grande, e più l'ago si avvicina alla sua posizione vera. Ripetiamo due volte le operazioni necessarie per ottenere l'inclinazione: la prima volta con una magnetizzazione M_1 , la più intensa che possa valutare l'ago, la seconda volta con una magnetizzazione M_2 molto più piccola, sebbene sufficiente ancora perché le letture siano definite e che l'errore non sia eccessivo. Siano θ_1 e θ_2 i valori dell'inclinazione dedotti da queste due serie di osservazioni, e sia L il valore medio della forza perturbatrice sconosciuta per le otto posizioni di ogni misura: supporremo che questo valore sia lo stesso per le due misure.

Allora

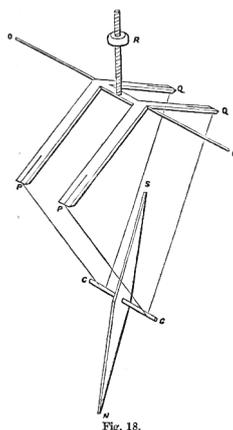
$$L = M_1 I (\theta_1 - \theta_0) = M_2 I (\theta_2 - \theta_0) \quad (7.0.64)$$

da cui

$$\theta_0 = \frac{M_1 \theta_1 - M_2 \theta_2}{M_1 - M_2} \quad L = M_1 M_2 I \frac{\theta_1 - \theta_2}{M_2 - M_1} \quad (7.0.65)$$

Se troviamo che numerose esperienze danno circa lo stesso valore di L , possiamo considerare θ_0 come all'incirca il valore vero dell'inclinazione.

463. Il Dr Joule ha costruito recentemente un nuovo cerchio di inclinazione, dove l'asse dell'ago, invece di ruotare su piani di agata orizzontali, è sospeso su due fibre di seta o due fili di ragnatela le cui estremità sono attaccate ai bracci di una bilancia sensibile. L'asse del magnete ruota così su due coppie di fili di seta, e il Dr. Joule trova che i suoi movimenti sono molto più liberi in questa maniera che quando ruota su piani di agata.

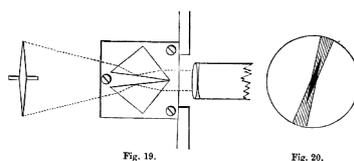


Nella fig. 18, NS è l'ago, CC' il suo asse formato da un filo di metallo cilindrico e diritto, PCQ e $P'C'Q'$ sono i fili sui quali l'asse ruota, POQ è la bilancia formata da una doppia leva a gomito che supporta un filo OO teso orizzontalmente tra i rebbi di una forchetta; un contrappeso OO , che si può togliere o abbassare lungo una vite, permette di mantenere la bilancia in equilibrio indifferente attorno a OO . Affinché l'ago rimanga in equilibrio indifferente quando ruota sui due fili, bisogna che il suo centro di gravità non si alzi né si abbassi; bisogna quindi che la distanza OC rimanga costante quando l'ago ruota: questa condizione sarà soddisfatta se i bracci OP e OQ sono uguali e se i loro fili sono perpendicolari.

Il Dr Joule ha trovato che l'ago non deve essere più lungo di cinque pollici (12,70 cm); con una lunghezza di otto pollici, la flessione dell'ago tende a diminuire l'inclinazione osservata di una frazione di minuto. Inizialmente, l'asse dell'ago era un filo di acciaio che si raddrizzava portandolo al rosso mentre era teso da un peso; ma il Dr Joule ha riconosciuto che con la nuova sospensione non è necessario impiegare l'acciaio, e che il platino e anche l'oro fino sono sufficientemente duri.

La bilancia è attaccata a un filo OO , lungo circa un piede, teso orizzontalmente tra i rebbi di una forchetta che si può far ruotare in azimut per mezzo di un cerchio posto al vertice del treppiede che sorregge lo strumento. Si possono fare in un'ora se osservazioni complete di inclinazione, e l'errore medio su ogni osservazione è una frazione di minuto d'arco.

Al laboratorio di Fisica di Cambridge, ci si propone di osservare l'ago di inclinazione per mezzo di un apparecchio a doppia immagine, consistente in due prismi a riflessione totale posti come nella fig. 19.



Questi prismi sono montati su un cerchio graduato verticale, di modo che si può far ruotare il piano di riflessione attorno a un asse coincidente all'incirca con il prolungamento dell'asse dell'ago sospeso. L'ago è osservato per mezzo di un cannocchiale posto dietro i prismi, e si vedono insieme le due estremità, come nella fig. 20. Facendo ruotare i prismi attorno all'asse del cerchio verticale, si possono riportare in coincidenza le immagini delle due linee tracciate sull'ago. L'inclinazione dell'ago è così determinata dalla lettura del cerchio verticale.

L'intensità totale I della forza magnetica lungo la linea di inclinazione si può dedurre dalla durata delle oscillazioni T_1, T_2, T_3, T_4 nelle quattro posizioni prima specificate con la formula

$$I = \frac{4\pi^2 A}{2M + 2M'} \left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \frac{1}{T_3^2} + \frac{1}{T_4^2} \right)$$

I valori di M e M' devono essere trovati con il metodo di deviazione e di oscillazione descritti in precedenza; A è il momento d'inerzia del magnete attorno al proprio asse.

Ma le osservazioni fatte su un magnete sospeso da una seta sono talmente più esatte che di solito di deduce la forza totale dalla sua componente orizzontale con la formula

$$I = H \sec \theta$$

dove I è la forza totale, H la componente orizzontale e θ l'inclinazione.

464. Le operazioni con le quali si determina l'inclinazione, essendo le più fastidiose, non sarebbero convenienti per determinare le variazioni continue della forza magnetica. Lo strumento più opportuno per le osservazioni continue è il magnetometro di forza verticale, che consiste

semplicemente di un magnete messo in equilibrio su un coltello di bilancia, in modo da essere in equilibrio stabile quando il suo asse è quasi orizzontale.

Se Z è la componente verticale della forza magnetica, M il momento magnetico e θ il piccolo angolo che l'asse magnetico forma con l'orizzonte,

$$MZ = mga \cos(\alpha - \theta)$$

indicando con m la massa del magnete; g , la forza di gravità; a , la distanza dal centro di gravità e l'asse di sospensione, e α l'angolo che forma con l'asse magnetico il piano passante per l'asse di sospensione e il centro di gravità.

Per una piccola variazione δZ della forza verticale, vi è una variazione $\delta\theta$ della posizione angolare del magnete, tale che

$$M\delta Z = mga \sin(\alpha - \theta) \delta\theta$$

Nella pratica, questo strumento non serve a determinare il valore assoluto della forza magnetica, ma soltanto a registrare le sue piccole variazioni. Per questo, basta conoscere il valore assoluto di Z per $\theta = 0$ e quello di $\frac{dZ}{d\theta}$.

Quando si conosce la forza orizzontale e l'inclinazione, il valore di Z si ottiene dall'equazione

$$Z = H \tan \theta_0$$

dove θ_0 è l'inclinazione e H la forza orizzontale.

Per trovare la deviazione dovuta a una variazione data di Z , prendiamo un magnete e, dirigendo il suo asse da est a ovest, poniamo il centro a una distanza r_1 , all'est o all'ovest del declinometro, come nelle esperienze di deviazione, e sia D_1 la tangente della deviazione.

Poniamo poi l'asse verticale e il centro a una distanza r_2 al di sopra o al di sotto del centro del magnetometro di forza verticale, e sia D_2 la tangente della deviazione prodotta in questo magnetometro. Se M è il momento del magnete di deviazione,

$$2M = Hr_1^3 D_1 = \frac{dZ}{d\theta} r_2^3 D_2$$

da cui

$$\frac{dZ}{d\theta} = H \frac{r_1^3 D_1}{r_2^3 D_2}$$

Pertanto il valore della forza verticale è in ogni istante

$$Z = Z_0 + \theta \frac{dZ}{d\theta}$$

essendo Z_0 il valore di Z per $\theta = 0$.

Gli strumenti più opportuni per osservare in modo continuo, in un osservatorio permanente, le variazioni della forza magnetica, sono: il declinometro unifilare, il magnetometro bifilare per la forza orizzontale e il magnetometro bilancia per la forza verticale.

In numerosi osservatori, si ottengono ora tracce fotografiche su carta preparata mossa con un moto da orologeria: si ottiene così una registrazione continua delle indicazioni dei tre strumenti in ogni istante. Queste tracce indicano le variazioni di tre componenti rettangolari della forza, da una parte e dall'altra dei valori presi come termini di confronto. Il declinometro dà la forza diretta verso l'ovest magnetico medio, il magnetometro bifilare dà la variazione della forza diretta verso il nord magnetico, e il magnetometro bilancia dà la variazione della forza verticale. I valori di confronto di queste forze, cioè i valori che corrispondono ai rispettivi zeri di questi strumenti, si ottengono con misure frequenti della declinazione, della forza orizzontale e dell'inclinazione in valori assoluti.

8 Magnetismo terrestre

465. Ciò che sappiamo sul magnetismo terrestre è stato ottenuto studiando la distribuzione della forza magnetica alla superficie della Terra in un certo periodo dato, e le variazioni di questa distribuzione in diverse epoche.

Si conosce la forza magnetica in un luogo e in un periodo quando si conoscono le sue tre coordinate. Queste tre coordinate possono essere date sotto la forma della declinazione o azimut della forza, dell'inclinazione o angolo della forza sull'orizzonte e dell'intensità totale.

Ma il modo più comodo di studiare la distribuzione della forza magnetica alla superficie della Terra consiste nel considerare le grandezze delle tre componenti della forza

$$\begin{cases} X = H \cos \delta & \text{diretta verso nord} \\ Y = H \sin \delta & \text{diretta verso ovest} \\ Z = H \tan \theta & \text{verso lo zenit} \end{cases} \quad (8.0.1)$$

dove H è la forza orizzontale, δ la declinazione e θ l'inclinazione.

Allora, se V è il potenziale magnetico alla superficie della Terra, e se consideriamo la Terra come una sfera di raggio a ,

$$X = -\frac{1}{a} \frac{dV}{dl} \quad Y = -\frac{1}{a \cos l} \frac{dV}{d\lambda} \quad Z = -\frac{dV}{dr} \quad (8.0.2)$$

essendo l la latitudine, λ la longitudine e r la distanza dal centro della Terra.

Si può conoscere V sulla superficie della Terra tramite osservazioni di forza orizzontale soltanto, nel modo seguente:

Sia V_0 il valore di V al polo nord vero; prendendo l'integrale lungo un meridiano qualunque, troviamo per valore del potenziale su questo meridiano alla latitudine l

$$V = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^l X dl + V_0 \quad (8.0.3)$$

Così, si può conoscere il potenziale in un punto qualunque della superficie della Terra, purché si conosca in ogni punto la componente diretta verso nord, così come il valore di V_0 del potenziale V al polo.

Poiché le forze non dipendono dal valore assoluto di V , ma solo dalle sue derivate, non è necessario assegnare un valore particolare a V_0 .

Il valore di V in un punto dato può ancora essere determinato se conosciamo il valore di X lungo un meridiano dato e quello di Y sull'intera superficie.

Sia

$$V_l = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^l X dl + V_0 \quad (8.0.4)$$

essendo l'integrazione effettuata sul meridiano dal polo al parallelo l ; si ha

$$V = V_l - a \int_{\lambda_0}^{\lambda} Y \cos l d\lambda \quad (8.0.5)$$

essendo l'integrazione effettuata lungo il parallelo dal meridiano dato fino al punto in cui si vuole avere il potenziale.

Questi due metodi presuppongono che sia stato fatto un rilievo magnetico completo della superficie della Terra, in modo da avere in ogni punto e per ogni epoca dati, il valore di X o di Y , o di entrambi. Non possediamo ora questi elementi magnetici se non per un certo numero di posti. Questi sono relativamente numerosi nelle parti civilizzate della Terra; ma, nelle altre regioni, vi sono vaste estese sulle quali non abbiamo dati.

Carte magnetiche

466. Supponiamo che in un paese di limitata estensione, la cui lunghezza maggiore non supera qualche centinaia di miglia, siano state fatte osservazioni di declinazione e della forza orizzontale in un numero considerevole di stazioni all'incirca equamente ripartite su tutta la regione.

All'interno di questo paese, si può ammettere che V è rappresentato con sufficiente esattezza, dalla formula

$$V = cost - a \left(A_1 l + A_2 \lambda + \frac{1}{2} B l_1^2 + B_2 \lambda l + \frac{1}{2} B_2 \lambda^2 + \dots \right) \quad (8.0.6)$$

da cui

$$X = A_1 + B_1 l + B_2 \lambda \quad (8.0.7)$$

$$Y \cos \lambda = A_2 + B_2 l + B_3 \lambda \quad (8.0.8)$$

Siano n stazioni le cui latitudini siano l_1, l_2, \dots e le longitudini $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ e supponiamo che si conosca X in ogni stazione.

Siano

$$l_0 = \frac{1}{n} \sum (l) \quad \lambda_0 = \frac{1}{n} \sum (\lambda) \quad (8.0.9)$$

l_0 e λ_0 si possono chiamare la latitudine e la longitudine della stazione centrale.

Siano

$$X_0 = \frac{1}{n} \sum (X) \quad Y_0 \cos l_0 = \frac{1}{n} \sum (Y \cos l) \quad (8.0.10)$$

X_0 e Y_0 sono i valori di X e Y alla stazione centrale fittizia; si ha

$$X = X_0 + B_1 (l - l_0) + B_2 (\lambda - \lambda_0) \quad (8.0.11)$$

$$Y \cos l = Y_0 \cos l_0 + B_2 (l - l_0) + B_3 (\lambda - \lambda_0) \quad (8.0.12)$$

Abbiamo n equazioni della forza (8-11) e n della forma (8-12). Se indichiamo con ξ l'errore probabile sulla misura di X , e con η quello sulla misura di $Y \cos l$, possiamo calcolare ξ e η , supponendo che questi errori siano dovuti agli errori di osservazione su H e δ .

Siano h l'errore probabile di H e α quello di δ . Allora, poiché

$$\begin{aligned} dX &= \cos \delta dH - H \sin \delta d\delta \\ \xi^2 &= h^2 \cos^2 \delta + d^2 H^2 \sin^2 \delta \end{aligned}$$

Analogamente

$$\eta^2 = h^2 \sin^2 \delta + d^2 H^2 \cos^2 \delta$$

Se le variazioni di X e Y rispetto ai loro valori dati dalle equazioni (8-11,12) superano notevolmente gli errori probabili di osservazione, possiamo concludere che queste variazioni sono dovute ad attrazioni locali, e non abbiamo alcun motivo di dare al rapporto di ξ con η un valore diverso dall'unità.

Applicando il metodo dei minimi quadrati, moltiplichiamo le equazioni (8-11) per η e quelle (8-12) per ξ per rendere uguali i loro errori probabili. Poi moltiplichiamo ogni equazione per il

coefficiente di una delle quantità incognite B_1, B_2, B_3 e sommiamo i risultati: si ottengono così tre equazioni, dalle quali si ricava B_1, B_2, B_3

$$\begin{aligned} P_1 &= B_1 b_1 + B_2 b_2 \\ (\eta^2 P_2 + \xi^2 Q_1) &= B_1 \eta^2 b_2 + B_2 (\xi^2 b_1 + \eta^2 b_2) + B_3 \xi^2 b_2 \\ Q_2 &= B_2 b_2 + B_3 b_3 \end{aligned}$$

dove abbiamo scritto, sintetizzando,

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum (l^2) - n l_0^2 & b_2 &= \sum (l\lambda) - n l_0 \lambda_0 & b_3 &= \sum (\lambda^2) - n \lambda_0^2 \\ P_1 &= \sum (lX) - n l_0 X_0 & Q_1 &= \sum (lY \cos l) - n l_0 Y_0 \cos l_0 \\ P_2 &= \sum (\lambda X) - n \lambda_0 X_0 & Q_2 &= \sum (\lambda Y \cos l) - n \lambda_0 Y_0 \cos l_0 \end{aligned}$$

Calcolando B_1, B_2, B_3 e sostituendoli nelle (8-11,12), possiamo ottenere i valori di X e Y in un punto qualunque compreso nei limiti del rilievo, eliminando le perturbazioni locali che si manifestano quando le rocce vicine alla stazione sono magnetiche, che è il caso della maggior parte delle rocce magmatiche.

Rilievi di questo tipo possono essere fatti solo nei paesi dove si possono trasportare con cura strumenti magnetici e installarli in un gran numero di stazioni. Per le altre parti del mondo, ci dobbiamo accontentare di trovare la distribuzione degli elementi magnetici per interpolazione tra i valori di questi elementi rilevati in un piccolo numero di stazioni molto lontane tra loro.

467. Supponiamo ora che, con procedimenti di questo genere o con il metodo grafico equivalente, che consiste nel costruire le carte di linee di uguale valore degli elementi magnetici, si sia giunti a conoscere i valori di X , di Y e, di conseguenza, di V in tutti i punti del globo. Si tratta poi di sviluppare V in serie di armoniche sferiche di superficie.

Se la Terra fosse uniformemente magnetizzata e nella stessa direzione in tutta la sua massa, V sarebbe un'armonica di primo grado; i meridiani magnetici sarebbero cerchi massimi passanti per due poli magnetici diametralmente opposti; l'equatore magnetico sarebbe un cerchio massimo, in tutti i punti del quale la forza orizzontale avrebbe lo stesso valore; e, se H_0 fosse questo valore costante, il valore in un altro punto sarebbe $H = H_0 \cos l'$, con l' la latitudine magnetica. La forza verticale in un punto qualunque sarebbe $Z = 2H_0 \sin l'$ e, essendo θ l'inclinazione, si avrebbe

$$\tan \theta = 2 \tan l'$$

Nel caso della Terra, l'equatore è definito dalla linea di inclinazione nulla: non è un cerchio massimo della sfera.

I poli magnetici sono definiti i punti in cui non vi è forza orizzontale, oppure i punti dove l'inclinazione è di 90° . Vi sono due punti di questo tipo, uno nelle regioni settentrionali, l'altro in quelle meridionali; ma non sono diametralmente opposti e la linea congiungente non è parallela all'asse magnetico della Terra.

468. I poli magnetici sono i punti in cui il valore di V per la superficie della Terra è massimo o minimo o stazionario.

In un punto dove il potenziale è minimo, l'estremità nord di un ago di inclinazione si dirige verticalmente verso il basso; e un ago di bussola, posta non importa in quale punto vicino a questo polo, ruota verso di lui la sua estremità nord.

In un punto dove il potenziale è massimo, l'estremità sud dell'ago di inclinazione si dirige verso il basso e l'estremità sud di un ago di bussola si dirige verso questo punto.

Se vi sono sulla superficie della Terra p minimi di V , devono esistere $p - 1$ altri punti dove l'estremità nord di un ago di inclinazione si dirige verso il basso, ma dove un ago di bussola si portato in giro tutto attorno al punto non ruota su se stesso, in modo da dirigere sempre la sua estremità nord verso il punto, ma ruota in un verso contrario e presenta a volte la sua estremità nord e a volte quella sud verso il punto.

Se chiamiamo i punti dove il potenziale è minimo poli nord veri, questi altri punti potranno essere chiamati poli nord falsi, poiché l'ago della bussola non rimane sempre puntato su di essi. Se vi sono p poli nord veri, vi devono essere $p - 1$ poli nord falsi; e, analogamente, se vi sono q poli sud veri, devono esistere $q - 1$ poli sud falsi. Il numero dei poli dello stesso nome deve essere dispari, di modo che l'opinione in corso in un certo periodo, che vi sono due poli nord e due poli sud, è erronea. Secondo Gauss, vi è realmente sulla Terra un solo polo nord e un solo polo sud veri: non vi sono poli falsi. La linea che unisce questi poli non è un diametro e non è parallela all'asse magnetico della Terra.

469. La maggior parte di coloro che hanno studiato il magnetismo terrestre hanno cercato di rappresentare questi effetti con quelli di una o più barre magnetizzate, la cui posizione dei poli dovrebbe essere determinata. Gauss è stato il primo a esprimere la distribuzione del magnetismo terrestre in un modo perfettamente generale, sviluppando il potenziale in una serie di armoniche solide, di cui ha determinato i coefficienti per i primi quattro gradi. Questi coefficienti sono in numero di 24 : 3 per il primo grado, 5 per il secondo; 7 per il terzo e 9 per il quarto. Si trova che tutti questi termini sono necessari per dare una rappresentazione sufficientemente esatta dello stato attuale del magnetismo terrestre.

Trovare la parte della forza magnetica osservata che è dovuta alle cause esterne e quella che è dovuta alle cause interne

470. Supponiamo di aver ottenuto uno sviluppo del potenziale magnetico della Terra in armoniche sferiche, che, in ogni punto della superficie della Terra, sia in armonia con la grandezza e la direzione effettive; Gauss ha mostrato come l'osservazione della forza verticale permette di determinare se le forze magnetiche sono dovute a cause originate all'interno della superficie della Terra, come una magnetizzazione, o da correnti elettriche, o se una parte di queste forze è dovuta direttamente a cause esterne alla superficie terrestre.

Sia V il potenziale effettivo, sviluppato in una doppia serie di sferiche armoniche,

$$V = A_1 \frac{r}{a} + \dots + A_i \left(\frac{r}{a}\right)^i + B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} + \dots + B_i \left(\frac{r}{a}\right)^{-(i+1)}$$

La prima serie rappresenta il potenziale dovuto alle cause esterne, la seconda quello delle cause interne alla superficie della Terra.

Le osservazioni di forza orizzontale ci danno la somma di queste due serie per $r = a$, il raggio della Terra. Il termine di ordine i è

$$V_i = A_i + B_i$$

Le osservazioni della forza verticale danno

$$Z = \frac{dV}{dr}$$

e il termine di ordine i in Z è

$$aZ_i = iA_i - (i + 1) B_i$$

Pertanto la parte dovuta alle cause esterne è

$$A_i = \frac{(i + 1) V_i + aZ_i}{2i + 1}$$

e la parte dovuta alla cause interne alla Terra è

$$B_i = \frac{iV_i - aZ_i}{2i + 1}$$

Fin qui, si è calcolato lo sviluppo di V solo per il valore medio di V in certe epoche o nelle loro vicinanze. Non sembra che alcuna parte di questo valore medio sia dovuto a cause esterne alla Terra.

471. Non conosciamo ancora molto la forma dello sviluppo delle parti delle variazioni di V che dipendono dal Sole e dalla Luna, per poter determinare con questo metodo se una parte qualunque di queste variazioni è dovuta a una forza magnetica agente da fuori. Tuttavia, è certo, così come hanno mostrato i calcoli di MM. Stoney e Chambers, che la parte principale di queste variazioni non può essere dovuta a un'azione magnetica diretta del Sole o della Luna, supponendo che questi corpi siano magnetici¹.

472. Le principali variazioni della forza magnetica sulle quali sia stata richiamata l'attenzione sono le seguenti:

1. - Le variazioni regolari 1° Le variazioni solari, dipendenti dall'ora del giorno e dal periodo dell'anno;

2° Le variazioni lunari, dipendenti dall'angolo orario e dagli altri elementi della posizione della Luna;

3° Queste variazioni non si ripetono tutti gli anni, ma sembrano soggette a una variazione di più lungo periodo, di circa undici anni.

4° Inoltre, vi è nello stato del magnetismo terrestre un cambiamento secolare che continua dopo che si sono fatte osservazioni magnetiche e che produce negli elementi magnetici variazioni di ampiezza assai maggiore che alcune di quelle di periodo più breve.

473. A fianco di queste variazioni regolari, gli elementi magnetici sono sottoposti a perturbazioni improvvise, di importanza più o meno grande. Si è osservato che queste perturbazioni sono più frequenti in certi periodi e che quando vi sono grandi perturbazioni, le leggi delle variazioni regolari, ben distinte dai periodi di piccole perturbazioni, si trovano mascherate. Si è prestata quindi molta attenzione a queste perturbazioni, e si è osservato che quelle di un certo tipo si producono più frequentemente a certe ore del giorno, in certe stagioni, in certi intervalli di tempo, sebbene ogni perturbazione prese a sé sembra del tutto irregolare. Inoltre di queste perturbazioni più abituali, vi sono talvolta periodi con perturbazioni eccessive dove il magnetismo è disturbato per un giorno o due: sono dette tempeste magnetiche. Qualche volta si sono osservato nello stesso istante perturbazioni isolate in stazioni molto lontane.

M. Airy ha trovato che la maggior parte delle perturbazioni osservate a Greenwich corrispondono a correnti elettriche raccolte da elettrodi posti in terra nelle vicinanze, e che esse sono tali da essere causate dall'azione diretta sul magnete di corrente di terra che conserva la propria direzione e che circola in un filo posto al di sotto del magnete.

Si è riconosciuto che vi è ogni undici anni un periodo di perturbazione massima che appare coincidere con il periodo in cui le macchie del Sole sono più frequenti.

474. Il campo di ricerche dove ci ha portato lo studio del magnetismo terrestre è sia profondo che esteso.

¹Il professor Hornstein, di Praga, ha scoperto negli elementi magnetici un cambiamento periodico il cui periodo di 27,33 giorni è quasi esattamente uguale a quello della rivoluzione sinodica del Sole, come si è potuto dedurre dall'osservazione delle macchie del Sole vicino al suo equatore. È con questo metodo, che permette di scoprire la durata della rotazione della massa solida invisibile del Sole per mezzo dei suoi effetti sull'ago magnetizzato, che il magnetismo ha iniziato, per la prima volta, a pagare il suo debito all'Astronomia. (*Acad. de Vienne*, 15 giugno 1871; *Proc. R. S.*, 16 novembre 1871.)

Abbiamo visto che il Sole e la Luna agiscono sul magnetismo terrestre, ed è stato dimostrato che questa azione non si può spiegare supponendo che questi corpi siano magneti. Questa azione è quindi indiretta. Nel caso del Sole, una parte di questa azione potrebbe essere termica; ma, nel caso della Luna, non sapremmo far intervenire questa causa. Forse è possibile che l'attrazione di questi corpi, determinando tensioni nell'interno della Terra, produce (§ 447) cambiamenti nella magnetizzazione esistente e causa, per una sorta di fenomeno delle maree, variazioni semi diurne.

Ma tutte queste variazioni sono molto piccole rispetto ai grandi cambiamenti secolari del magnetismo terrestre.

Quale causa, esterna alla Terra o nelle sue profondità più nascoste, produce questi enormi cambiamenti del magnetismo terrestre che spostano lentamente il polo magnetico da una parte all'altra del globo? Quando consideriamo che l'intensità di magnetizzazione di questo immenso globo, la Terra, è del tutto confrontabile con ciò che produciamo con grande fatica nei nostri magneti di acciaio, questi enormi cambiamenti in un corpo così esteso ci obbligano a concludere che ignoriamo ancora uno dei più potenti agenti della natura, la cui attività si svolge nelle profondità della Terra la cui conoscenza ci è accessibile con così pochi mezzi.

ELETTROMAGNETISMO

9 Forza elettromagnetica

475. Numerosi osservatori avevano notato che, in certi casi, il magnetismo è sviluppato o distrutto negli aghi con scariche elettriche attraversanti questi aghi o passanti a fianco di essi, e avevano avanzato ipotesi diverse sulla relazione che esiste tra il magnetismo e l'elettricità; ma le leggi di questi fenomeni e la forma di questa relazione erano rimaste del tutto sconosciute fino al giorno in cui Hans Christian Ørsted¹, facendo a Copenaghen una lezione avanzata particolare per alcuni allievi, osservò che il filo collegante le estremità di una pila voltaica agiva su un magnete posto nelle vicinanze. Pubblicò questa scoperta in un articolo intitolato: *Experimenta circa effectum Conflictus Electrici in Acum Magneticam*, del 21 luglio 1820.

Si erano tentati senza successo esperimenti sulle relazioni tra il magnete e i corpi carichi di elettricità: è allora che Ørsted iniziò a determinare l'effetto di un filo scaldato da una corrente elettrica. Ma scoprì che la corrente stessa, e non il calore del filo, era la causa dell'azione, e che "la corrente elettrica agiva in modo da far ruotare", cioè che un magnete posto vicino a un filo attraversato da una corrente, tende a porsi perpendicolarmente al filo, e, se si pone il magnete attorno al filo, è la stessa estremità che rimane ruotata in avanti.

476. Si vede dunque che, nello spazio che circonda un filo attraversato da una corrente elettrica, un magnete è soggetto a forze che dipendono dalla posizione del filo e dall'intensità della corrente. Lo spazio nel quale queste forze agiscono può quindi essere considerato come un campo magnetico, e possiamo studiare nello stesso modo con cui abbiamo studiato il campo vicino a un comune magnete, esaminando la forma delle linee di forza magnetiche e misurando l'intensità della forza in ogni punto.

477. Iniziamo con il caso di un filo rettilineo di lunghezza infinita attraversato da una corrente. Se si immagina un uomo posto lungo il filo in modo che la corrente circoli dalla sua testa verso i piedi, un magnete liberamente sospeso davanti a questo uomo si dispone in modo tale che l'estremità normalmente diretta verso nord è ruotata verso destra.

Le linee di forza magnetiche sono in tutti i loro punti perpendicolari ai piani tracciati dal filo (fig. 21): queste sono quindi cerchi tracciati nei piani perpendicolari al filo che passa per il loro centro.

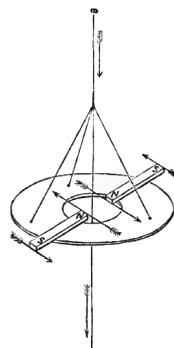


Fig. 21.

¹Si veda un'altra descrizione della scoperta in una lettera del professor Hansteen, *Vita di Faraday*, del Dr Bence Jones, t. II, p. 395.

Se si sposta lungo uno di questi cerchi da sinistra verso destra un polo di magnete che si dirige verso nord, questo polo sarà soggetto a un forza agente sempre nel verso del movimento. L'altro polo dello stesso magnete sarà soggetto a una forza di verso contrario.

478. Per confrontare queste forze, supponiamo il filo verticale e la corrente discendente; poniamo il magnete su un supporto in grado di ruotare liberamente attorno a un asse verticale coincidente con il filo. Si trova che, in queste condizioni, la corrente è senza azione per imprimere all'insieme dello strumento un moto di rotazione attorno all'asse; pertanto l'azione della corrente verticale sui due poli del magnete è tale che i momenti delle due forze rispetto alla corrente presa asse sono uguali e contrari.

Siano m_1 e m_2 le intensità dei due poli; r_1 e r_2 le loro distanze dall'asse del filo; T_1 e T_2 le intensità ai due poli della forza magnetica dovuta alla corrente.

La forza che agisce su m_1 è m_1T_1 , e, poiché è ad angolo retto con l'asse, il suo momento è $mm_1T_1r_1$. Analogamente, quello della forza che agisce sull'altro polo è $m_eT_2r_2$; e, poiché non si osserva movimento,

$$m_1T_1r_1 + m_2T_2r_2 = 0$$

Ma sappiamo che in tutti i magneti

$$m_1 + m_2 = 0$$

da cui

$$T_1r_1 = T_2r_2$$

cioè che la forza elettromagnetica, dovuta a una corrente rettilinea di lunghezza infinita, è perpendicolare alla corrente e varia in ragione inversa della sua distanza da questa corrente.

479. Poiché il prodotto Tr dipende dalla forza della corrente, può essere usato per misurare questa corrente. Questo metodo di misura differisce da quello basato sui fenomeni elettrostatici, e siccome dipende da fenomeni magnetici prodotti dalle correnti elettriche, è detto sistema elettromagnetico di misura. In tale sistema, se i è l'intensità

$$2i = Tr$$

480. Se se si prende il filo come asse z , le componenti rettangolari di T sono

$$X = -2i \frac{y}{r^2} \quad Y = 2i \frac{x}{r^2} \quad Z = 0$$

Qui $Xdx + Ydy + Zdz$ è un differenziale esatto, quello di

$$2i \arctan \frac{y}{x} + C$$

pertanto, come in numerosi casi precedenti, la forza magnetica del campo si può dedurre da una funzione potenziale; ma, qui, il potenziale è una funzione avente un'infinità di valori differenti tra loro di $4\pi i$. Le derivate del potenziale rispetto alle coordinate hanno in ogni punto un valore determinato e unico.

L'esistenza di una funzione potenziale per il campo che circonda una corrente elettrica non è un risultato evidente del principio di conservazione dell'energia; poiché, in ogni corrente effettivamente esistente, vi è costantemente un consumo dell'energia elettrica della pila per vincere la resistenza del filo; quindi, a meno che non si conosca molto esattamente l'ammontare di tale spesa, si può supporre che una parte dell'energia della pila può essere impiegata per produrre lavoro quando si sposta un magnete lungo una curva chiusa. Infatti, se si sposta un polo magnetico m lungo una curva chiusa che circonda il filo, la quantità $4\pi mi$ di lavoro è realmente effettuata. È solo per i circuiti chiusi che non comprendono fili, che l'integrale della

forza lungo la curva diviene nullo. Dobbiamo quindi, per ora, considerare che la legge della forza e l'esistenza del potenziale trovano la loro dimostrazione nell'esperienza descritta.

481. Se consideriamo lo spazio che circonda un conduttore rettilineo indefinito, vediamo che è uno spazio cilindrico, poiché si chiude su se stesso. Se immaginiamo un piano o un'altra superficie, iniziando dalla linea retta e che si estende da un solo lato fino all'infinito, questa superficie potrà essere considerata come un diaframma che riduce lo spazio ciclico a essere aciclico. Se da un punto a un altro si tracciano linee che non tagliano il diaframma e se si definisce il potenziale come l'integrale della forza lungo una qualunque di queste linee, il potenziale in un punto qualunque avrà un valore definito e unico.

Il campo magnetico è allora identico da ogni punto di vista a quello che sarebbe dovuto a un foglio magnetico di potenza i coincidente con questa superficie. Questo foglio è limitato su un bordo dalla retta infinita, e le altre parti del suo contorno sono a una distanza infinita dalla parte del campo considerato.

482. In tutte le esperienze che si possono realizzare, la corrente forma un circuito chiuso di dimensioni finite; confronteremo quindi l'azione di un circuito chiuso con quella di un foglio magnetico limitato dal circuito.

Da numerose esperienze, le più antiche delle quali sono quelle di Ampère, e le più esatte quelle di Weber, hanno stabilito che una distanza che è grande rispetto alle dimensioni del circuito, l'azione magnetica di un piccolo circuito piano è la stessa di quella di un magnete il cui asse è normale al piano del circuito, e il cui momento magnetico è uguale all'area del circuito moltiplicata per l'intensità di corrente.

Se si suppone che lo spazio compreso dal circuito sia chiuso da una superficie avente il circuito stesso come limite e formando così da diaframma, e si sostituisce alla corrente elettrica un foglio magnetico di potenza i coincidente con la superficie, l'azione su tutti i punti lontani è identica a quella della corrente.

483. Finora abbiamo supposto le dimensioni del circuito piccole rispetto alla distanza di una qualunque delle sue parti dal punto del campo esaminato. Ammettiamo ora per il circuito una forma e una grandezza qualunque, e consideriamo la sua azione in un punto non posto sul filo conduttore. Il metodo seguente, che ha importanti applicazioni geometriche, è stato introdotto per questo scopo da Ampère.

Consideriamo una superficie S limitata dal circuito e non passante per il punto P ; su questa superficie, tracciamo due serie di linee che si intersecano tra loro, in modo da dividerla in parti elementari, le cui dimensioni siano piccole rispetto alla loro distanza da P e ai raggi di curvatura della superficie.

Supponiamo che attorno a ciascuno di questi elementi circoli una corrente di intensità i , essendo il verso della corrente in tutti questi elementi la stessa del circuito iniziale.

Su ognuna delle linee che formano la separazione di due elementi contigui passano due correnti uguali, di intensità i e di versi opposti.

L'effetto di due correnti uguali e contrarie poste nello stesso luogo è rigorosamente nullo, comunque si esaminino le correnti. Di conseguenza, il loro effetto magnetico è nullo. Le sole parti dei circuiti elementari che non sono neutralizzate in questo modo sono quelle che coincidono con il circuito iniziale. L'effetto totale dei circuiti elementari è quindi equivalente a quello del circuito iniziale.

484. Ogni circuito elementare può essere considerato come un piccolo circuito piano la cui distanza da P è grande rispetto alle sue dimensioni; gli si può quindi sostituire un foglio magnetico di potenza i , il cui contorno coincide con il circuito elementare. L'effetto magnetico di questo elemento di foglio su P è equivalente all'effetto della corrente iniziale. L'insieme degli elementi del foglio costituisce un foglio magnetico di potenza i , coincidente con la superficie S e

limitato dal circuito iniziale, e l'azione magnetica dell'intero foglio sul punto P è equivalente a quella del circuito.

È chiaro che l'azione del circuito è indipendente dalla forma della superficie S , che si è tracciato in modo assolutamente arbitrario per riempire l'area compresa nel circuito. Vediamo da ciò che l'azione di un foglio magnetico dipende solo dalla forma della curva limite e non dalla forma del foglio stesso. Questo risultato è già stato ottenuto al § 410; ma è interessante vedere come lo si possa dedurre da considerazioni elettromagnetiche.

Pertanto, in un punto qualunque, la forza magnetica dovuta al circuito è identica in modulo e direzione a quella che è dovuta a un foglio magnetico limitato dal circuito e non passante per il punto, essendo la potenza del foglio numericamente uguale all'intensità di corrente. La direzione della corrente nel circuito e quella della magnetizzazione nel foglio sono legate dalla seguente relazione: Un uomo ritto in piedi, con i piedi sulla faccia del foglio, che chiamiamo positiva, e che tende a girarsi verso nord, vedrà la corrente circolare davanti a sé da destra a sinistra.

485. Ma il potenziale magnetico del circuito differisce da quello del foglio per i punti che sono parte del foglio.

Sia ω l'angolo solido sotteso nel punto P dal foglio, contato positivamente se è il lato positivo o australe ad essere vicino a P : il potenziale magnetico in un punto non posto sul foglio stesso è $\omega\phi$, essendo ϕ la potenza del foglio. Per un punto situato sul foglio, possiamo supporre questo diviso in due parti di potenza ϕ_1 e ϕ_2 , dove $\phi_1 + \phi_2 = \phi$, e tali che il punto sia sulla faccia positiva di ϕ_1 e sulla faccia negativa di ϕ_2 . Il potenziale in questo punto è

$$\omega(\phi_1 + \phi_2) - 4\pi\phi_2$$

Dal lato negativo del foglio, il potenziale diviene $\phi(\omega - 4\pi)$. Pertanto, in questo caso, il potenziale è continuo e ha un valore unico e determinato. D'altra parte, nel caso di una corrente elettrica, il potenziale in un punto non posto sul filo conduttore è $i\omega$, essendo i l'intensità di corrente e ω l'angolo solido sotteso dal circuito nel punto considerato, il quale si conta positivamente se la corrente, vista dal punto P , si muove in senso antiorario.

La quantità $i\omega$ è una funzione avente un'infinità di valori, la cui differenza comune è $4\pi i$; ma le derivate di $i\omega$, rispetto alle coordinate, hanno, in ogni punto dello spazio, un valore unico e determinato.

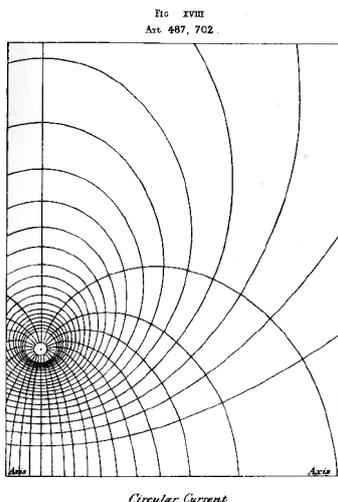
486. Se si pone nelle vicinanze di un circuito elettrico un magnete solenoidale lungo, sottile e flessibile, le estremità nord e sud del magnete tendono a muoversi in senso inverso attorno al filo, e, se fossero libere di obbedire alla forza magnetica, il magnete finirebbe per arrotolarsi attorno al filo, in modo da formare una bobina chiusa. Se fosse possibile ottenere un magnete avente un solo polo o poli di forze diverse, questo magnete prenderebbe attorno a una corrente un movimento di rotazione continuo, sempre nella stessa direzione; ma, siccome i poli di un magnete sono sempre uguali e contrari, questo caso non si può mai presentare. Tuttavia Faraday ha mostrato come si possa produrre la rotazione continua di un polo magnetico attorno a una corrente, permettendo a uno dei poli di ruotare attorno alla corrente, mentre l'altro non lo può. Affinché questa operazione si possa ripetere indefinitamente, bisogna che una volta a ogni rivoluzione il corpo del magnete passi da un lato all'altro della corrente; e per realizzare tale condizione senza interrompere il flusso di elettricità, si divide la corrente tra due rami, di modo che, essendo uno di essi tagliato per lasciar passare il magnete, la corrente continui a passare nell'altro ramo. A tale scopo, Faraday impiegò una conca circolare piena di mercurio, rappresentata in fig. 23, § 491. La corrente tra il filo AB , si divide in B , e, dopo aver percorso gli archi BPQ e BRP , si riforma in P e lascia la conca per il filo PO , la vaschetta di mercurio O e un filo verticale posto al di sotto di O , per il quale sfugge.

Il magnete, non rappresentato in figura, è montato in modo da poter ruotare attorno a un asse verticale passante per O , e il filo OP ruota con lui. Il magnete passa per l'apertura della conca,

un polo, ad esempio il nord, essendo al di sotto del piano della conca e l'altro sopra. Quando il magnete e il filo OP ruotano attorno all'asse verticale, la corrente passa gradualmente dal ramo della conca che è davanti al magnete a quello che è dietro, di modo che a ogni rivoluzione completa il magnete passa da una parte all'altra della corrente. Il polo nord del magnete ruota attorno alla corrente discendente nei versi nord-est-sud-ovest; e, se ω e ω' sono gli angoli solidi (senza tener conto dei segni) che la conca circolare sottende ai due poli, il lavoro della forza elettromagnetica per rivoluzione completa è

$$mi(4\pi - \omega - \omega')$$

essendo m la potenza di ogni polo e i l'intensità della corrente².



487. Proviamo ora a farci un'idea dello stato del campo magnetico vicino a un circuito elettrico lineare.

Supponiamo trovato per ogni punto dello spazio il valore dell'angolo solido ω sotteso dal circuito, e supponiamo descritte le superfici per la quali ω è costante. Queste superfici saranno equipotenziali. Ognuna di esse sarà limitata dal circuito e due superfici qualunque si taglieranno sul circuito sotto un angolo $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$.

²Questo problema si può discutere nel modo seguente: Riferiamoci alla fig. 23, § 491; prendiamo OP in una posizione qualunque, e introduciamo con il pensiero correnti che si equilibrano, i lungo BO , x e y lungo OB . Quando il magnete effettua una rivoluzione completa, nessun lavoro è eseguito sul polo sud dalla corrente i , che si suppone passare per $ABOZ$, poiché questo polo descrive una curva chiusa che non comprende la corrente. Il polo nord, al contrario, descrive una curva che comprende la corrente, e il lavoro compiuto su questo polo è $4\pi mi$. Dobbiamo ora valutare gli effetti di correnti x nel circuito BPO e y nel circuito $BRPO$. Il potenziale del polo nord, che è al di sotto del piano di questi circuiti, sarà

$$-mx\omega_0 + my(\omega - \omega_0)$$

e quello del polo sud

$$-mx\omega'_0 - my(-\omega' + \omega'_0)$$

dove ω_0 e ω'_0 indicano gli angoli solidi sottesi ai due poli da BOP e ω e ω' quelli che sono sottesi dalla conca circolare. Il potenziale risultante è

$$my(\omega + \omega') - mi(\omega_0 + \omega'_0)$$

Pertanto, se OP , partendo dalla sua posizione attuale, descrive una rivoluzione completa nella direzione di $NESO$, il potenziale cambierà di $-mi(\omega + \omega')$. Il lavoro compiuto dalla correnti è quindi come quello che si indica nel testo.

La Tavola XVIII rappresenta una sezione delle superfici equipotenziali dovute a una corrente circolare. Il piccolo cerchio rappresenta la sezione del filo conduttore e la linea orizzontale in basso nella figura è la perpendicolare tracciata al piano della corrente circolare dal centro di questo cerchio. Le superfici equipotenziali tracciate, nel numero di 24, corrispondono a valori di ω che differiscono di $\frac{\pi}{6}$; queste sono superfici di rivoluzione aventi questa linea per asse comune. Queste sono evidentemente figure appiattite, schiacciate lungo la direzione dell'asse. Si incontrano lungo il circuito sotto angoli di 15° .

La forza che agisce su un polo magnetico posto in un punto di una superficie equipotenziale è perpendicolare a questa superficie e varia in ragione inversa della distanza delle superfici consecutive. Le curve chiuse che circondano la sezione del filo, sulla Tavola XVIII, sono linee di forza. Esse sono tratte dalla Memoria di Sir William Thomson, sul *On Vortex Motion*³. (Si veda anche § 702)

Azione di un circuito elettrico su un sistema magnetico

488. Siamo ora in grado di dedurre dalla teoria dei fogli magnetici l'azione di una corrente elettrica su un sistema magnetico qualunque posto nelle vicinanze. Costruiamo, infatti, un foglio magnetico, la cui potenza sia numericamente uguale all'intensità di corrente, il cui contorno coincide in posizione con il circuito e che non incontra alcuna delle parti del sistema magnetico; l'azione di questo foglio sul sistema magnetico è identica a quella della corrente elettrica.

Reazione del sistema magnetico sulla corrente elettrica

489. Applicando a quanto detto il principio che l'azione e la reazione sono uguali e opposti, concludiamo che l'azione meccanica del sistema magnetico sulla corrente elettrica è identico alla sua azione su un foglio magnetico avente il circuito per contorno.

L'energia potenziale di un foglio magnetico di potenza ϕ , posto in un campo di forza magnetica il cui potenziale è V , è, dal § 419

$$M = \phi \iint \left(l \frac{dV}{dx} + m \frac{dV}{dy} + n \frac{dV}{dz} \right) dS$$

dove l, m, n sono i coseni direttori della normale tracciata dalla faccia positiva dell'elemento dS al foglio e dove l'integrazione è estesa a tutta la superficie di questo foglio.

Ora l'integrale

$$N = \iint (la + mb + nc) dS$$

dove a, b, c sono le componenti dell'induzione magnetica, rappresenta la quantità di induzione magnetica che si produce attraverso il foglio, o, per impiegare il linguaggio di Faraday, il numero, contato algebricamente, delle linee di induzione magnetica che attraversano il foglio dalla sua faccia negativa alla positiva, essendo le linee che lo attraversano in verso contrario contate negativamente.

Ricordiamo che il foglio non appartiene al sistema magnetico al quale è dovuto il potenziale V , e che, di conseguenza, la forza magnetica è uguale all'induzione magnetica, abbiamo

$$a = -\frac{dV}{dx} \quad b = -\frac{dV}{dy} \quad c = -\frac{dV}{dz}$$

e possiamo scrivere il valore di M

$$M = -\phi N$$

³*Trans. R. S. Edin.*, t. XXV, p. 217; 1869.

Se δx_1 rappresenta uno spostamento del foglio, e X_1 la forza che agisce su di esso per favorire questo spostamento, secondo il principio della conservazione dell'energia, si ha

$$X_1 \delta x_1 + \delta M = 0$$

o

$$X = \phi \frac{dN}{dx}$$

Abbiamo così determinato la natura della forza che corrisponde a uno spostamento dato dal foglio. Essa favorisce o contrasta questo spostamento, secondo che cresce o diminuisce il numero N di linee di induzione che attraversano il foglio.

La stessa cosa è vera per il circuito elettrico equivalente. Uno spostamento di questo circuito è favorito o contrastato, a seconda che cresce o diminuisce il numero di linee di induzione che attraversano il circuito nel verso positivo.

Si deve ricordare che, su una linea di induzione, il verso positivo è quello lungo il quale il polo nord di un magnete tende a muoversi lungo la linea, e che una linea di induzione attraversa il circuito nel verso positivo, se entra nel verso della linea di induzione e quello della corrente di elettricità vetrosa, esiste la stessa relazione che tra il movimento longitudinale e di rotazione di una vite destrorsa. (Si veda § 25.)

490. È chiaro che la forza corrispondente a uno spostamento dell'insieme del circuito si può dedurre immediatamente dalla teoria dei fogli magnetici. Ma non è tutto: se una parte del circuito è flessibile, di modo che essa si possa spostare indipendentemente dal resto del circuito, possiamo rendere il bordo del foglio capace dello stesso tipo di spostamento, ritagliando la sua superficie in un numero sufficiente di parti collegate da giunture flessibili. Da ciò concludiamo che ogni spostamento di una parte del circuito in una direzione data, che fa aumentare il numero di linee di induzione che attraversano il circuito, sarà favorito dalla forza elettromagnetica agente sul circuito.

Di conseguenza, ogni parte del circuito è sollecitata da una forza tendente a fargli attraversare le linee di induzione, in modo che un maggior numero di esse siano comprese nel contorno del circuito e il lavoro di questa forza durante questo spostamento è uguale al prodotto del numero di linee di induzione aggiuntive per l'intensità di corrente.

Supponiamo che l'elemento di circuito ds , nel quale passa la corrente di intensità i , si sposti parallelamente a se stesso per un lunghezza δx ; esso genera un'area a forma di parallelogrammo i cui lato sono paralleli a ds e a δx .

Se \mathfrak{B} rappresenta l'induzione magnetica e ϵ l'angolo della sua direzione con la normale al parallelogrammo, il valore dell'aumento di N corrispondente allo spostamento si ottiene moltiplicando l'area del parallelogrammo per $\mathfrak{B} \cos \epsilon$. La risultante di questa operazione è raffigurata geometricamente dal volume del parallelepipedo i cui spigoli rappresentano in modulo e in direzione δx , ds e \mathfrak{B} , volume che deve essere contato positivo se un mobile, descrivente questi tre spigoli nell'ordine indicato, ruota attorno alla diagonale del parallelepipedo nel verso orario. Il volume di questo parallelepipedo è uguale a $X \delta x$.

Se θ è l'angolo compreso tra ds e \mathfrak{B} , l'area della faccia corrispondente è

$$ds \mathfrak{B} \sin \theta$$

e se η è l'angolo che lo spostamento δx forma con la normale a questa faccia, il volume del parallelepipedo è

$$ds \mathfrak{B} \sin \theta \delta x \cos \eta = \delta N$$

Ora

$$X \delta x = i \delta N = i ds \mathfrak{B} \sin \theta \delta x \cos \eta$$

e

$$X = ids\mathfrak{B} \sin \theta \cos \eta$$

è la componente lungo la direzione della forza che agisce su ds .

Questa forza è pertanto perpendicolare al parallelogrammo e uguale a

$$ids\mathfrak{B} \sin \theta$$

Questa è l'area di un parallelogrammo i cui lati sono in modulo e direzione ids e \mathfrak{B} . La forza che agisce su ds è quindi rappresentata in modulo dall'area di questo parallelogrammo, e in direzione dalla normale tracciata al suo piano nel verso del movimento longitudinale di una vite destrorsa, di cui si farà ruotare l'impugnatura della direzione della corrente ids verso quella dell'induzione magnetica \mathfrak{B} .

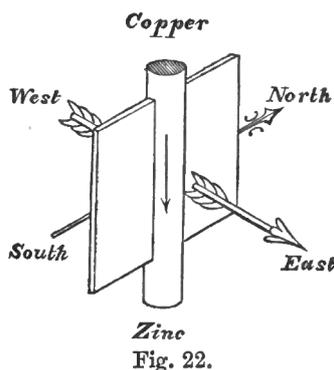


Fig. 22.

Nel linguaggio dei quaternioni, si può esprimere la direzione e il modulo di questa forza dicendo che è la parte vettoriale del risultato ottenuto moltiplicando il vettore ids , che è l'elemento di corrente, per il vettore \mathfrak{B} che è l'induzione magnetica.

491. Abbiamo così completamente determinato la forza che agisce su una porzione di circuito elettrico posto in un campo magnetico. Se il circuito si sposta in un modo qualunque, di modo che dopo aver preso forme e posizioni diverse ritorna alla sua posizione iniziale, rimanendo l'intensità di corrente costante durante questo movimento, il lavoro totale effettuato dalle forze elettromagnetiche è nullo. Poiché è così per ogni ciclo di movimento del circuito, segue che è impossibile mantenere per mezzo di forze elettromagnetiche un movimento continuo di rotazione in una parte di un conduttore lineare ad intensità costante, malgrado le resistenze di attrito, ecc.

Ma è possibile produrre una rotazione continua, purché in un punto del suo percorso la corrente elettrica passi dall'uno all'altro dei conduttori che scorrono l'uno sull'altro.

Quando un circuito comporta un contatto per scorrimento di un conduttore sulla superficie di un solido o di un liquido, non lo si può più considerare come un sistema di due o di un maggior numero di circuiti a intensità variabile, tra i quali la corrente è distribuita in modo che quelli per i quali N cresce siano attraversati dalle correnti nel verso positivo, e quelli per i quali N decresce nel verso negativo.

Così, nel dispositivo rappresentato in fig. 23, OP è un conduttore mobile e una delle sue estremità giace in un bicchiere di mercurio O , mentre l'altra si immerge in una conca circolare di mercurio, concentrica a O .

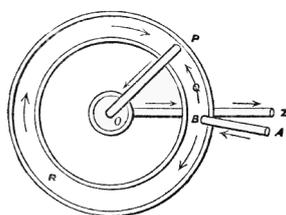


Fig. 23.

La corrente arriva da AB , si divide nella conca circolare in due parti, di cui una, x , segue l'arco BOP , mentre l'altra, y , segue BRP . Queste correnti si riuniscono in P , seguono il conduttore mobile PO e l'elettrodo OZ fino al polo zinco della pila. L'intensità di corrente lungo OP e OZ è $x + y$ o i .

Qui, abbiamo descritto due circuiti: $ABQPOZ$ dove l'intensità è x , circolante nel verso positivo, e $ABRPOZ$ dove l'intensità è y , circolante nel verso negativo.

Sia \mathbf{B} l'induzione magnetica, che supporremo diretta verso l'alto, normalmente al piano del cerchio.

Mentre OP si sposta di un angolo θ in verso antiorario, l'area del primo circuito cresce di $\frac{1}{2}\overline{OP}^2\theta$ e quella del secondo circuito della stessa quantità. Poiché la forza della corrente nel primo circuito è x , il lavoro compiuto è

$$\frac{1}{2}x\overline{OP}^2\theta\mathfrak{B}$$

e poiché la forza della corrente nel secondo circuito è $-y$, il lavoro compiuto da essa è

$$-\frac{1}{2}y\overline{OP}^2\theta\mathfrak{B}$$

Il lavoro totale compiuto è quindi

$$\frac{1}{2}(x + y)\overline{OP}^2\theta\mathfrak{B}$$

o

$$\frac{1}{2}i\overline{OP}^2\theta\mathfrak{B}$$

che dipende solo dalla forza della corrente in PO . Pertanto, se i è mantenuto costante, l'asta OP si sposta tutto attorno al cerchio sotto l'azione di una forza costante il cui momento è

$$\frac{1}{2}i\overline{OP}^2\mathfrak{B}$$

Se, come nelle latitudini settentrionali, \mathfrak{B} è diretto verso il basso e se la corrente è diretta verso l'interno del cerchio, la rotazione avviene in senso negativo, cioè nel verso $PQBR$.

492. Abbiamo ora il modo di passare dall'azione reciproca di magneti e correnti all'azione di una corrente su un'altra; poiché sappiamo che le proprietà magnetiche di un circuito elettrico C_1 , relativamente a un sistema magnetico M_2 , sono identiche a quelle di un foglio magnetico S_1 il cui contorno coincide con il circuito e la cui potenza è numericamente uguale all'intensità di corrente elettrica. Supponiamo che il sistema magnetico M_2 consista di un foglio magnetico S_2 ; l'azione reciproca di S_1 e S_2 sarà identica a quella di S_1 e di un circuito C_2 , coincidente con il contorno di S_2 e avente un'intensità numericamente uguale alla potenza di S_2 e quest'ultima azione è identica a quella che si eserciterebbe tra C_1 e C_2 .

Pertanto l'azione reciproca di due correnti C_1 e C_2 è identica a quella dei fogli magnetici corrispondenti S_1 e S_2 .

Abbiamo già studiato, al § 423, l'azione reciproca di due fogli magnetici limitati dalle curve chiuse s_1 e s_2 . Se poniamo

$$M = \int_0^{s_2} \int_0^{s_1} \frac{\cos \epsilon}{r} ds_1 ds_2$$

dove ϵ è l'angolo compreso tra le direzioni degli elementi ds_1 e ds_2 e r la loro distanza, ed essendo l'integrazione estesa una volta attorno a s_1 e l'altra attorno a s_2 ; e se chiamiamo M il

potenziale delle due curve chiuse s_1 e s_2 , l'energia potenziale di due fogli magnetici di potenza i_1 e i_2 limitati dai due circuiti è

$$-i_1 i_2 M$$

e la forza X , che favorisce uno spostamento δx qualunque, è

$$i_1 i_2 \frac{dM}{dx}$$

Si può dedurre da questo risultato tutta la teoria della forza che agisce su una porzione qualunque di circuito elettrico, sotto l'influenza di un altro circuito elettrico.

493. Il metodo che abbiamo seguito in questo Capitolo è quello di Faraday. Invece di iniziare, come faremo, dall'esempio di Ampère, nel capitolo successivo, dall'azione diretta di una porzione di circuito su una porzione di un altro circuito, abbiamo mostrato dapprima che un circuito produce su un magnete lo stesso effetto di un foglio magnetico; in altre parole, abbiamo determinato la natura del campo magnetico dovuto al circuito. Poi, abbiamo mostrato che un circuito posto in un campo magnetico è soggetto alla stessa forza di un foglio magnetico. Abbiamo così determinato la forza che agisce su un circuito posto in un campo magnetico qualsiasi. Infine, supponendo il campo magnetico dovuto a una seconda corrente elettrica, abbiamo determinato l'azione di un circuito su tutta o una parte di un altro circuito.

494. Applichiamo questo metodo al caso di una corrente rettilinea di lunghezza infinita, agente su una porzione di conduttore rettilineo parallelo.

Supponiamo che nel primo conduttore circoli una corrente i diretta verticalmente dal basso in alto. In questo caso, il polo nord di un ago magnetizzato ruota verso la destra di un uomo posto lungo l'asse della corrente e guardante l'ago.

Le linee di induzione magnetica sono quindi cerchi orizzontali aventi il loro centro sull'asse, e sulle quali la direzione positiva è nord, est, sud, ovest.

Sia un'altra corrente verticale discendente posta a ovest della prima. Le linee di induzione magnetica dovute alla prima corrente sono dirette verso il nord nei punti dove passa il secondo. La direzione della forza che agisce su quest'ultima è determinata dal movimento di una vite a destra la cui testa ruoterebbe dal nadir, direzione della corrente, verso nord, direzione dell'induzione magnetica; ora, in questo caso, la vite si muove verso est, cioè la forza agente sulla seconda corrente è diretta verso la prima; o, in generale, poiché i fenomeni dipendono solo dalle posizioni relative delle correnti, due correnti parallele e dello stesso verso si attraggono.

Si mostrerà pure che due correnti parallele e di verso contrario si respingono.

495. L'intensità dell'induzione magnetica, alla distanza r da una corrente rettilinea di intensità i , p , come abbiamo mostrato al § 479,

$$2 \frac{i}{r}$$

Pertanto, una parte del secondo conduttore parallelo al primo e attraversato da una corrente i' nello stesso verso è attratta verso il primo da una forza

$$F = 2i i' \frac{a}{r}$$

dove a è la lunghezza della parte considerata e r la sua distanza dal primo conduttore.

Poiché il rapporto di a con r è una quantità numerica indipendente dal valore assoluto di queste linee, il prodotto di due intensità misurate in misura elettromagnetica deve avere le dimensioni di una forza. Di conseguenza, le dimensioni della corrente unitaria sono

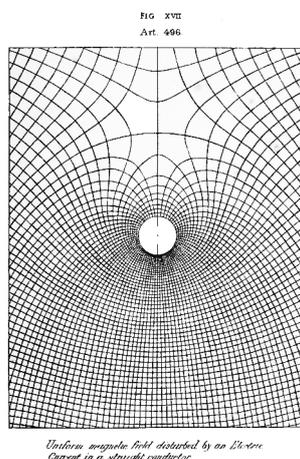
$$[i] = [F^{\frac{1}{2}}] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

496. Un altro metodo per determinare la direzione della forza che agisce su una corrente si deduce dalla considerazione della relazione che esiste tra l'azione magnetica della corrente e quella di altri magneti e correnti.

Se, da un lato del filo che attraversa la corrente, l'azione magnetica dovuta a questa corrente è nello stesso verso, o quasi, dell'azione dovuta ad altre correnti, dall'altro lato del filo queste forze sono di verso contrario o quasi; e la forza che agisce sul filo è diretta dal lato dove le forze si sommano le une alle altre verso quella dove esse sono opposte.

Così, una corrente che va dall'alto in basso essendo posta in un campo di forza magnetico diretto verso nord, la sua azione magnetica sarà diretta da nord verso ovest e da sud verso est. Pertanto le forze si sommano dal lato ovest, si contrastano dal lato est, e, di conseguenza, la corrente è soggetta all'azione di una forza diretta da ovest verso est. (Si veda fig. 22, §. 490).

Sulla Tavola XVII, il piccolo cerchio rappresenta la sezione del filo che conduce la corrente discendente, posto in un campo di forza magnetico uniforme diretto verso il lato sinistra dello schema. La forza magnetica è maggiore sotto il filo che sopra; il filo è quindi spinto dal basso verso l'alto della figura.



497. Se due correnti sono nello stesso piano, ma non sono parallele, si può applicare lo stesso principio. Supponiamo che uno dei conduttori sia un filo rettilineo indefinito, posto in un piano del foglio che si suppone orizzontale. A destra della corrente, la forza magnetica agisca dall'alto in basso, e a sinistra dal basso in alto; la stessa cosa è vera riguardo alla forza magnetica dovuta a una piccola parte di una seconda corrente posta nello stesso piano. Se questa seconda corrente è a destra della prima, le forze si sommano alla sua destra e si sottraggono alla sua sinistra. Pertanto, questa seconda corrente sarà sottoposta a una forza tendente a spostarla dalla sua destra verso sinistra, l'intensità di questa forza dipendente solo dalla posizione della seconda corrente, e non dalla sua direzione. Se la seconda corrente è a sinistra della prima, sarà spinta da sinistra a destra.

Così, se la seconda corrente ha lo stesso verso della prima, è attratta; se è di verso contrario, è respinta; se è perpendicolare alla prima e si muove allontanandosi da essa, è spinta nella direzione della prima corrente, se le è perpendicolare e si muove verso di essa, è spinta in una direzione opposta a quella della prima corrente.

Per studiare le azioni reciproche delle due correnti, non è necessario riferirsi alle relazioni che esistono tra il magnetismo e l'elettricità, e che abbiamo cercato di rappresentare servendoci di una vite destrorsa. Anche se avessimo dimenticato queste relazioni, si otterrebbero risultati esatti, a condizione di collegarsi invariabilmente a una delle due forme che può assumere la relazione.

498. Ricapitoliamo ora i fenomeni magnetici dovuti alla corrente elettrica, almeno per come li abbiamo studiati finora.

Possiamo immaginare il circuito elettrico come formato da una pila voltaica e da un filo collegato alle sue estremità, o da un dispositivo termo elettrico, o da una bottiglia di Leyda e da un filo che congiunge l'armatura positiva a quella negativa, o da qualsiasi altra disposizione che fornisce una corrente elettrica lungo un percorso determinato.

La corrente produce nelle sue vicinanze fenomeni magnetici.

Se si traccia una curva chiusa qualunque, e si prende lungo tutta questa curva l'integrale della forza magnetica, questo integrale è nullo se la curva chiusa e il circuito non sono interlacciati; ma se lo sono, di modo che la corrente i passa attraverso la curva chiusa, l'integrale è $4\pi i$; esso è positivo se il verso dell'integrazione lungo la curva chiusa è quello secondo il quale un osservatore, attraversando la curva nel verso della corrente, vedrebbe muoversi le lancette di un orologio. Per una persona che si spostasse lungo la curva chiusa nel verso dell'integrazione e che attraversasse il circuito elettrico, il verso della corrente sarebbe allora quello orario. Possiamo esprimere questo fatto in un altro modo dicendo: la relazione tra le direzioni di due curve è rappresentata da una vite destrorsa tracciata attorno alla corrente elettrica e da una vite destrorsa attorno alla curva chiusa. Se, quando si sposta sul filetto di una delle viti, il verso di rotazione coincide con la direzione positiva dell'altra, l'integrale è positivo; nel caso contrario è negativo.

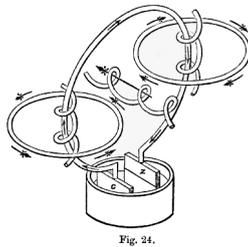


Fig. 24.

Relazione tra la corrente elettrica e l'induzione magnetica, rappresentata con una vite destrorsa

499. Note. - L'integrale $4\pi i$ dipende solo dall'intensità della corrente e non da altre cose. Non dipende dalla natura del conduttore attraversato dalla corrente, metallo, elettrolita o conduttore imperfetto. Abbiamo motivo di credere che, anche quando non vi è una conduzione propriamente detta, ma solo variazione dello spostamento elettrico, come nel vetro di una bottiglia di Leyda mentre si carica o si scarica, l'effetto magnetico del movimento elettrico è esattamente lo stesso.

Il valore dell'integrale $4\pi i$ non dipende nemmeno dal mezzo nel quale è stata tracciata la curva chiusa. Esso rimane lo stesso, sia che la curva sia tracciata interamente nell'aria o che attraversi un magnete o del ferro dolce, o qualsiasi altra sostanza paramagnetica o diamagnetica.

500. Quando un circuito è posto in un campo magnetico, l'azione reciproca della corrente e degli altri elementi del campo dipende dall'integrale dell'induzione magnetica su una superficie qualunque limitata dal circuito. Se, dando un certo movimento a tutta o a una parte del circuito, si può aumentare questo integrale, vi sarà una forza meccanica tendente a spostare nel modo in questione l'insieme o questa parte del conduttore.

Il movimento del conduttore, che aumenta l'integrale, è un movimento perpendicolare alla direzione della corrente e che taglia le linee di induzione.

Se si traccia un parallelogrammo i cui lati siano paralleli e proporzionali all'intensità di corrente e all'induzione magnetica in un punto dato, la forza che agisce sull'unità di lunghezza del conduttore è numericamente uguale all'area di questo parallelogrammo ed è perpendicolare al suo piano; essa agisce nel verso del movimento longitudinale di una vite destrorsa la cui testa ruota dalla direzione della corrente verso quella dell'induzione magnetica.

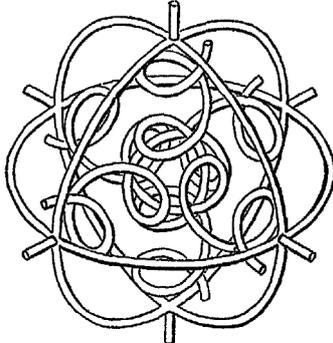
Abbiamo quindi una nuova definizione elettromagnetica di una linea di induzione magnetica: è la linea alla quale è sempre perpendicolare la forza che agisce sul conduttore.

Si può così definirla una linea lungo tutta la quale un conduttore attraversato da una corrente elettrica non è soggetto ad alcuna forza.

501. Bisogna ricordare che la forza meccanica che spinge un conduttore attraversato da una corrente attraverso le linee di forza magnetica, agisce non sulla corrente elettrica, ma sul conduttore che la trasmette. Se il conduttore è un disco ruotante o un fluido, si sposta obbedendo a questa forza, e questo movimento può essere o non essere accompagnato da un cambiamento di posizione della corrente elettrica trasmessa dal conduttore. Ma se la corrente stessa può liberamente scegliere il suo percorso attraverso la massa di un conduttore fisso o in un reticolo di fili, quando si fa agire sul sistema una forza magnetica costante, questo cammino non è modificato in un modo permanente; dopo che certi fenomeni transitori, detti correnti di induzione, sono terminati, si trova che la distribuzione di corrente è la stessa come se non avesse agito alcuna forza magnetica.

La sola forza che agisce sulle correnti elettriche è la forza elettromotrice e bisogna distinguerle dalla forza meccanica studiata in questo Capitolo.

Fig. 25.



Relazione tra le direzioni positive del movimento e della rotazione, rappresentate da tre viti destrorse

10 Ricerche di Ampère sull'azione reciproca di due correnti

502. Abbiamo esaminato, nel Capitolo precedente, la natura del campo magnetico prodotto da una corrente elettrica e l'azione meccanica che si esercita su un conduttore attraversato da una corrente e posto in un campo magnetico. Abbiamo perciò considerato l'azione di un circuito elettrico su un altro, determinando l'azione esercitata sul primo dal campo magnetico del secondo. Ma l'azione di un circuito su un altro è stata studiata, per la prima volta, da Ampère, con un metodo diretto, quasi subito dopo la pubblicazione della scoperta di Oersted. Diamo sommario del metodo di Ampère e riprenderemo, nel Capitolo successivo, il metodo seguito in questo Trattato.

Le idee che hanno guidato Ampère si ricollegano al sistema che ammette l'azione diretta a distanza, e vedremo che una conseguenza notevole delle speculazioni e ricerche fondate su queste idee è stata sviluppata da Gauss, Weber, J. Neumann, Riemann, Betti, C. Neumann, Lorenza e da altri ancora, con risultati importanti, sia per la scoperta di nuovi fenomeni sia per la formazione di una teoria dell'elettricità. (Si veda § 846-868).

Le idee che ho provato a seguire suppongono che un'azione che si propaga progressivamente in un mezzo. Esse sono state molto sostenute da Faraday; e mi sono proposto, in numerose pubblicazioni, di svilupparle sotto forma matematica e di confrontare i risultati così ottenuti con i fatti noti. Da un punto di vista filosofico, confrontando i risultati dei due metodi i cui principi base sono così completamente opposti, si deve essere portati a risultati di qualche valore per lo studio di condizioni della speculazione scientifica.

503. La teoria di Ampère sulle mutue azioni delle correnti elettriche è fondata su quattro fatti sperimentali e su una ipotesi.

Le esperienze fondamentali di Ampère sono tutte esempi di quello che è detto il metodo di confronto delle forze per riduzione a zero (si veda § 214). Invece di misurare la forza per il suo effetto dinamico di movimento comunicato a un corpo o con il metodo statico consistente nel fargli equilibrio con i pesi di un corpo o con la torsione di un filo; nel metodo di riduzione a zero, si fanno agire simultaneamente su un corpo già in equilibrio due forze della stessa origine, così che non si produca alcun effetto: le due forze sono pertanto in equilibrio. Questo metodo è particolarmente prezioso quando si tratta di confrontare gli effetti della corrente elettrica che attraversa due circuiti di forme differenti. Collegando tutti i conduttori in serie continua, si è certi che l'intensità di corrente è la stessa in tutti i punti del suo percorso: e, poiché la corrente inizia all'incirca nello stesso istante in tutti i punti del suo percorso, dimostriamo che le forze dovute alla sua azione sul corpo sospeso si equilibrano, se non osserviamo alcun effetto sul corpo di emissione o interruzione di corrente.

504. La bilancia di Ampère consiste di un telaio leggero, che può ruotare attorno a un asse verticale e portante un filo che forma due circuiti di area uguale, posti nello stesso piano o in piani paralleli e attraversati in versi contrari dalla corrente. Lo scopo di questa disposizione è di eliminare gli effetti del magnetismo terrestre sul filo conduttore. Un circuito elettrico libero di muoversi tende a disporsi in modo da comprendere il maggior numero possibile di linee di induzione. Se queste linee sono dovute al magnetismo terrestre, un circuito tracciato in un piano verticale sarà in questa posizione quando il suo piano sarà diretto da est a ovest e quando la corrente circolerà in verso contrario al moto apparente del Sole.

Collegando in un modo invariabile due circuiti di area uguale, posti in piani paralleli e nei quali correnti uguali circolano in versi opposti, si forma una combinazione che non è più influenzata dal magnetismo terrestre, e che, per questo motivo, si chiama combinazione statica (si veda la fig. 26). Ma essa subisce l'influenza di forze dovute a correnti o a magneti molto vicini tali da esercitare azioni differenti sui due circuito.

505. La prima esperienza di Ampère è relativa all'azione di due correnti uguali, vicine e di verso contrario. Un filo ricoperto di una sostanza isolante, è piegato su se stesso e posto vicino a uno dei circuiti della bilancia statica. Quando si fa passare una corrente nel filo e nella bilancia, l'equilibrio di questi non è alterato, e ciò mostra che due correnti uguali, vicine e di verso contrario, si neutralizzano tra loro. Se, invece di due fili posti uno di fianco all'altro, si impiega un filo isolato mediante un tubo di metallo, e in modo che la corrente arrivi dal filo e si allontani per il tubo, l'azione all'esterno del tubo è non solo circa, ma rigorosamente nulla. Questo principio ha una grande importanza nella costruzione degli strumenti elettrici; poiché ci dà il mezzo di portare la corrente a un galvanometro o a un altro strumento, e di farla ritornare senza che questa corrente produca effetti elettromagnetici nel suo tragitto di andata e ritorno. In pratica, basta generalmente collegare insieme i fili, e avendo cura che rimangano tra loro perfettamente isolati; ma, se essi devono passare vicino a una parte sensibile degli strumenti, è meglio dare a uno dei conduttori la forma di un tubo all'interno del quale passa l'altro conduttore (si veda § 683).

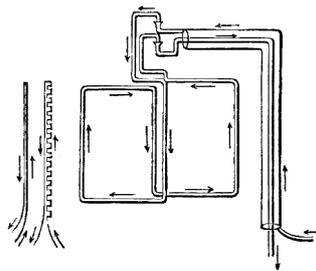


Fig. 26.

506. Nella seconda esperienza di Ampère, uno dei filo è collegato e ricurvato in un gran numero di piccole sinuosità, ma in modo che tutti i punti del suo percorso rimangano sempre molto vicini al filo rettilineo. Si constata che una corrente che arriva dal filo sinuoso e ritorna per il filo rettilineo è senza azione sulla bilancia statica. Da ciò risulta che l'effetto di corrente che circola in una parte sinuosa del filo è equivalente a quella della stessa corrente attraversante la linea retta che unisce le estremità della linea sinuosa, purché non sia in alcun punto del suo percorso lontana dalla linea retta. Pertanto un piccolo elemento del circuito è equivalente a due o più elementi componenti, essendo la relazione tra gli elementi componenti e l'elemento risultante la stessa che tra le componenti e la risultante di uno spostamento o di una velocità.

507. Nella terza esperienza, si sostituisce alla bilancia statica un conduttore capace di muoversi nel vero della sua sola lunghezza. La corrente entra nel conduttore ed esce in punti fissi nello spazio: si constata che nessun circuito chiuso posto nelle vicinanze di questo conduttore è in grado di farlo muovere.

In questa esperienza, il conduttore è un filo a forma d'arco di cerchio, sospeso a un supporto che può ruotare attorno a un asse verticale. L'arco circolare è orizzontale, e il suo centro coincide con l'asse verticale. Si riempiono di mercurio di piccole vaschette, finché la superficie convessa del mercurio si innalza al di sopra del bordo di esse. Queste vaschette sono poste sotto l'arco circolare e sono regolate affinché il mercurio tocchi il filo di un rame ben amalgamato. La corrente entra da una di queste vaschette ed esce dall'altra, passando per la parte dell'arco circolare compreso tra esse. Così, una parte dell'arco circolare è attraversata dalla corrente,

e, nello stesso tempo, l'arco rimane capace di muoversi molto liberamente nel verso della sua lunghezza. Si può allora avvicinare al conduttore mobile delle correnti chiuse o dei magneti qualsiasi, senza che abbia la minima tendenza a muoversi nel verso della sua lunghezza.

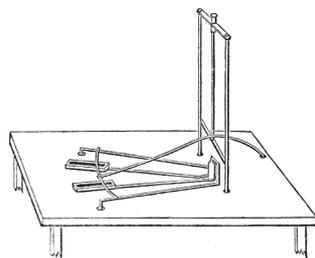


Fig. 27.

598. Nella quarta esperienza con la bilancia astatica, si impiegano due circuiti simili a uno dei circuiti della bilancia, ma aventi, l'uno C dimensioni n volte maggiori e l'altro A n volte minori. Li si pone da una parte e dell'altra del circuito della bilancia, che chiameremo B , in modo da essere similmente posti rispetto a B , e che la distanza di C da B sia n volte maggiore di quella tra B e A . Il verso e l'intensità della corrente sono gli stessi in A e in C ; il verso in B può essere lo stesso oppure opposto. In queste condizioni, si trova che, qualunque sia la forma dei tre circuiti, B rimane in equilibrio sotto l'azione simultanea di A e di C , purché le relazioni indicate prima siano soddisfatte.

Poiché le sezioni tra i circuiti completi possono essere considerate come dovute alle azioni tra gli elementi dei circuiti, si può impiegare il metodo seguente per determinare la legge di queste azioni.

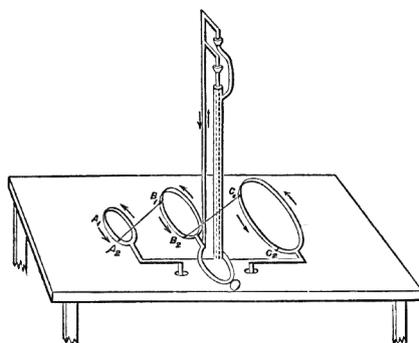


Fig. 28.

Siano A_1, B_1, C_1 (fig. 28) elementi corrispondenti sui tre circuiti, e A_2, B_2, C_2 elementi corrispondenti su un'altra parte dei circuiti. La posizione di B_1 rispetto ad A_2 è simile a quella di C_1 rispetto a B_2 ; ma le distanze e le dimensioni di C_1 e B_2 sono n volte maggiori delle distanze e dimensioni corrispondenti di B_1 e A_2 . Se la legge delle azioni elettromagnetiche è una funzione della distanza, l'azione che si esercita tra B_1 e A_2 qualunque sia la forma e la natura, si può scrivere

$$F = B_1 \cdot A_2 f(\overline{B_1 A_2}) ab$$

e quella tra C_1 e B_2

$$F' = C_1 \cdot B_2 f(\overline{C_1 B_2}) bc$$

dove a, b, c sono le intensità delle correnti in A, B, C . Ma $nB_1 = C_1$, $nA_2 = B_2$, $n\overline{B_1 A_2} = \overline{C_1 B_2}$ e $a = c$. Pertanto

$$F' = n^2 B_1 \cdot A_2 f(n\overline{B_1 A_2}) ab$$

e questa è uguale a F dagli esperimenti, cosicché abbiamo

$$n^2 f(\overline{nA_2B_1}) = f(\overline{A_2B_1})$$

o, la forza varia inversamente al quadrato della distanza.

509. Si può osservare, rispetto a queste esperienze, che ogni corrente elettrica forma un circuito chiuso. Le correnti di cui si serviva Ampère, essendo prodotte dalla pila voltaica, si producevano naturalmente in circuiti chiusi. Si potrebbe supporre che, nel caso in cui un conduttore si scarica con una scintilla, si produce una corrente lungo una linea aperta di grandezza finita; ma, secondo le idee che sono state espone in questo Trattato, anche questo caso è quello di un circuito chiuso. Non si sono fatte esperienze sull'azione reciproca di circuiti non chiusi. Di conseguenza, non si saprebbe fare alcuna asserzione relativa all'azione reciproca di due elementi di correnti si basa su dati puramente sperimentali. È vero che si può rendere mobile una parte di un circuito in modo da determinare l'azione che di essa da altre correnti; ma queste correnti, così come quelle che passa nella parte mobile, formano necessariamente circuiti chiusi; di modo che, in fin dei conti, il risultato delle esperienze è relativo all'azione di uno o più circuiti chiusi sull'intera o una parte di una corrente chiusa.

510. Tuttavia, nell'analisi dei fenomeni, possiamo considerare l'azione di un circuito chiuso su un elemento, sia di se stesso, sia di un altro circuito, come fosse la risultante di un certo numero di forze separate dipendenti di differenti parti nelle quali si può, alla luce di operazioni matematiche, supporre il primo circuito diviso.

È solo un'analisi matematica dell'azione; è quindi perfettamente legittimo che in realtà queste forze possano oppure no agire separatamente.

511. Inizieremo con l'esaminare le relazioni geometriche che esistono tra le due linee dello spazio che rappresentano i circuiti e tra le parti elementari di queste linee.

Siano due curve nello spazio; su ognuna di esse si prende un punto fisso a partire dal quale si misurano gli archi in una direzione stabilita. Siano A, A' questi punti; $PQ, P'Q'$ elementi delle due curve.

Siano

$$\begin{cases} AP = s & A'P' = s' \\ PQ = ds & P'Q' = ds' \end{cases} \quad (10.0.1)$$

e indichiamo con r la distanza PP' ; con θ l'angolo $P'PQ$; con θ' l'angolo $PP'Q'$ e con η l'angolo compreso tra i piani di questi angoli.

La posizione relativa di due elementi è sufficientemente definita dalla loro distanza e e dai tre angoli θ, θ', η ; poiché, se si possiedono questi dati, la posizione relativa degli elementi è ben determinata come se fossero parte di una stesso solido invariabile.

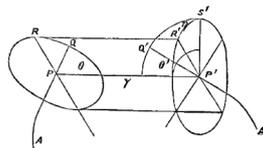


Fig. 20.

512. Se si impiegano coordinate rettangolari e si indicano con x, y, z le coordinate di P , con x', y', z' le coordinate di P' , con l, m, n e l', m', n' i coseni direttori di PQ e di $P'Q'$, si ha

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = l & \frac{dy}{ds} = m & \frac{dz}{ds} = n \\ \frac{dx'}{ds'} = l' & \frac{dy'}{ds'} = m' & \frac{dz'}{ds'} = n' \end{cases} \quad (10.0.2)$$

e

$$\begin{cases} l(x' - x) + m(y' - y) + n(z' - z) = r \cos \theta \\ l'(x' - x) + m'(y' - y) + n'(z' - z) = -r \cos \theta' \\ ll' + mm' + nn' = \cos \epsilon \end{cases} \quad (10.0.3)$$

dove ϵ è l'angolo tra le direzioni degli elementi stessi, e

$$\cos \epsilon = -\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \quad (10.0.4)$$

Si ha così

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \quad (10.0.5)$$

pertanto

$$\begin{cases} r \frac{dr}{ds} = -(x' - x) \frac{dx}{ds} - (y' - y) \frac{dy}{ds} - (z' - z) \frac{dz}{ds} = -r \cos \theta \\ r \frac{dr}{ds'} = (x' - x) \frac{dx'}{ds'} + (y' - y) \frac{dy'}{ds'} + (z' - z) \frac{dz'}{ds'} = -r \cos \theta' \end{cases} \quad (10.0.6)$$

e differenziando $r \frac{dr}{ds}$ rispetto s'

$$\begin{cases} r \frac{d^2r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} = = -\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \\ = = - (ll' + mm' + nn') \\ = = -\cos \epsilon \end{cases} \quad (10.0.7)$$

Si possono quindi esprimere i tre angoli θ, θ', η così come l'angolo ausiliario ϵ , in funzione delle derivate di r rispetto a s e a s' , nel modo seguente

$$\begin{cases} \cos \theta & = & -\frac{dr}{ds} \\ \cos \theta' & = & -\frac{dr}{ds'} \\ \cos \epsilon & = & -r \frac{d^2r}{ds ds'} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \\ \sin \theta \sin \theta' \cos \eta & = & -r \frac{d^2r}{ds ds'} \end{cases} \quad (10.0.8)$$

513. Esaminiamo ora in quale modo si può pensare matematicamente che gli elementi PQ e $P'Q'$ agiscono l'uno sull'altro, e, in questo studio, non supporremo per cominciare che la loro mutua azione sia necessariamente diretta lungo la loro congiungente.

Abbiamo visto che si può supporre ogni elemento scomposto in altri, purché questi elementi componenti, essendo combinati secondo la legge di addizione dei vettori, danno come risultante l'elemento iniziale.

Considereremo quindi ds come scomposto in $ds \cos \theta = \alpha$ lungo r , e $ds \sin \theta = \beta$ lungo la perpendicolare a r nel piano $P'PQ$.

Considereremo pure ds' come scomposto in $ds' \cos \theta' = \alpha'$, lungo la direzione di r presa in verso contrario; $\sin \theta' \cos \eta ds' = \beta'$ lungo una direzione parallela a quella dove si misura β , e $\sin \theta' \sin \eta ds' = \gamma'$, lungo una direzione perpendicolare a quella di α e β' .



Fig. 30.

Consideriamo l'azione che si esercita tra le componenti α e β da una parte, α', β', γ' dall'altra.

1° α e α' sono dirette lungo la stessa retta. La forza che agisce tra esse deve quindi essere diretta lungo la stessa retta. Supporremo che questa sia un'attrazione

$$= A\alpha\alpha'ii'$$

dove A è una funzione di r e dove i e i' sono le intensità delle correnti che attraversano rispettivamente ds e ds' . Questa espressione soddisfa alla condizione di cambiare di segno nello stesso tempo sia i che i' .

2° β e β' sono paralleli tra loro e perpendicolari alla loro congiungente. L'azione che si esercita tra essi si può scrivere

$$B\beta\beta'ii'$$

Questa forza è evidentemente diretta lungo la linea congiungente β e β' , poiché essa deve essere nel piano dove si trovano questi due elementi; e, se misuriamo β e β' in verso contrario, il valore di questa espressione rimarrà lo stesso; se quindi essa rappresenta una forza, questa forza non ha componente nella direzione di β e, di conseguenza, deve essere diretta lungo r . Supponiamo che questa espressioni rappresenti un'attrazione quando è positiva.

3° β e γ' sono perpendicolari tra loro e alla linea che li congiunge. La sola azione che possa esistere tra due elementi così disposti è quella di una coppia il cui asse è parallelo a r . Per ora, ci occupiamo di forze; lasciamo quindi questa coppia da parte.

4° Se α e β' agiscono l'uno sull'altro, la loro azione deve essere espressa da

$$C\alpha\beta'ii'$$

Il segno di questa espressione cambia variando il verso nel quale si misura β' . Essa deve rappresentare sia una forza nel verso di β' , sia una coppia nel piano di α e β' . Poiché non studiamo le coppie, ammetteremo che questa sia una forza agente bel verso di β' .

Vi è evidentemente una forza uguale che agisce in verso contrario su β' .

Per lo stesso motivo, abbiamo una forza

$$C\alpha\gamma'ii'$$

che agisce su α nella direzione di γ' e una forza

$$C\beta\alpha'ii'$$

che agisce su β nella direzione contraria.

514. Riunendo i nostri risultati. troviamo che l'azione su ds si compone di tre forze

$$\begin{cases} X = (A\alpha\alpha' + B\beta\beta')ii' & \text{nella direzione di } r \\ Y = C(\alpha\beta' - \alpha'\beta)ii' & \text{nella direzione di } \beta \\ Z = C\alpha\gamma'ii' & \text{nella direzione di } \gamma' \end{cases} \quad (10.0.9)$$

Supponiamo che questa azione su s sia la risultante di tre forze, $Rii'dsds'$ agente lungo la direzione di r , $Sii'dsds'$, agente lungo ds e $S'ii'dsds'$ agente lungo ds' ; si ha allora, in funzione di θ, θ', η

$$\begin{cases} R = A \cos \theta \cos \theta' + B \sin \theta \sin \theta' \cos \eta \\ S = -C \cos \theta' \end{cases} \quad S' = C \cos \theta \quad (10.0.10)$$

in funzione di r

$$\begin{cases} R = A \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - Br \frac{d^2r}{dsds'} \\ S = C \frac{dr}{ds'} \end{cases} \quad S' = -C \frac{dr}{ds} \quad (10.0.11)$$

in funzione di l, m, n e l', m', n'

$$\begin{cases} R = -(A + B) \frac{1}{r^2} (l\xi + m\eta + n\zeta) (l'\xi + m'\eta + n'\zeta) + B (ll' + mm' + nn') \\ S = C \frac{1}{r} (l'\xi + m'\eta + n'\zeta) \\ S' = C \frac{1}{r} (l\xi + m\eta + n\zeta) \end{cases} \quad (10.0.12)$$

dove si è posto ξ, η, ζ per $x' - x, y' - y, z' - z$.

515. Dobbiamo ora calcolare la forza con la quale la corrente finita s' agisce sulla corrente finita s . La corrente s si estende da A , dove $s = 0$, fino a P , dove s assume il valore s ; la corrente s' si estende da A' , dove $s' = 0$, fino a P' , dove s' assume il valore s' . Su ogni corrente, le coordinate dei punti sono funzioni di s o di s' .

Sia F una funzione della posizione di un punto: impiegheremo l'indice $(s, 0)$ per designare l'eccesso del valore di F nel punto P sul suo valore nel punto A ; così

$$F_{(s,0)} = F_P - F_A$$

Tali funzioni svaniranno forzatamente se il circuito è chiuso.

Siano $ii'X$, $ii'Y$, e $ii'Z$ le componenti della forza totale con la quale $A'P'$ agisce su AP . Allora la componente parallela a X della forza con la quale ds' agisce su ds è

$$ii' \frac{d^2 X}{ds ds'}$$

da cui

$$\frac{d^2 X}{ds ds'} = R \frac{\xi}{r} + Sl + S'l' \quad (10.0.13)$$

Sostituendo i valori di R, S, S' ricavati dalla (10-12), ricordando che

$$l'\xi + m'\eta + n'\zeta = r \frac{dr}{ds'} \quad (10.0.14)$$

e ordinando i termini rispetto a l, m, n , troviamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{ds ds'} &= l \left[- (A + B) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds'} \xi^2 + C \frac{dr}{ds'} + (B + C) \frac{l'\xi}{r} \right] \\ &= +m \left[- (A + B) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds'} \xi \eta + C \frac{l'\eta}{r'} + B \frac{m'\xi}{r} \right] \\ &= +n \left[- (A + B) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds'} \xi \zeta + C \frac{l'\zeta}{r'} + B \frac{n'\xi}{r} \right] \end{aligned} \quad (10.0.15)$$

Poiché A, B, C sono funzioni di r , possiamo scrivere

$$P = \int_r^\infty (A + B) \frac{1}{r^2} dr \quad Q = \int_r^\infty C dr \quad (10.0.16)$$

essendo estesa l'integrazione tra r e ∞ poiché A, B, C si annullano se $r = \infty$.

Pertanto

$$(A + B) \frac{1}{r^2} = -\frac{dP}{dr} \quad C = -\frac{dQ}{dr} \quad (10.0.17)$$

516. Ora sappiamo, dalla terza esperienza di equilibrio di Ampère, che, essendo s' un circuito chiuso, la forza che agisce su ds è perpendicolare alla direzione di ds o, in altre parole, che la componente della forza nella direzione di ds è nulla. Prendiamo la direzione dell'asse x parallela a ds ; allora $l = 1, m = 0, n = 0$.

La (10-15) diviene

$$\frac{d^2 X}{ds ds'} = \frac{dP}{ds'} \xi^2 - \frac{dQ}{ds'} + (B + C) \frac{l'\xi}{r} \quad (10.0.18)$$

Per trovare $\frac{dX}{ds}$, cioè la forza che agisce su ds riferita all'unità di lunghezza, ci basta integrare questa espressione rispetto a s' . Integrando il primo termine per parti, si ha

$$\frac{dX}{ds} = (P\xi^2 - Q)_{(s',0)} - \int_0^{s'} (2Pr - B - C) \frac{l'\xi}{r} ds' \quad (10.0.19)$$

Quando s' è un circuito chiuso, questa espressione deve essere nulla. Il primo termine svanisce da sé; ma, in generale, il secondo termine non si annulla, nel caso di un circuito chiuso di forma qualsiasi, a meno che la quantità sotto il segno di integrazione sia sempre nulla. Pertanto, per soddisfare la condizione di Ampère, dobbiamo porre

$$P = \frac{1}{2r} (B + C) \quad (10.0.20)$$

517. Possiamo allora eliminare P e trovare il valore generale di $\frac{dX}{ds}$,

$$\frac{dX}{ds} = \left[\frac{B+C}{2} (l\xi + m\eta + n\zeta) + Q \right] + m \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{m'\xi - l'\eta}{r} ds' - m \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{l'\zeta - n'\xi}{r} ds' \quad (10.0.21)$$

Il primo termine dell'espressione si annulla, quando s' è un circuito chiuso e, se poniamo

$$\begin{cases} \alpha' = \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{n'\eta - m'\zeta}{r} ds' \\ \beta' = \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{l'\zeta - n'\xi}{r} ds' \\ \gamma' = \int_0^{s'} \frac{B-C}{2} \frac{m'\xi - l'\eta}{r} ds' \end{cases} \quad (10.0.22)$$

dove l'integrazione è estesa interamente lungo il circuito chiuso s' , possiamo scrivere

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = m\gamma' - n\beta' \\ \frac{dY}{ds} = n\alpha' - l\gamma' \\ \frac{dZ}{ds} = l\beta' - m\alpha' \end{cases} \quad (10.0.23)$$

Le quantità α', β', γ' sono talvolta dette i determinanti del circuito s' riferiti al punto P . Ampère chiama la loro risultante la direttrice dell'azione elettrodinamica.

È evidente, da queste equazioni, che la forza le cui componenti sono $\frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}$ è perpendicolare a ds e a questa direttrice, e che essa è rappresentata numericamente dall'area del parallelogrammo i cui lati sono ds e la direttrice.

Nel linguaggio dei quaternioni, la forza risultante agente su ds è la parte vettoriale del prodotto della direttrice per ds .

Poiché sappiamo già che la direttrice è identica alla forza dovuta a una corrente unitaria attraversante il circuito s' , parleremo d'ora in poi della direttrice come fosse la forza magnetica dovuta a questo circuito.

518. Terminiamo ora il calcolo delle componenti della forza che si esercita tra due correnti di dimensioni finite, chiuse o aperte.

Sia ρ una nuova funzione di r tale che

$$\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (B - C) dr \quad (10.0.24)$$

allora dalle (10-17) e (10-20)

$$A + B = r \frac{d^2}{dr^2} (Q + \rho) - \frac{d}{dr} (Q + \rho) \quad (10.0.25)$$

e le (10-11) diventano

$$\begin{cases} R = -\frac{d\rho}{dr} \cos \epsilon + r \frac{d^2}{ds ds'} (Q + \rho) \\ S = -\frac{dQ}{ds} \\ S' = \frac{dQ}{ds'} \end{cases} \quad (10.0.26)$$

Con questi valori delle componenti della forza, la (10-13) diviene

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{ds ds'} &= \cos \epsilon \frac{d\rho}{dr} \frac{\xi}{r} + \xi \frac{d^2}{ds ds'} (Q + \rho) - l \frac{dQ}{ds'} + l' \frac{d\rho}{ds} \\ &= \cos \epsilon \frac{d\rho}{dx} + \frac{d^2(Q+\rho)\xi}{ds ds'} + l \frac{d\rho}{ds'} - l' \frac{d\rho}{ds}\end{aligned}\quad (10.0.27)$$

519. Siano

$$\begin{aligned}F &= \int_0^s l \rho ds & G &= \int_0^s m \rho ds & H &= \int_0^s n \rho ds \\ F' &= \int_0^{s'} l' \rho ds' & G' &= \int_0^{s'} m' \rho ds' & H' &= \int_0^{s'} n' \rho ds'\end{aligned}\quad (10.0.28)$$

Queste quantità hanno valori definiti per un punto qualunque dello spazio. Se i circuiti sono chiusi, essi corrispondono alle componenti dei potenziali vettori dei circuiti.

Sia L una nuova funzione di r , tale che

$$L = \frac{1}{2} \int_0^r r (Q + \rho) dr \quad (10.0.29)$$

e sia M l'integrale doppio

$$M = \int_0^{s'} \int_0^s \rho \cos \epsilon ds ds' \quad (10.0.30)$$

che diviene il potenziale reciproco dei circuiti; quando questi sono chiusi, la (10-27) si può scrivere

$$\frac{d^2 X}{ds ds'} = \frac{d^2}{ds ds'} \left(\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dx} + F' - F \right) \quad (10.0.31)$$

520. Integrando rispetto a s e a s' tra i limiti dati, troviamo

$$X = \frac{dM}{dx} - \frac{d}{dx} (L_{PP'} - L_{AP'} - L_{A'P'} + L_{AA'}) + F'_P - F'_A - F_{P'} + F_{A'} \quad (10.0.32)$$

dove gli indici di L indicano la distanza r di cui quantità L è funzione, e dove gli indici di F e F' indicano i punti per i quali si prendono i valori di queste funzioni.

Le espressioni di Y e di Z si possono ricavare da questa. Moltiplicando le tre componenti rispettivamente per dx , dy , dz otteniamo

$$\begin{aligned}X dx + Y dy + Z dz &= DM - D(L_{PP'} - L_{AP'} - L_{A'P'} + L_{AA'}) \\ &\quad + (F' dx + G' dy + H' dz)_{(P-A)} - (F dx + G dy + H dz)_{(P'-A')}\end{aligned}\quad (10.0.33)$$

dove D è il simbolo di un differenziale totale.

Poiché, in generale, $F dx + G dy + H dz$ non è il differenziale totale di una funzione di x, y, z , $X dx, Y dy, Z dz$ non è un differenziale esatto per correnti di cui una è chiusa.

521. Ma, se le due correnti sono chiuse, i termini L, F, G, H, F', G', H' svaniscono, e

$$X dx + Y dy + Z dz = DM \quad (10.0.34)$$

dove M è il potenziale reciproco dei due circuiti, quando sono attraversati da una corrente unitaria. La quantità M esprime il lavoro compiuto dalle forze elettromagnetiche sull'uno o sull'altro dei circuiti conduttori, mentre lo sposta da una distanza infinita fino alla sua posizione attuale. Ogni cambiamento nella sua posizione, che fa aumentare M , è favorito dalle forze elettromagnetiche.

Si può mostrare, come ai § 490 e 596, che se il circuito non muove parallelamente a se stesso, le forze che agiscono su di esso sono tuttavia determinate dalla variazione del potenziale M di uno dei circuiti sull'altro.

522. Il solo fatto sperimentale che abbiamo utilizzato in questo studio è quello che è stato stabilito da Ampère, cioè che l'azione di una corrente chiusa su una parte di un'altra corrente è perpendicolare alla direzione di quest'ultima. Tutto il resto di questo studio dipende da considerazioni puramente matematiche sulle proprietà delle linee nello spazio; di conseguenza, i ragionamenti possono essere presentati sotto una forma molto più sintetica e appropriata allo scopo, se si impiegano le idee e il linguaggio del metodo matematico che meglio si presta ad esprimere tali relazioni: i quaternioni di Hamilton.

È quanto ha fatto il professor Tait per lo studio originale di Ampère, nel *Quarterly mathematical Journal*, 1866, e nel suo trattato sui *Quaternions*, § 339; il lettore potrà facilmente applicare lo stesso metodo allo studio, un poco più generale, presentato qui.

523. Finora, non abbiamo fatto ipotesi sulle quantità A, B, C , se queste non sono funzioni della distanza r dagli elementi. Dobbiamo ora determinare la forma di queste funzioni, e, per questo, utilizzeremo il quarto caso di equilibrio di Ampère (§ 508), dove si vede che se si alterano nello stesso rapporto tutte le dimensioni e tutte le distanze in un sistema di due circuiti, le intensità rimangono le stesse, così come la forza che agisce tra i due circuiti.

La forza che agisce tra due circuiti attraversati dall'unità di questa corrente è $\frac{dM}{dx}$, e, poiché è indipendente dalle dimensioni di questo sistema, deve essere una quantità numerica. Pertanto lo stesso M , il coefficiente di potenziale reciproco dei due circuiti, deve essere una quantità della dimensione di una linea. Ne risulta, dalla (10-31), che ρ deve essere l'inverso di una linea; di conseguenza, dalla (10-24), $B - C$ deve essere l'inverso del quadrato di una linea. Ma, poiché B e C sono due funzioni di r , $B - C$ deve essere l'inverso del quadrato di r o un multiplo numerico di questo inverso.

524. Il multiplo da adottare dipende dal nostro sistema di misura. Se adottiamo il sistema elettromagnetico, così detto perché è in accordo con il sistema già ammesso per le misure magnetiche, il valore di M deve essere identico a quello del potenziale di due fogli magnetici la cui potenza è uguale all'unità, e i cui bordi coincidono con i due circuiti. Il valore numerico di M è in questo caso, dal § 423,

$$M = \iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds' \quad (10.035)$$

essendo l'integrazione effettuata lungo i due circuiti nel verso positivo. Adottando questa espressione come valore numerico di M , e confrontandola con la (10-31), troviamo

$$\rho = \frac{1}{r} \quad B - C = \frac{2}{r^2} \quad (10.036)$$

525. Possiamo ora esprimere le componenti della forza dovuta all'azione di ds su ds' , sotto la forma più generale che sia compatibile con le esperienze.

La forza che agisce su ds si compone di un'attrazione

$$\begin{cases} R &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - 2r \frac{d^2r}{ds ds'} \right) ii' ds ds' + r \frac{d^2Q}{ds ds'} ii' ds ds' & \text{nella direzione di } r \\ S &= -\frac{dQ}{ds'} ii' ds ds' & \text{nella direzione di } ds \\ S' &= \frac{dQ}{ds} ii' ds ds' & \text{nella direzione di } ds' \end{cases} \quad (10.037)$$

dove $Q = \int_0^r C dr$, e poiché C è una funzione incognita di r , sappiamo solo che Q è una qualche funzione di r .

526. La quantità Q non si può determinare senza avanzare l'ipotesi, dalle esperienze dove la corrente agente forma un circuito chiuso. Se supponiamo, con Ampère, che l'azione degli

elementi ds e ds' è diretta lungo la linea che unisce questi elementi, S e S' devono scomparire, e Q deve essere una quantità costante o nulla. La forza si riduce allora a una attrazione il cui valore è

$$R = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - 2r \frac{d^2r}{ds ds'} \right) ii' ds ds' \quad (10.0.38)$$

Ampère, che ha svolto queste ricerche ben prima che si fosse stabilito il sistema delle unità magnetiche, impiegava una formula ridotta della metà,

$$R = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - r \frac{d^2r}{ds ds'} \right) jj' ds ds' \quad (10.0.39)$$

Qui l'intensità di corrente è misurata con ciò che si chiama misura elettrodinamica. Se i e i' sono le intensità delle correnti in misura elettromagnetica, e j e j' quelle in misura elettrodinamica, è chiaro che

$$jj' = 2ii' \quad j = \sqrt{2}i \quad (10.0.40)$$

Pertanto l'unità di corrente adottata nelle misure elettromagnetiche è maggiore di quella adottata nelle misure elettrodinamiche nel rapporto di $\sqrt{2}$ a 1.

Il solo titolo in ragione del quale l'unità elettrodinamica merita qualche considerazione, è che esso è stato adottato inizialmente da Ampère, che ha scoperto la legge delle azioni tra le correnti. L'intervento continuo del fattore $\sqrt{2}$ nei calcoli fatto in questo sistema è scomodo, e il sistema elettromagnetico ha il grande vantaggio di essere in accordo numerico con tutte le nostre formule magnetiche. Siccome è difficile per il lettore ricordarsi se deve moltiplicare o dividere per $\sqrt{2}$, impiegheremo, d'ora in poi, che il sistema elettromagnetico, di cui si sono serviti Weber e la maggior parte degli altri autori.

Poiché la forma e il valore di Q non hanno effetto in nessuna delle esperienze fatte finora, almeno quando la corrente che agisce è chiusa, possiamo, se vogliamo, adottare tale valore di Q che ci apparirà semplificare le formule.

Così, Ampère ammette che la forza che agisce sugli elementi è diretta lunga la linea che li unisce, ciò che dà $Q = 0$.

$$R = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - 2r \frac{d^2r}{ds ds'} \right) ii' ds ds' \quad S = 0 \quad S' = 0 \quad (10.0.41)$$

Grassmann¹ ammette che due elementi in linea retta non hanno azione reciproca: ciò dà

$$Q = -\frac{1}{2r} \quad R = -\frac{3}{2} \frac{d^2r}{ds ds'} \quad S = -\frac{1}{2r^2} \frac{dr}{ds'} \quad S' = \frac{1}{2r^2} \frac{dr}{ds} \quad (10.0.42)$$

Possiamo, volendo, ammettere che l'attrazione tra due elementi, a una distanza data, è proporzionale al coseno dell'angolo compreso tra questi elementi. In questo caso

$$Q = -\frac{1}{r} \quad R = \frac{1}{r^2} \cos \epsilon \quad S = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds'} \quad S' = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds} \quad (10.0.43)$$

Infine possiamo ammettere che l'attrazione e le forze oblique dipendono solo dagli angoli che gli elementi formano con la linea che li unisce, e avremo

$$Q = -\frac{2}{r} \quad R = -3 \frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \quad S = -\frac{2}{r^2} \frac{dr}{ds'} \quad S' = \frac{2}{r^2} \frac{dr}{ds}$$

527. Di queste quattro ipotesi differenti, quella di Ampère è indubitabilmente la migliore; poiché è la sola per la quale le forze agenti sui due elementi sono non solo uguali e opposte, ma anche dirette lungo la linea retta che unisce gli elementi.

¹Pogg. Ann., t. LXIV, p. 1; 1845

11 Induzione delle correnti elettriche

528. Oersted avendo scoperto l'azione magnetica delle correnti elettriche, si fu portati da una serie di ragionamenti a scoprire la magnetizzazione da parte delle correnti elettriche e l'azione meccanica tra le correnti elettriche. Ma fu solo nel 1831 che Faraday, che provò dopo qualche tempo a produrre correnti elettriche per mezzo di azioni elettriche o magnetiche, riconobbe le condizioni nelle quali si produce l'induzione magneto-elettrica. Il metodo che seguì Faraday nelle sue ricerche consisteva nel ricorrere costantemente all'esperienza come mezzo per verificare l'esattezza delle proprie idee, e a sviluppare costantemente le sue idee sotto l'influenza diretta dell'esperienza. Nelle ricerche che ha pubblicato, troviamo le sue idee espresse nel linguaggio che meglio conviene a una scienza nascente, poiché differisce molto dallo stile dei fisici abituati alla forma matematica di certe idee ricevute.

Lo studio sperimentale con il quale Ampère ha stabilito le leggi dell'azione meccanica che si esercita tra le correnti costituisce uno delle più brillanti imprese della Scienza.

Sembra che questo insieme di teoria e di esperienza sia scaturito in tutta la sua potenza, con tutte le sue armi, dal cervello del Newton dell'elettricità. La forma è perfetta, il rigore inattaccabile, e il tutto si riassume in una formula, da cui si possono dedurre tutti i fenomeni e che dovrà sempre restare la formula fondamentale dell'Elettrodinamica.

Ma il metodo di Ampère, sebbene rivesta una forma induttiva, non ci permette di seguire il nesso delle idee che gli sono servite da guida. Dobbiamo a fatica credere che Ampère abbia realmente scoperto la legge dell'azione per mezzo delle esperienze che descrive. Siamo portati a supporre, ciò che d'altronde ci dice lui stesso¹, che ha scoperto la legge con qualche metodo che ci mostra, e che avendo in seguito costruito una dimostrazione perfetta, ha fatto scomparire tutte le tracce della impalcatura per mezzo della quale l'aveva costruita.

Al contrario, Faraday ci mostra tutte le sue esperienze, quelle riuscite e quelle non riuscite, le sue idee allo stato bozza e quelle completamente sviluppate; e il lettore, per quanto inferiore sia a Faraday nella capacità induttiva, prova simpatia più ancora che ammirazione, e si sente tentato di credere che, anche lui, se ne avesse l'occasione, farebbe delle scoperte. Chiunque studia, dovrà quindi leggere le *Recherches* di Ampère, come un magnifico modello di stile scientifico, nell'esposizione di una scoperta; ma dovrà anche studiare Faraday, per coltivare le tendenze scientifiche della sua intelligenza con l'azione e la reazione che si stabiliranno tra i nuovi fatti scoperti, come ce li presenta Faraday, e le idee che nascono nella propria mente.

Questo fu forse un vantaggio per la Scienza che Faraday, benché avesse una perfetta conoscenza delle nozioni fondamentali del tempo, di spazio e di forza, non sia stato un matematico di professione. Non fu tentato di impegnarsi nelle numerose e interessanti ricerche di Matematica pura, che avrebbero suggerito le sue scoperte se esse fossero state presentate sotto una forma matematica, e non si sentisse portato a imporre ai suoi risultati una forma che rispondesse al gusto matematico dell'epoca o a esprimerle sotto una forma che permettesse ai matematici di considerarle. Ma si lasciò il tempo di fare il suo lavoro personale, si accordare le sue idee con le osservazioni e di esprimere il suo pensiero in un linguaggio comune e non tecnico.

È soprattutto nella speranza di fare di queste idee la base di un metodo matematico che ho intrapreso questo Trattato.

¹ *Théorie des phénomènes électrodynamiques*, p. 9.

529. Siamo abituati a considerare l'universo come formato di parti, e i matematici cominciano di solito col considerare una particella isolata, poi immaginano le sue relazioni con un'altra, e così di seguito. Si è comunemente supposto che questo sia il metodo più naturale. Ma per immaginare una particella, bisogna operare un'astrazione, poiché tutte le nostre percezioni si applicano a corpi estesi, e di conseguenza l'idea del tutto, di cui abbiamo coscienza in un momento dato, può ben essere del tutto primitiva come quella di un oggetto preso individualmente. Può quindi esistere un metodo matematico nel quale si procederà dal tutto alle parti, invece di andare dalle parti al tutto. Così Euclide, nel suo Primo Libro, immagina una linea come tracciata per un punto, una superficie descritta da una linea, un volume come generato da una superficie; ma definisce pure una superficie come il limite di un volume, una linea come bordo di una superficie, un punto come l'estremità di una linea.

Analogamente, possiamo immaginare il potenziale di un sistema materiale come una funzione ottenuta da certe operazioni di integrazione estese alle masse dei corpi compresi nel campo; o possiamo supporre che queste stesse masse non abbiano altro significato matematico che quello di essere gli integrali di volume di $\frac{1}{4\pi}\nabla^2\Psi$, essendo Ψ il potenziale.

Nelle ricerche elettriche, possiamo impiegare formule dove figurano le distanze di certi corpi e le loro cariche o le correnti che li attraversano, oppure possiamo impiegare formule che raffigurano altre quantità che siano tutte continue in tutto lo spazio.

Le operazioni matematiche alle quali si è fatto ricorso nel primo metodo sono integrazioni lungo le linee, sulle superfici, negli spazi finiti; nel secondo metodo, si procede con equazioni differenziali parziali e integrazioni estese a tutto lo spazio.

Il metodo di Faraday sembra intimamente legato al secondo di questi modi di operare. Mai considera corpi come esistenti senza che tra loro non esista nulla tranne la distanza e come agente l'uno sull'altro secondo una certa funzione della distanza. Ma concepisce lo spazio intero come un campo di forza, dove le linee di forza sono generalmente curve; quelle che sono dovute a un corpo si estendono in tutte le direzioni a partire da esso, e la loro direzione è modificata dalla presenza di altri corpi. Parla pure² di linee di forza appartenenti a un corpo, come se facessero in qualche modo parte di lui di modo che si possa dire che, nella sua azione sui corpi lontani, un corpo agisce là dove non c'è. Ma ciò non è un'idea dominante presso Faraday. Io credo che avrebbe piuttosto detto che tutto il campo dello spazio è riempito di linee di forza la cui distribuzione dipende dalla disposizione dei corpi in questo campo, e che l'azione meccanica o elettrica che si esercita su ogni corpo è determinata dalle linee che vi fluiscono.

Fenomeni di induzione elettromagnetici³

530. 1° Induzione per variazione della corrente primaria.

Siano due circuiti conduttori: il circuito primario e quello secondario. Il circuito primario è collegato a una pila voltaica, per mezzo della quale si può produrre la corrente elettrica, mantenerla, interromperla o invertirla. Il circuito secondario contiene, per rivelare le correnti che vi si possono produrre, un galvanometro posto a una distanza sufficiente dal circuito primario perché la corrente primaria non abbia un'azione diretta misurabile sulle sue indicazioni.

Supponiamo che nel momento in cui si invia la corrente nel filo rettilineo primario, il galvanometro accusa nel filo rettilineo secondario una corrente di verso contrario: è quella che si chiama la corrente indotta. Questa corrente secondaria scompare subito, se si mantiene costante la corrente primaria, che sembra non produrre più effetto sul secondario. Se allora si interromper la corrente primaria, si osserva una corrente secondaria nello stesso verso della corrente primaria. Ogni variazione di corrente primaria origina una forza elettromotrice nel circuito secondario:

²*Exp. Res.*, t. II, p. 293; t. III, p. 447.

³Si leggano le serie I e II delle *Experimental Researches* di Faraday.

se la corrente primaria aumenta, la forza elettromotrice è in verso opposto a questa corrente; se essa diminuisce, è nel suo stesso verso; se la corrente primaria è costante, non vi è forza elettromotrice.

Questi effetti di induzione aumentano se si avvicinano i due fili. Essi crescono ancora se si dà ai circuiti la forma di bobine circolari o a spirale, poste l'una vicina all'altra, e, ancora di più, se si mette una barretta metallica o un fascio di fili all'interno delle bobine.

2° Induzione per movimento del circuito primario.

Abbiamo visto che, se si mantiene la corrente primaria costante e a riposo, la corrente secondaria scompare rapidamente.

Ma, lasciando costante la corrente primaria, avviciniamo il filo rettilineo primario al filo rettilineo secondario: durante questo movimento si produce una corrente secondaria di verso contrario alla corrente primaria.

Se si allontana il circuito primario da secondario, vi è una corrente secondaria nello stesso verso della corrente primaria.

3° Induzione per movimento del circuito secondario.

Se si sposta il circuito secondario, la corrente che vi è indotta è nel verso contrario della corrente primaria quando i due circuiti si avvicinano e nello stesso verso quando si allontanano.

In tutti i casi, il verso della corrente secondaria è tale che l'azione meccanica che si esercita tra i due conduttori è in verso contrario al movimento: è una repulsione se i fili si avvicinano, un'attrazione se si allontanano. Questo fatto, molto importante, è stato stabilito da Lenz⁴.

4° Induzione per movimento relativo di un magnete e del circuito secondario.

Se sostituiamo al circuito primario un foglio magnetico i cui bordi coincidono con questo circuito, la cui potenza è numericamente uguale all'intensità in questo circuito e la cui faccia australe corrisponde alla faccia positiva del circuito, i fenomeni prodotti dal moto relativo di questo foglio e del circuito secondario sono gli stessi che si osservano con un circuito primario.

531. L'insieme di questi fenomeni si può riassumere in una sola legge. Ogni variazione del numero di linee di induzione magnetica che attraversano il circuito secondario nel verso positivo produce lungo il circuito una forza elettromotrice che ha per misura il tasso di diminuzione dell'induzione magnetica che attraversa il circuito.

532. Supponiamo le rotaie di una ferrovia isolate dalla terra e riunite a una estremità attraverso un galvanometro, e supponiamo il circuito completato a una distanza x dall'estremità dalle ruote e dall'assale di una vettura. Trascurando l'altezza dell'assale al di sopra del livello delle rotaie, l'induzione nel circuito secondario è dovuta alla forza magnetica terrestre che, alle latitudini settentrionali, è diretta dall'alt in basso. Se quindi b è la distanza tra le rotaie, l'area orizzontale del circuito è bx , e l'integrale di induzione magnetica attraverso la superficie di questo circuito è Zbx , essendo Z la componente verticale della forza magnetica della Terra. Poiché Z è diretta dall'alto in basso, è la faccia inferiore del circuito che si deve considerare positiva, e la direzione positiva nel circuito è nord, est, sud, ovest, cioè quella del moto diurno apparente del Sole.

Supponiamo ora la vettura in movimento: x varia, e vi è nel circuito una forza elettromotrice il cui valore è

$$-Zb\frac{dx}{dt}$$

⁴Pogg. Ann., vol. XXI, p. 483, (1834)

Se x cresce, cioè se la vettura si allontana dall'estremità, la forza elettromotrice è nel verso negativo, cioè nord, ovest, sud, est; e la direzione assoluta della forza è invertita; ma, siccome il verso del movimento della vettura è pure invertito, la forza elettromotrice agisce sempre da destra a sinistra nell'assale, per l'osservatore posto nella vettura, la quale dovrebbe sempre volgere nel verso del movimento. Alle latitudini australi, dove è l'estremità sud dell'ago magnetizzato che si immerge, la forza elettromotrice che agisce su un corpo in movimento è diretta da sinistra verso destra.

Abbiamo quindi la regola seguente per determinare la forza elettromotrice che agisce in un filo che si sposta attraverso un campo di forza magnetica. Supponiamoci posti nella posizione di un ago magnetizzato, la testa all'estremità che indica il nord, i piedi a quella che si dirige a sud, e ruotiamo in modo da disporci nel verso del movimento: la forza elettromotrice dovuta al movimento è diretta da sinistra a destra.

533. Siccome queste relazioni sono importanti, prendiamo un altro esempio. Supponiamo un anello di metallo posto attorno all'equatore della Terra, e un filo metallico posto lungo il meridiano di Greenwich, dall'equatore al polo nord.

Supponiamo costruito un grande arco metallico di un quadrante, una delle cui estremità ruota attorno al polo nord, mentre l'altra è portata dall'equatore e scorre sul grande anello, seguendo il Sole nel suo moto diurno (fig. 31). Vi sarà una forza elettromotrice agente lungo il quadrante, dal polo verso l'equatore.

La forza elettromotrice è la stessa, sia che supponiamo la Terra a riposo e il quadrante mobile da est a ovest, sia che supponiamo il quadrante a riposo e la Terra ruotante da ovest a est. Se supponiamo che la Terra giri, la forza elettromotrice è la stessa, qualunque sia la forma della parte del circuito che rimane fissa nello spazio, e una delle cui estremità tocca uno dei poli e l'altro l'equatore. In questa parte del circuito, la corrente va dal polo all'equatore.

L'altra parte del circuito, che è fissa rispetto alla Terra, può anche avere una forma qualsiasi e trovarsi all'interno o all'esterno della Terra. In questa parte, la corrente va dall'equatore all'uno o all'altro polo.

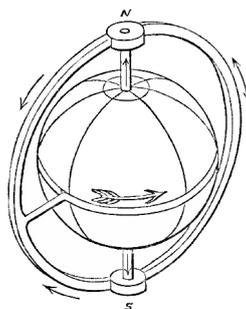


Fig. 31.

534. L'intensità della forza elettromotrice di induzione elettromagnetica è assolutamente indipendente dalla natura della sostanza di cui è composto il conduttore dove agisce, o quello che attraversa la corrente induttrice.

Per mostrare che così avviene, Faraday⁵ forma un conduttore di due fili di metalli differenti, isolati tra loro da un avvolgimento di seta, agganciati tra loro e saldati a un'estremità. Con le loro altre estremità, i fili sono collegati a un galvanometro; in questo modo, essi occupano la stessa posizione rispetto al circuito primario; e se la forza elettromotrice fosse maggiore nell'uno che nell'altro, essa produrrebbe una corrente che sarebbe misurata dal galvanometro. Si è constatato che una simile combinazione può essere soggetto alle forze elettromotrici di induzione più energiche senza che il galvanometro venga coinvolto. Si è pure trovato che il

⁵Exp. Res., p. 195.

galvanometro non indica nulla, sia che i due rami del conduttore composto siano formati da due metalli oppure da un metallo e da un elettrolita⁶.

Pertanto, la forza elettromotrice che agisce su un conduttore dipende solo dalla forma e dal movimento di questo conduttore, così come dalla forza, dalla forma e dal movimento delle correnti elettriche del campo.

535. Un'altra proprietà negativa della forza elettromotrice è che essa non ha alcuna tendenza a produrre il movimento meccanico di nessun corpo, ma che tende soltanto a produrre una corrente elettrica.

Se una corrente si produce effettivamente nel corpo, vi è un'azione meccanica dovuta a questa corrente; ma se impediamo alla corrente di formarsi, non vi è alcuna azione meccanica esercitata sul corpo stesso. Tuttavia, se il corpo è elettrizzato, la forza elettromotrice lo sposta, così che abbiamo esposto in Elettrostatica.

536. Lo studio sperimentale delle leggi di induzione di correnti elettriche nei circuiti fissi può essere perseguito con grande rigore, mediante l'impiego di metodi dove la forza elettromotrice e, di conseguenza, l'intensità sono ridotte a zero nel circuito del galvanometro.

Così, se si vuole mostrare che l'induzione della bobina *A* sulla bobina *X* è uguale a quella di *B* su *Y*, si pone la prima coppia di bobine *A* e *X* a una distanza sufficiente dalla seconda coppia *B* e *Y*. Si collegano *A* e *B* a una pila voltaica, di modo che la stessa corrente primaria attraversi *A* nel verso positivo e *B* nel verso negativo, poi si attacca *X* e *Y* (fig. 32) a un galvanometro, di modo che la corrente secondaria, se ce n'è una, attraversi *X* e *Y* successivamente nello stesso verso.

Allora, se l'induzione di *A* su *X* è uguale a quella di *B* su *Y*, il galvanometro non deve rivelare corrente di induzione quando si apre o si chiude il circuito della pila.

La delicatezza di questo metodo cresce con la forza della corrente primaria e la sensibilità del galvanometro per le correnti istantanee, e queste esperienze si svolgono più facilmente di quelle che riguardano le attrazioni elettromagnetiche e richiedono che il conduttore stessi sia leggermente sospeso.

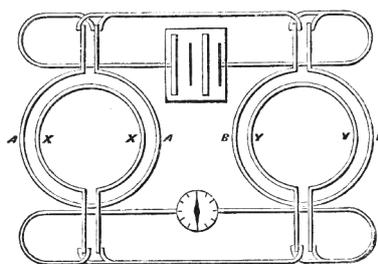


Fig. 32.

Una serie molto istruttiva di esperienze di questo genere, molto ben combinate, è stato descritto dal professor Felici, di Pisa⁷.

Io indicherò solo brevemente alcune delle leggi che si possono stabilire in questo modo:

1° La forza elettromotrice di induzione di un circuito su un altro è indipendente dalla sezione dei conduttori e dalla materia di cui sono fatti.

Infatti si può, senza nella cambiare nel risultato, sostituire nell'esperienza un circuito con un altro di sezione e di materiale differenti, ma di forma simile.

2° L'induzione del circuito *A* sul circuito *X* è uguale a quella del circuito *X* sul circuito *A*.

Poiché, se si pone *A* nel circuito del galvanometro e *X* in quello della pila, l'equilibrio delle forze elettromotrici non è inficiato.

⁶ *Exp. Res.*, p. 200.

⁷ *Annales de Chimie*, t. XXXIV, p. 66 (1852); e *Nuovo Cimento*, t. IX, p. 345, (1859).

3° L'induzione è proporzionale alla corrente induttrice.

Infatti, se si è stabilito preliminarmente che l'induzione di A su X è uguale a quella di B su Y e a quella di C su Z , e che si fa passare la corrente della pila prima attraverso A , poi la si divide tra B e C in una proporzione qualunque, e se, infine, si collega al galvanometro la serie formata da X presa in senso inverso, e di T e Z nel senso diretto, la forza elettromotrice sviluppata in X equilibra la somma delle forze elettromotrici sviluppate in Y e in Z .

4° Nelle coppie di circuiti che formano sistemi geometricamente simili, l'induzione è proporzionale alle dimensioni lineari

Infatti, supponiamo le tre coppie di circuiti menzionati prima simili tra loro, e tali che le dimensioni lineari di A siano uguali alla somma delle dimensioni lineari corrispondenti di B e C ; se si collegano in serie con la pila A, B, C e si mettono in serie con il galvanometro X nel verso contrario, Y e Z nel verso diretto, vi è equilibrio.

5° La forza elettromotrice prodotta in una bobina di n avvolgimenti con una bobina di m avvolgimenti è proporzionale al prodotto mn .

537. Per esperienze del tipo considerato, il galvanometro deve essere il più sensibile possibile e il suo ago il più leggero possibile affinché una corrente istantanea, anche molto debole, produca un effetto valutabile. Le esperienze sull'induzione prodotta dal movimento richiedono che l'ago abbia un periodo di oscillazione un poco più lungo, per avere il tempo di effettuare certi movimenti dei conduttori mentre l'ago non è ancora lontano dalla sua posizione di equilibrio. Nelle prime esperienze, le forze elettromotrici si equilibrano tutto il tempo nel circuito del galvanometro, di modo che non passa corrente nella bobina del galvanometro; nelle esperienze che descriveremo ora, la forza elettromotrice agisce dapprima in un verso, poi nell'altro, in modo da produrre successivamente nel galvanometro due correnti di verso contrario, e dobbiamo mostrare, in certi casi, gli impulsi che l'ago riceve da queste due correnti successive uguali e contrarie.

La teoria dell'impiego del galvanometro per la misura di correnti istantanee sarà esaminata più in dettaglio al § 748. Per ora, e per lo scopo proposto, basterà osservare che, fintanto che l'ago è quasi nella sua posizione di equilibrio, la forza deviatrice della corrente è proporzionale all'intensità di corrente, e che se la durata totale durante la quale agisce la corrente è breve rispetto al periodo di oscillazione dell'ago, la velocità finale del magnete è proporzionale alla quantità di elettricità trasmessa dalla corrente. Se quindi due correnti si succedono a breve intervallo, trasportando in senso contrario quantità uguali di elettricità, l'ago deve restare alla fine privo di velocità.

Così, per mostrare che le correnti indotte nel circuito secondario dalla chiusura e dall'interruzione del circuito primario sono uguali come quantità totale di elettricità trasmessa, ma di versi contrari, possiamo disporre le comunicazioni del circuito primario con la pila, in modo che, appoggiando su una chiave o ritraendo la mano, si possa a piacere inviare la corrente nel circuito primario o interromperlo. Se si abbassa la chiave per un certo tempo, il galvanometro posto nel circuito secondario indica, nel momento in cui si stabilisce il contatto, una corrente istantanea in verso contrario della corrente primaria. Se si mantiene il contatto, questa corrente di induzione non fa che passare e scomparire rapidamente. Se ora si interrompe il contatto, un'altra corrente istantanea attraversa in verso contrario il circuito secondario, e l'ago del galvanometro riceve un impulso nel verso contrario.

Ma, se si stabilisce il contatto per un istante e lo si interrompe subito, le due correnti indotte si succedono così rapidamente nel galvanometro che l'ago, subendo l'impulso della prima corrente, non ha avuto il tempo di spostarsi sensibilmente dalla sua posizione di equilibrio, essendo bloccato dalla seconda corrente, e, grazie alla rigorosa uguaglianza delle quantità trasmesse in queste due correnti istantanee, l'ago di ferma presto.

Se si osserva l'ago con attenzione, sembra lanciato, per una brusca scossa, da una posizione di riposo a un'altra posizione di riposo molto vicina alla prima.

Si dimostra così che la quantità di elettricità trasmessa nella corrente indotta di rottura è esattamente uguale e di verso contrario a quella della corrente indotte di chiusura.

538. Ecco un'altra applicazione di questo metodo, che è stato dato da Felici nella seconda serie delle sue *Recherches*.

È sempre possibile trovare numerose posizioni della bobina secondaria B tali che non si producano correnti di induzione quando si stabilisce o che si interrompe il contatto con la bobina primaria A . Si dice allora che le posizioni di due bobine sono coniugate.

Siano B_1 e B_2 due di queste posizioni. Se la bobina B è bruscamente spostata dalla posizione B_1 alla posizione B_2 , la somma algebrica delle correnti istantanee che la attraversano è esattamente nulla, di modo che l'ago del galvanometro rimane a riposto quando avviene il movimento di B .

Ciò è vero, qualunque sia il modo in cui B_1 raggiunge B_2 e la corrente che attraversa la bobina primaria rimane costante o varia durante il movimento.

Sia ancora B' un'altra posizione di B non coniugata di A e tale, di conseguenza, che si producano correnti di induzione in B , quando si apre o si chiude il contatto in A .

Stabiliamo il contatto quando B è nella posizione B_1 ; non vi è corrente di induzione; spostiamo B fino a B' , vi è una corrente di induzione dovuta al movimento; ma, se B è rapidamente portato in B' e si taglia il circuito primario la corrente indotta di rottura annulla esattamente l'effetto al movimento, di modo che l'ago del galvanometro rimane fermo. Pertanto la corrente dovuta allo spostamento da una posizione coniugata fino ad un'altra posizione qualunque è uguale alla corrente di rottura ottenuta in questa ultima posizione.

Ma, poiché l'effetto della chiusura è uguale e contrario a quello della rottura, ne risulta che, se si stabilisce il contatto mentre la bobina B è in una posizione qualunque B' , l'effetto prodotto è uguale a quello che si otterrebbe portando la bobina da una posizione coniugata B_1 fino a B' mentre la corrente circola in A .

Se il cambiamento delle posizioni relative delle bobine è ottenuto spostando il circuito primario invece di quello secondario, si trova un risultato analogo.

539. Da queste esperienze risulta che, se simultaneamente A si sposta da A_1 in A_2 e B da B_1 in B_2 , mentre l'intensità in A varia da γ_1 a γ_2 , la corrente di induzione totale che attraversa B dipende solo dallo stato iniziale A_1, B_1, γ_1 e dallo stato finale A_2, B_2, γ_2 e non dalla natura degli stati intermedi per i quali è passato il sistema.

Pertanto il valore della corrente di induzione totale deve essere della forma

$$F(A_2, B_2, \gamma_2) - F(A_1, B_1, \gamma_1)$$

dove F è una funzione di A, B, γ .

Relativamente alla forma di questa funzione, sappiamo (§ 536) che, quando non vi è movimento e, di conseguenza, quando $A_1 = A_2$ e $B_1 = B_2$, la corrente di induzione è proporzionale alla corrente primaria. Pertanto γ interviene solo come fattore, essendo l'altro fattore una funzione della forma e della posizione dei circuiti A e B .

Sappiamo anche che il valore di questa funzione dipende dalle posizioni relative e non da quelle assolute di A e B ; essa non deve potersi esprimere come funzione delle distanze dei diversi elementi di cui sono composti i circuiti e degli angoli che questi elementi formano tra loro-

Sia M questa funzione. Una corrente di induzione totale si potrà rappresentare con

$$C(M_1\gamma_1 - M_2\gamma_2)$$

dove C è la conducibilità del circuito secondario, e dove M_1 e γ_1 sono i valori iniziali, M_2 e γ_2 i valori finali di M e di γ .

Queste esperienze mostrano quindi che la corrente di induzione totale dipende dal cambiamento che si produce su una certa quantità $M\gamma$, cambiamento che può provenire sia da una variazione

della corrente primaria γ , sia da un movimento del circuito primario o di quello secondario che modificherà il valore di M .

540. Questa concezione di una quantità le cui variazioni, e non la grandezza assoluta, determinano la corrente di induzione si era presentata alla mente di Faraday all'inizio delle sue *Recherches*⁸. Egli osservò che il circuito secondario, mantenuto a riposo in un campo elettromagnetico di intensità costante, non manifesta effetti elettrici, mentre avrebbe avuto corrente se si fosse prodotto bruscamente lo stesso stato del campo. Inoltre, se si sposta dal campo la corrente primaria o se si sopprimono le forze magnetiche, vi è una corrente di verso contrario. Per questo motivo egli vedeva nello stato di un circuito secondario posto in un campo elettromagnetico “uno stato elettrico particolare della materia”, al quale dava il nome di *stato elettrotonico*. Più tardi, riconobbe che si poteva superare questa ipotesi e impiegare soltanto considerazioni di linee di forze magnetiche⁹; ma, anche nelle sue ultime *Recherches*¹⁰, disse: “In numerosi passaggi, l'idea di uno stato elettrotonico¹¹ si è imposta alla mia mente”.

Tutta la storia del percorso fatto da questa idea nella mente di Faraday, come ce la mostrano le sue *Recherches* pubblicate, merita di essere ben studiata. Una serie di esperienze, che avevano ispirato riflessioni continue senza l'aiuto del calcolo matematico, lo avevano portata a riconoscere l'esistenza di qualcosa che sappiamo ora essere una quantità matematica, che si può chiamare la quantità fondamentale nella teoria dell'Elettromagnetismo. ma, siccome era giunto a questa idea con una via puramente sperimentale, gli attribuiva un'esistenza fisica e supposeva che si trattasse di uno stato particolare della materia; restava, d'altronde, già pronto ad abbandonare questa teoria prima che si potesse spiegare i fenomeni per mezzi di idee con un forma più familiare.

Molto tempo dopo, altre ricerche hanno portato alla stessa idea per via puramente matematica; ma nessuno, che io sappia, ha riconosciuto nella concezione matematica complessa del potenziale dei due circuiti, l'ipotesi ardita di Faraday di uno stato elettrotonico. Coloro che hanno affrontato questo studio seguendo la via indicata dagli eminenti investigatori che hanno per primi ridotto le leggi di questi fenomeni a una forma matematica hanno spesso faticato ad apprezzare il rigore scientifico delle leggi enunciate con una così meravigliosa perfezione nelle prime due serie delle *Recherches* di Faraday.

Il valore scientifico di questa idea dello stato elettrotonico di Faraday consiste nel fatto che porta la mente a attaccarsi a una certa quantità i cui cambiamenti determinano i fenomeni in questione. Ma, se non si danno sviluppi ben più grandi di quanto non ne abbia ricevuto Faraday, questa idea non si presta facilmente alla spiegazione dei fenomeni. Torneremo su questo punto al § 584.

541. Un metodo che, nelle mani di Faraday, è stato molto potente, è quello dell'uso di queste linee di forza magnetica che egli aveva sempre presenti quando considerava i magneti o le correnti elettriche, e il cui schema, ottenuto con la limatura di ferro, gli sembrava¹² a ragione della massima utilità per lo sperimentatore.

Faraday considerava la direzione di queste linee come rappresentativa della direzione della forza magnetica, ma anche associando il loro numero all'intensità di questa forza; e, nelle sue ultime *Recherches*¹³, ha mostrato come si possono immaginare linee di forza unitarie. In diverse parti di questo Trattato, ho spiegato quali relazioni esistono tra le proprietà che Faraday attribuiva alle linee di forza e le condizioni matematiche alle quali soddisfano le forze elettriche

⁸ *Exp. Res.*, serie I, p. 60.

⁹ *Ibid.*, serie II, p. 242.

¹⁰ *Ibid.*, 3269.

¹¹ *Ibid.*, 60, 1114, 1661, 1729, 1733.

¹² *Exp. Res.*, 3234.

¹³ *Exp. Res.*, p. 3122.

e magnetiche, e come si possa dare una precisione matematica alla nozione di Faraday delle linee-unità e del loro numero (si veda § 82, 404, 490).

Nella prima serie delle sue *Recherches*¹⁴, mostra chiaramente come il verso della corrente in un circuito conduttore di cui una parte è mobile dipende dal modo in cui tale parte interseca le linee di forza magnetica.

Nella seconda serie¹⁵, mostra come si possono spiegare i fenomeni prodotti dalle variazioni di intensità di una corrente o di un magnete, supponendo che il sistema delle linee di forza si sviluppa attorno al filo o al magnete o si contrae verso di esso, a secondo che la sua potenza cresce o diminuisce.

Non so a quale grado di chiarezza fosse già pervenuto nella teoria che ha più tardi esposto così chiaramente¹⁶, cioè, quando un conduttore si muove tagliando linee di forza, l'azione che subisce dipende dall'area o dalla sezione di tali linee. Ma questa visione della questione non sembra più nuova, se si tiene conto delle *Recherches* esposte nella seconda serie¹⁷.

La concezione che si faceva Faraday della continuità delle linee di forza gli impediva di ammettere che queste linee potessero subito cominciare ad esistere in un punto in cui esse non esistevano in precedenza. Se quindi il numero delle linee di forza che attraversano un circuito varia, ciò può essere solo perché il circuito si muove tagliando queste linee, o perché le linee si muovono tagliando il circuito. In entrambi i casi, vi è una produzione di corrente nel circuito.

Il numero di linee di forza che attraversano un circuito è quindi matematicamente equivalente all'idea iniziale di Faraday dello stato elettrotonico di questo circuito ed è rappresentato dalla quantità $M\gamma$.

È solo dopo che si è precisata la definizione della forza elettromotrice (§ 69, 274) e il modo di misurarla che possiamo enunciare completamente, nella forma seguente, le effettive leggi dell'Elettromagnetismo:

La forza elettromotrice totale che, in un momento dato, agisce lungo un circuito, è proporzionale al decremento per unità di tempo del numero di linee di forza magnetica che attraversano il circuito.

Integrando rispetto al tempo, questo enunciato diviene:

La somma dell'integrale rispetto al tempo della forza elettromotrice che agisce lungo un circuito e al numero delle linee di forza che passano attraverso questo circuito, è costante.

Invece di parlare del numero di linee di forza magnetica, possiamo parlare dell'induzione magnetica attraverso il circuito o dell'integrale dell'induzione magnetica su una superficie qualunque delimitata dal circuito.

Torneremo al metodo di Faraday; ma, per ora, dobbiamo elencare le teorie dell'induzione che sono fondate su altre considerazioni.

Legge di Lenz

542. Nel 1834, Lenz¹⁸ fece conoscere la significativa relazione che segue, tra i fenomeni di azione meccanica dovute alle correnti elettriche, e definiti dalla formula di Ampère, e quelli dell'induzione elettrica dal movimento relativo dei conduttori. In precedenza, nella *Philosophical Magazine* di gennaio dello stesso anno, Ritchie aveva provato ad enunciare una relazione dello stesso tipo; ma aveva assegnato in tutti i casi una direzione inesatta della corrente indotta. Ecco la legge di Lenz:

¹⁴ *Exp. Res.*, p. 114.

¹⁵ *Exp. Res.*, p. 238.

¹⁶ *Exp. Res.*, p. 3082, 3087, 3113.

¹⁷ *Exp. Res.*, p. 217, ecc.

¹⁸ *Pogg. Ann.*, vol. XXXI, p. 483; 1834.

Se una corrente costante attraversa il circuito primario A , e che, dal movimento di A o del circuito secondario B , una corrente sia indotta in B , il verso di questa corrente è tale che la sua azione elettromagnetica su A tende a contrastare il movimento relativo dei circuiti.

Su questa legge J. Neumann¹⁹ ha fondato la sua teoria matematica dell'induzione, dove ha stabilito le leggi matematiche delle correnti indotte per spostamento del conduttore primario o del conduttore secondario. Bisogna vedere che questa quantità M , che abbiamo chiamato il potenziale di un circuito sull'altro, non è altro che questo potenziale elettromagnetico di un circuito sull'altro che abbiamo già studiato a proposito della formula di Ampère. Possiamo quindi considerare J. Neumann come colui che esteso all'induzione delle correnti l'impiego dei metodi matematici che Ampère aveva applicato alle loro azioni meccaniche.

543. Un progresso scientifico più importante ancora fu realizzato poco tempo dopo da Helmholtz, nel suo *Essai sur la conservation de la force*²⁰, e da Sir W. Thomson²¹, nei lavori di poco posteriori ma indipendenti da quelli di Helmholtz. Hanno mostrato che l'induzione delle correnti elettriche, scoperta da Faraday, si poteva dedurre matematicamente dalle azioni elettromagnetiche scoperte da Oersted e Ampère, applicando il principio della conservazione dell'energia.

Helmholtz prende il caso di un circuito conduttore di resistenza R , nel quale agisce una forza elettromotrice A dovuta a una pila voltaica o termoelettrica. In ogni istante la corrente che attraversa il circuito è I . Egli suppone in movimento nelle vicinanze del circuito un magnete il cui potenziale rispetto al conduttore è V , di modo che l'energia ceduta al magnete, per l'azione elettromagnetica durante un intervallo di tempo molto breve dt , è

$$I \frac{dV}{dt} dt$$

Il lavoro compiuto sotto forma di calore liberato nel circuito è, dalla legge di Joule (§ 242)

$$I^2 R dt$$

e il lavoro speso dalla forza elettromotrice A , per mantenere la corrente I nell'intervallo dt , è

$$A I dt$$

Pertanto, poiché il lavoro compiuto deve essere uguale al lavoro speso

$$A I dt = I^2 R dt + I \frac{dV}{dt} dt$$

da cui si ricava l'intensità di corrente

$$I = \frac{A - \frac{dV}{dt}}{R}$$

Il valore di A è arbitrario: poniamolo uguale a zero, allora

$$I = -\frac{1}{R} \frac{dV}{dt}$$

La corrente totale indotta mentre il magnete si sposta da un punto dove il suo potenziale è V_1 a un punto dove il suo potenziale è V_2 è

$$\int I dt = -\frac{1}{R} \int \frac{dV}{dt} dt = \frac{1}{R} (V_1 - V_2)$$

¹⁹ *Berlin. Acad.*, 1845 e 1847.

²⁰ Letto davanti alla Società di Fisica di Berlino, il 23 luglio 1847. Tradotto nelle *Taylor's Scientific Memoirs*, seconda parte, p. 114.

²¹ *Trans. Brit. Ass.*, 1848, e *Phil. Mag.*, dic. 1851. Si veda anche la Memoria sulle *Transient Electric Currents* (*Phil Mag.*, 1853).

Pertanto la corrente totale è indipendente dalla velocità o dal percorso seguito dal magnete e dipende solo dalle sue posizioni iniziale e finale.

Nel suo primo studio, Helmholtz impiegò un sistema di unità basato sul calore che la corrente produce nel conduttore. Considerando come arbitraria l'unità di intensità, l'unità di resistenza è quella nella quale questa unità di intensità produce l'unità di calore nell'unità di tempo. In questo sistema, l'unità di forza elettromotrice è quella che dà luogo all'unità di intensità in un conduttore che presenta l'unità di resistenza. L'impiego di questo sistema porta all'introduzione nelle equazioni di un coefficiente a , che è l'equivalente meccanico dell'unità di calore. Poiché noi ci atteniamo al sistema delle unità elettrostatiche o al sistema delle unità elettromagnetiche, questo fattore non appare nelle equazioni qui presentate.

544. Helmholtz calcola così la corrente di induzione quando un circuito conduttore e un circuito attraversato da una corrente costante si muovono l'uno rispetto all'altro.

Siano R_1 e R_2 le resistenze; I_1 e I_2 le intensità; A_1 A_2 le forze elettromotrici esterne; V il potenziale di un circuito rispetto all'altro quando l'unità di corrente attraversa ognuno dei conduttori.

Si ha

$$A_1 I_1 + A_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_1 I_2 \frac{dV}{dt}$$

Supponiamo che I_1 sia la corrente primaria e che I_2 sia molto piccola tale da non produrre per induzione un cambiamento osservabile su I_1 ; possiamo allora porre

$$I_1 = \frac{A_1}{R_1}$$

e allora

$$I_2 = \frac{A_2 - I_1 \frac{dV}{dt}}{R_2}$$

risultato che si può interpretare assolutamente come nel caso del magnete.

Se supponiamo che I_2 sia la corrente primaria e che I_1 sia molto più piccola di I_2 , abbiamo per I_1

$$I_1 = \frac{A_1 - I_2 \frac{dV}{dt}}{R_1}$$

ciò che mostra che, per correnti uguali, la forza elettromotrice indotta dal primo circuito agente sul secondo è uguale a quella del secondo agente sul primo, qualunque sia la forma dei circuiti.

In questa Memoria, Helmholtz non discute il caso dell'induzione dovuta all'aumento a diminuzione della corrente primaria, né l'induzione di una corrente su se stessa. Thomson²² ha applicato lo stesso principio alla determinazione del valore meccanico di una corrente, e ha mostrato che, quando è compiuto del lavoro dall'azione reciproca di due correnti costanti, il loro valore meccanico è aumentato, di modo che la pila deve fornire, oltre al lavoro necessario per mantenere queste correnti malgrado la resistenza dei circuiti, il doppio del lavoro effettuato²³.

545. Introducendo un sistema di unità assolute per la misura delle quantità elettriche, W. Weber fece realizzare alla Scienza uno dei più grandi progressi. Già, con Gauss, aveva portato la misura delle quantità magnetiche al primo livello dei metodi di precisione; poi si occupò nelle *Electrodynamic Measurements*, non solo di stabilire principi razionali relativi alla scelta delle unità di misura da impiegare, ma anche di determinare certe quantità elettriche in funzione di queste unità con un grado di precisione al quale non si era ancora potuto pervenire. A queste

²²*Theory of Electrolysis, Phil. Mag.*, Dic. 1851.

²³Nichols *Cyclopaedia of Physical Science*, ed. 1861, Articolo Magnetismo, *Dynamical Relations of*, e *Reprint*, § 571.

ricerche i due sistemi di unità elettrostatiche ed elettrodinamiche devono il loro sviluppo e la loro applicazione pratica.

Weber ha pure creato una teoria generale dell'azione elettrica, dalla quale si deduce la forza elettrostatica e quella elettromagnetica, così come l'induzione delle correnti elettriche. Ritorneremo, in un Capitolo speciale, su questa teoria e su alcuni degli sviluppi più recenti (si veda § 846).

12 Induzione di una corrente su se stessa

546. Faraday ha dedicato la nona serie delle sue *Recherches* allo studio di una classe di fenomeni ai quali dà origine la corrente che attraversa un filo formante la bobina di un elettromagnete.

M. Jenkins aveva osservato che non si può produrre una scossa valutabile mediante l'azione diretta di un sistema voltaico formato da una sola coppia; ma che, se si fa passare la corrente nella bobina di un elettromagnete e si taglia il circuito tra le estremità dei due fili tenuti ciascuno in mano, si sente una leggera scossa. Non si sente nulla di questo genere quando si stabilisce il contatto.

Faraday ha mostrato che questo fenomeno, e altri che descrive, sono dovuti alla stessa azione induttiva della corrente, di cui aveva già osservato gli effetti esercitati su conduttori vicini di corrente; ma, in questo caso, l'azione si esercita sul conduttore stesso dove circola la corrente, ed è tanto più potente quanto il filo è più vicino a diversi elementi di corrente.

547. Ma egli nota¹ che “la prima idea che si presenta alla mente è che l'elettricità in movimento nel filo possiede qualcosa di analogo a una quantità di moto o a un'inerzia”. Infatti, se si considera solo un filo, i fenomeni sono del tutto simili a quelli che si osserverebbero in un tubo pieno d'acqua che scorre continuamente. Se, mentre l'acqua scorre, si ferma bruscamente l'estremità del tubo, la quantità di moto dell'acqua produce una pressione improvvisa, ben superiore a quella dovuta alla carica, e tale da far scoppiare la condotta.

Se l'acqua può sfuggire da un orifizio stretto quando la principale apertura è chiusa, essa è lanciata con una velocità ben maggiore di quella che è dovuta alla sua carica; e, se può sfuggire da una valvola in un serbatoio, essa lo fa, quando anche la pressione nel serbatoio sarà superiore a quella che è dovuta alla propria carica.

Su questo principio è costruito il pistone idraulico, per mezzo del quale una piccola quantità di acqua può essere innalzata a una grande altezza per mezzo di una grande quantità che cade da un livello molto meno elevato.

548. Questi effetti di inerzia del fluido contenuto nel tubo dipendono solo dalla quantità di fluido in movimento, dalla lunghezza del tubo e dalla sua sezione nei diversi punti della sua lunghezza. Non dipendono dagli oggetti esterni, né dalla forma secondo la quale il tubo può essere curvato, purché la sua lunghezza rimanga costante.

Non così avviene per un filo attraversato da una corrente: se si ripiega su se stesso raddoppiandolo un lungo filo, l'effetto è molto piccolo; se si separano le due parti, l'effetto è maggiore; aumenta ancora se il filo è arrotolato in una bobina, ed è il più grande possibile se, all'interno di questa bobina, si introduce un nucleo di ferro.

Se si avvolge contemporaneamente al primo un secondo filo da cui è isolato, e se questo secondo filo non forma un circuito chiuso, gli effetti sono gli stessi di prima; ma, se il secondo filo forma un circuito chiuso, vi si produce una corrente di induzione, e gli effetti di auto-induzione nel primo filo sono ritardati.

549. Questi risultati ci mostrano chiaramente che, se questi fenomeni sono dovuti a una quantità di moto, non è certamente quella dell'elettricità che circola nel filo; poiché lo stesso filo, attraversato dalla stessa corrente, produce effetti variabili secondo la sua forma; e anche, non cambiando la sua forma, la presenza di oggetti esterni, come un pezzo di ferro o un circuito metallico chiuso, influisce sul risultato.

¹*Exp. Res.*, 1077.

550. Ma, per la mente che ha una volta riconosciuto l'analogia che presentano i fenomeni di auto-induzione e quelli del moto dei corpi materiali, è difficile rinunciare del tutto all'aiuto che si può trarre da questa analogia o di ammettere che essa è puramente superficiale e ingannevole. Dal punto di vista dinamico, la nozione fondamentale di materia si riduce alla facoltà di divenire con il movimento una specie di serbatoio di quantità di moto e di energia; e questa idea è intimamente legata alle forme del nostro pensiero che, dal momento in cui la possiamo intravedere in una parte qualunque della natura, sentiamo di avere davanti a noi un percorso che ci può portare prima o dopo alla completa comprensione della questione.

551. Nel caso della corrente elettrica, troviamo che la forza elettromotrice che inizia ad agire non produce immediatamente la corrente per intero, ma che essa aumenta gradualmente. Cosa fa quindi la forza elettromotrice durante il tempo in cui la resistenza che si oppone alla corrente non gli fa ancora equilibrio? Essa aumenta la corrente elettrica.

Ora una forza che agisce su un corpo comune nel verso del suo moto aumenta la sua quantità di moto e gli fornisce l'energia cinetica, cioè la capacità di compiere lavoro in virtù del suo movimento.

Analogamente, la parte della forza elettromotrice che non ha incontrato resistenza è servita ad aumentare la corrente elettrica. La corrente così prodotta, ha una quantità di moto o una energia cinetica?

Abbiamo già mostrato che possiede qualcosa di assai simile a una quantità di moto; che oppone resistenza a un arresto brusco e che può sviluppare per un certo periodo una notevole forza elettromotrice.

Ma un circuito conduttore nel quale si è stabilita una corrente possiede, grazie a questa corrente, il potere di compiere lavoro; e si potrebbe dire che questo potere sia qualcosa di simile all'energia, poiché è realmente e veramente energia.

Così la corrente lasciata a se stessa continua a circolare finché sarà fermata dalla resistenza del circuito; ma, dovendo essere fermata, libera una certa quantità di calore, la quale, espressa in misura dinamica, è uguale all'energia che esisteva inizialmente nella corrente.

Analogamente, essendo la corrente lasciata a se stessa, le si può far compiere il lavoro meccanico di spostare dei magneti; e, dalla legge di Lenz, l'effetto induttivo di questi movimenti è di fermare la corrente piuttosto che lasciare questo compito alla sola resistenza del circuito. In questo modo, una parte dell'energia della corrente si può trasformare in lavoro meccanico invece di divenire calore.

552. Si vede quindi che un conduttore attraversato da una corrente è sede di energia di una certa natura; e, poiché possiamo pensare la corrente elettrica solo come un fenomeno cinetico², la sua energia deve essere energia cinetica, cioè l'energia che un corpo possiede in virtù del suo movimento.

Abbiamo già mostrato che non si può considerare l'elettricità che circola in un filo come fosse il corpo nel quale si deve ritrovare questa energia; poiché l'energia di un corpo mobile non dipende per nulla da ciò che gli è esterno, mentre la presenza di altri corpi vicini alla corrente modifica la sua energia.

Siamo quindi portati a ricercare se non possa produrre qualche movimento nello spazio esterno al filo, dove non passa corrente elettrica, ma dove si manifestano gli effetti elettromagnetici di questa corrente.

Non esaminerò, per ora, le ragioni che si devono cercare di questi movimenti in uno spazio piuttosto che in un altro, o di considerarli come di una specie piuttosto che di un'altra.

Ciò che mi propongo di fare ora, è di esaminare le conseguenze dell'ipotesi che i fenomeni della corrente elettrica sono gli stessi di quelli di un sistema mobile, essendo il moto trasmesso da un punto a un altro del sistema da forze di cui, per ora, non cercherò di definirne la natura

²Faraday, *Exp. Res.*, (283).

né le leggi, poiché queste forze possono essere eliminate da equazioni di moto con il metodo indicato da Lagrange per un sistema a vincoli qualsiasi.

Nei cinque Capitoli che seguono, mi propongo di dedurre da un'ipotesi dinamica di questo tipo i tratti principali della teoria dell'elettricità, invece di seguire la via che ha portato Weber e altri scienziati a un grande numero di scoperte e di esperienze significative, e a concezioni alcune delle quali sono così belle e audaci. Ho preferito questo metodo perché volevo mostrare che vi sono altri modi di esaminare i fenomeni, che mi sembrano più soddisfacenti e che, nello stesso tempo, si accordano con i metodi seguiti nelle Parti precedenti di quest'Opera, meglio di quanto non fanno i metodi basati sull'ipotesi di un'azione diretta a distanza.

13 Sulle equazioni del moto di un sistema con vincoli

553. Nella quarta Sezione della seconda Parte della sua *Mécanique analytique*, Lagrange ha fornito un metodo per ridurre le equazioni dinamiche ordinarie del moto delle parti di un sistema vincolato a un ugual numero a quello dei gradi di libertà del sistema.

Le equazioni del moto di un sistema con vincoli sono state date sotto un'altra forma da Hamilton, e hanno portato a un grande sviluppo delle parti superiori della Dinamica pura¹.

Siccome, per il nostro tentativo di far rientrare i fenomeni elettrici nel dominio della Dinamica, è necessario che le nostre idee dinamiche abbiano la forma che conviene per l'applicazione diretta ai problemi fisici, dedichiamo questo Capitolo all'esposizione di queste idee, da un punto di vista fisico.

554. Lagrange si proponeva di riportare la Dinamica dipendere solo dal calcolo. Inizia quindi con l'esprimere le relazioni dinamiche elementari per mezzo di relazioni corrispondenti tra quantità puramente algebriche, e da equazioni così ottenute dedusse le sue equazioni finali con un'operazione puramente algebrica. Certe quantità, esprimenti le reazioni che si stabiliscono tra le parti del sistema a causa dei loro vincoli fisici, figurano nelle equazioni del moto parti che compongono questo sistema: lo studio di Lagrange, considerato dal punto di vista matematico, è un metodo per eliminare queste quantità dalle equazioni finali.

Quando segue i progressi di questa eliminazione, la mente si applica al calcolo e deve, di conseguenza, restare libera dall'intervento di ogni idea dinamica. Ma il nostro scopo è di coltivare le nostre idee dinamiche. Approfittiamo quindi del lavoro dei matematici per far passare i risultati del linguaggio del calcolo in quello della Dinamica, in modo che le nostre espressioni raffigurino alla mente, non qualche operazione algebrica, ma certe proprietà dei corpi in movimento.

Il linguaggio della Dinamica è stato notevolmente esteso, principalmente da coloro che hanno sviluppato, nella forma corrente, la dottrina della conservazione dell'energia; si vedrà che una buona parte dell'esposizione che segue è stata suggerita dallo studio fatto di questo tema nella *Natural Philosophy* di Thomson e Tait: tale è, in particolare, il metodo consistente nell'iniziare con la teoria delle forze impulsive.

Ho applicato questo metodo in modo da evitare di introdurre esplicitamente la considerazione del moto di nessuna parte del sistema diverse dalle coordinate o variabili, dalle quali dipende il movimento del tutto. Senza dubbio è importante che il lettore sappia la relazione che esiste tra il moto di ogni parte del sistema e il moto delle coordinate, ma non è del tutto necessario passare da lì per ottenere le equazioni finali, le quali sono indipendenti dalla forma particolare di questi vincoli.

Le variabili

555. Il numero dei gradi di libertà di un sistema è il numero dei dati che devono essere conosciuti, perché la posizione del sistema sia completamente determinata. Questi dati possono essere presentati sotto forme differenti, ma il loro numero dipende dalla natura stessa del sistema, e non potrà essere cambiato.

¹Si veda del Professor Cayley il *Report on Theoretical Dynamics, British Association*, 1857; a Thomson e Tait, *Natural Philosophy*.

Per fissare le idee, possiamo immaginare che i vincoli del sistema siano realizzati per mezzo di un meccanismo opportuno comprendente un certo numero di parti mobili, tutte in grado di assumere un moto rettilineo, e che non possono avere alcun altro movimento. Questo meccanismo ideale che collega le diverse parti al sistema deve essere supposto esente da attrito, privo di inerzia, e che non può essere deformato dall'azione di forze applicate. D'altra parte questo meccanismo serve solo ad aiutare l'immaginazione ad attribuire una posizione, una velocità e una quantità di moto a ciò che compare nelle ricerche di Lagrange solo come quantità puramente algebriche.

Indichiamo con q la posizione di una di queste parti mobili, definita dalla sua distanza da un punto fisso preso sulla retta lungo la quale si muove. Distingueremo con gli indici 1, 2, ... i valori di q , che corrispondono alle diverse parti. Quando ci occuperemo di una serie di quantità corrispondenti a una sola parte, potremo sopprimere l'indice.

Quando i valori di tutte le variabili (q) sono dati, la posizione di ogni parte mobile è nota, e, in virtù del meccanismo ideale, la configurazione di tutto il sistema è determinata.

Le velocità

556. Durante il movimento del sistema, la sua configurazione cambia in un certo modo definito; e, poiché in ogni istante la configurazione del sistema è interamente determinata dai valori delle variabili q , la velocità di ogni parte così come la sua configurazione saranno completamente determinate se conosciamo i valori delle variabili q e le loro velocità $\frac{dq}{dt}$, o, secondo la notazione di Newton, \dot{q} .

Le forze

557. Regolando opportunamente il movimento delle variabili, si può produrre qualsiasi movimento compatibile con la natura dei vincoli. Per produrre questo movimento con lo spostamento delle parti mobili, bisogna applicare loro delle forze.

Indicheremo con F_r la forza che deve essere applicata a una variabile q_r . Il sistema di forze, F , è meccanicamente equivalente, in virtù dei vincoli, al sistema delle forze che producono effettivamente il movimento.

Le quantità di moto

558. Quando un corpi si muove in modo che la sua configurazione rimane sempre la stessa rispetto alla forza che agisce su di esso (per esempio quando una forza agisce su una molecola isolata lungo la direzione del suo moto), la forza motrice ha per misura l'aumento della quantità di moto nell'unità di tempo. Se F è la forza motrice e p la quantità di moto

$$F = \frac{dp}{dt}$$

da cui

$$p = \int F dt$$

L'integrale sul tempo di una forza è detto l'impulso di questa forza e possiamo quindi dire che la quantità di moto è l'impulso della forza che porterebbe il corpo dallo stato di quiete a quello del moto considerato.

Nel caso del movimento di un sistema vincolato, la sua configurazione cambia costantemente con una rapidità che dipende dalle velocità, \dot{q} ; non possiamo quindi più ammettere che la sua quantità di moto sia l'integrale sul tempo della forza che agisce su di esso.

Ma l'aumento δq di una variabile non può essere superiore a $\dot{q}'\delta t$, essendo δt il tempo durante il quale avviene l'aumento, e \dot{q}' è il valore più grande della velocità in questo tempo. Nel caso di un sistema inizialmente a riposo sotto l'azione di forze sempre dirette nello stesso verso, questa velocità è evidentemente la velocità finale.

Se si dà la velocità la configurazione finali del sistema, possiamo pensare che la sua velocità sia stata comunicata al sistema in un tempo δt molto piccolo, differendo la configurazione iniziale da quella finale di quantità $\delta q_1, \delta q_2, \dots$ inferiori a $\dot{q}_1\delta t, \dot{q}_2\delta t, \dots$.

Più piccolo supporremo l'incremento di tempo δt , più grandi dovranno essere le forze applicate, ma l'integrale di tempo o l'impulso di ogni forza resterà finito. Il valore limite dell'impulso, quando il tempo decresce e diviene al limite nullo, è ciò che si chiama, per definizione, l'impulso istantaneo; e la quantità di moto p relativa a una variabile q è definita come fosse l'impulso relativo a questa variabile, che porterebbe istantaneamente il sistema dallo stato di quiete a quello di moto considerato.

Questo modo di vedere, che le quantità di moto possono essere prodotte da impulsi istantanei applicati a un sistema in quiete, è qui introdotto solo come mezzo per definire la grandezza delle quantità di moto, poiché quelle del sistema dipendono solo dallo stato reale del suo movimento, e non dal modo in cui il movimento è prodotto.

In un sistema vincolato, la quantità di moto relativa a una variabile qualunque è generalmente una funzione lineare delle velocità di tutte le variabili, invece di essere, come nella dinamica dei punti materiali, semplicemente proporzionali alla velocità di questa variabile.

Gli impulsi necessari per far passare la velocità di un sistema da $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ a $\dot{q}'_1, \dot{q}'_2, \dots$ sono evidentemente uguale a $p'_1 - p_1, p'_2 - p_2, \dots$, il cambiamento di quantità di moto di differenti variabili.

Lavoro di un piccolo impulso

559. Il lavoro compiuto dalla forza F_1 durante l'impulso è l'integrale spaziale della forza, o

$$W = \int F_1 dq_1 = \int F_1 \dot{q}_1 dt$$

Se \dot{q}'_1 e \dot{q}''_1 sono il più grande e il più piccolo valore della velocità \dot{q}_1 nel tempo di azione della forza, W deve essere inferiore a

$$\dot{q}'_1 \int F_1 dt \quad \text{o} \quad \dot{q}'_1 (p'_1 - p_1)$$

e maggiore di

$$\dot{q}''_1 \int F_1 dt \quad \text{o} \quad \dot{q}''_1 (p'_1 - p_1)$$

Se ora supponiamo che il valore dell'impulso diminuisca senza limiti, i valori di \dot{q}'_1 e \dot{q}''_1 tenderanno verso quello di \dot{q}_1 e infine coincideranno con esso; e potremo porre $p'_1 - p_1 = \delta p_1$, di modo che il lavoro compiuto sarà infine

$$\delta W_1 = \dot{q}_1 \delta p_1$$

o, *il lavoro compiuto da un impulso molto piccolo è, al limite, il prodotto dell'impulso per la velocità.*

Aumento dell'energia cinetica

560. Quando si spende lavoro per mettere in movimento un sistema conservativo, gli si comunica dell'energia, e il sistema diviene in grado di effettuare contro le resistenze una quantità di lavoro uguale prima di tornare in quiete.

Si chiama energia cinetica l'energia che possiede un sistema in virtù del suo movimento: essa gli è trasferita sotto la forma di lavoro compiuto dalle forze che lo mettono in movimento.

Se T è l'energia cinetica del sistema, e se essa diviene $T + \delta T$ per l'azione di un impulso infinitamente piccolo, le cui componenti sono $\delta p_1, \delta p_2, \dots$, l'incremento δT deve essere la somma delle quantità di lavoro compiuto dalle componenti dell'impulso, che si può scrivere

$$\delta T = \dot{q}_1 \delta p_1 + \dot{q}_2 \delta p_2 + \dots = \sum (\dot{q} \delta p) \quad (13.0.1)$$

Lo stato istantaneo del sistema è completamente definito, se si assegnano le variabili e le quantità di moto. Pertanto, l'energia cinetica, che dipende dallo stato istantaneo del sistema, si può esprimere in funzioni delle variabili, q , e delle quantità di moto, p . Questo è un modo di esprimere T introdotto da Hamilton. Quando T sarà espresso in questo modo, la distingueremo con l'indice p , T_p .

La variazione completa di T_p è

$$\delta T_p = \sum \left(\frac{dT_p}{dp} \delta p \right) + \sum \left(\frac{dT_p}{dq} \delta q \right) \quad (13.0.2)$$

L'ultimo termine si può scrivere come

$$\sum \left(\frac{dT_p}{dq} \dot{q} \delta t \right)$$

che diminuisce con δt e finisce per annullarsi se l'impulso diviene istantaneo.

Pertanto, uguagliando i coefficienti di δp nelle (13-1, 13-2), abbiamo

$$\dot{q} = \frac{dT_p}{dp} \quad (13.0.3)$$

cioè, la velocità corrispondente alla variabile q è la derivata di T_p rispetto alla quantità di moto corrispondente p .

Siamo giunti ora a questo risultato considerando forze impulsive. Con questo metodo, abbiamo evitato di dover considerare il cambio di configurazione che avviene durante l'azione delle forze. Ma lo stato istantaneo del sistema è lo stesso sotto tutti gli aspetti, sia che il sistema sia stato portato dalla condizione di riposo a quella di moto considerato dall'applicazione durante un tempo molto breve di forze impulsive, o che sia pervenuta gradualmente a questo stato in qualche altro modo.

In altre parole, le variabili e le velocità, quantità di moto ed energia cinetica corrispondenti, dipendono dallo stato del sistema nell'istante dato, e non dalla sua storia precedente. Pertanto la (13-3) si applica altrettanto bene, sia che si consideri lo stato di moto del sistema come dovuto a forze impulsive o a forze agente in qualunque altro modo.

Possiamo ora abbandonare la considerazione delle forze impulsive, così come le restrizioni fatte sulla durata della loro azione, e sui cambiamenti di configurazione che avvengono durante questa azione.

Equazione del moto di Hamilton

561. Abbiamo già mostrato che

$$\frac{dT_p}{dp} = \dot{q} \quad (13.0.4)$$

Supponiamo che il sistema si muova in un modo qualunque, sotto le condizioni imposte dai vincoli: le variazioni di p e di q sono

$$\delta p = \frac{dp}{dt} \delta t \quad \delta q = \dot{q} \delta t \quad (13.0.5)$$

Pertanto

$$\frac{dT_p}{dp} \delta p = \frac{dp}{dt} \dot{q} \delta t = \frac{dp}{dt} \delta q \quad (13.0.6)$$

e la variazione completa di T_p è

$$\delta T_p = \sum \left(\frac{dT_p}{dp} \delta p + \frac{dT_p}{dq} \delta q \right) = \sum \left[\left(\frac{dp}{dt} + \frac{dT_p}{dq} \right) \delta q \right] \quad (13.0.7)$$

Ma l'incremento dell'energia cinetica è prodotto dal lavoro delle forze applicate, o

$$\delta T_p = \sum (F \delta q) \quad (13.0.8)$$

In queste due espressioni, le variazioni δq sono tutte indipendenti tra loro; possiamo quindi eguagliare i loro coefficienti nelle (13-7,8). Otteniamo così

$$F_r = \frac{dp_r}{dt} + \frac{dT_p}{dq_r} \quad (13.0.9)$$

dove la quantità di moto p_r e la forza F_r sono relative alla variabile q_r .

Vi sono tante equazioni di questa forma quante sono le variabili. Queste equazioni sono state date da Hamilton. Esse mostrano che la forza corrispondente a una variabile è la somma di due parti: la prima è l'incremento della quantità di moto di questa variabile nell'unità di tempo; l'altra è l'aumento dell'energia cinetica per un incremento unitario della variabile, mentre le altre variabili e le altre quantità di moto rimangono costanti.

Espressione dell'energia cinetica in funzione delle quantità di moto e delle velocità

562. Siano p_1, p_2, \dots le quantità di moto e $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ le velocità in un istante dato; e siano $P_1, P_2, \dots, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dots$ un altro sistema di quantità di moto e di velocità tali che

$$P_1 = np_1 \quad \dot{Q}_1 = n\dot{q}_1 \quad \dots \quad (13.0.10)$$

È chiaro che i sistemi P, \dot{Q} saranno compatibili se i sistemi p, \dot{q} lo sono.

Facciamo variare n di δn . Il lavoro compiuto dalla forza F_1 è

$$F_1 \delta q_1 = \dot{Q}_1 \delta P_1 = \dot{q}_1 p_1 n \delta n \quad (13.0.11)$$

Facciamo crescere n da 0 a 1: il sistema è portato da uno stato di quiete a uno di moto, $\dot{q}p$, e il lavoro speso per produrre questo movimento è

$$(\dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \dots) \int_0^1 n dn \quad (13.0.12)$$

ma

$$\int_0^1 n dn = \frac{1}{2}$$

e il lavoro speso per produrre il movimento è equivalente all'energia cinetica. Pertanto

$$T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2} p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \dots \quad (13.0.13)$$

dove $T_{p\dot{q}}$ rappresenta l'energia cinetica espressa in funzione delle quantità di moto e delle velocità, senza la presenza della variabili q_1, q_2 .

L'energia cinetica è quindi la semi somma dei prodotti delle quantità di moto per le corrispondenti velocità.

Indicheremo con la notazione $T_{p\dot{q}}$ l'energia cinetica espressa in questo modo. È una funzione delle quantità di moto e delle velocità, che non contiene che le variabili stesse.

563. Vi è, per esprimere l'energia cinetica, un terzo modo che di solito si considera come il metodo fondamentale. Risolvendo le (13-3), possiamo esprimere le quantità di moto in funzione delle velocità, e, introducendo questi valori nella (13-13), avremo un'espressione di T che non comprenderà le variabili e le velocità. Sotto questa forma l'energia cinetica è espressa nelle equazioni di Lagrange.

564. È chiaro che, poiché $T_p, T_{\dot{q}}$ e $T_{p\dot{q}}$ sono tre espressioni di una stessa cosa,

$$T_p + T_{\dot{q}} - 2T_{p\dot{q}} = 0$$

o

$$T_p + T_{\dot{q}} - p_1\dot{q}_1 - p_2\dot{q}_2 - \dots = 0 \quad (13.0.14)$$

Pertanto, se si devono far variare le quantità p, q e \dot{q} , si ha

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dT_p}{dp_1} - \dot{q}_1 \right) \delta p_1 + \left(\frac{dT_p}{dp_2} - \dot{q}_2 \right) \delta p_2 + \dots + \left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} - p_1 \right) \delta \dot{q}_1 + \left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} - p_2 \right) \delta \dot{q}_2 + \dots \\ & + \left(\frac{dT_p}{dq_1} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} \right) \delta q_1 + \left(\frac{dT_p}{dq_2} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_2} \right) \delta q_2 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (13.0.15)$$

Le variazioni di δp non sono indipendenti da quelle di δq e di $\delta \dot{q}$, di modo che non possiamo affermare che il coefficiente di ognuna di queste variazioni è nullo. Ma sappiamo, dalle (13-3), che

$$\frac{dT_p}{dp_1} - \dot{q}_1 = 0 \quad \dots \quad (13.0.16)$$

cosicché i termini che coinvolgono le variazioni δp sono identicamente nulle. +

Quanto alle variazioni restanti δq e $\delta \dot{q}$, sono tutte indipendenti; troviamo pertanto, uguagliando a zero i coefficienti di $\delta \dot{q}$, ...

$$p_1 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} \quad p_2 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} \quad \dots \quad (13.0.17)$$

cioè, che le componenti della quantità di moto sono le derivate di $T_{\dot{q}}$ rispetto alle corrispondenti velocità.

Uguagliando a zero i coefficienti di $\delta q, \dots$, si ha

$$\frac{dT_p}{dq_1} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} = 0 \quad (13.0.18)$$

cioè la derivata di T rispetto a una variabile qualunque conserva lo stesso valore, ma cambia di segno a seconda che si esprima T in funzione delle velocità o delle quantità di moto.

In virtù delle (13-18), le equazioni del moto (13-9) si possono scrivere

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} \quad (13.0.19)$$

o

$$F_1 = \frac{d}{dt} \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} \quad (13.0.20)$$

che è la forma data da Lagrange alle equazioni.

565. Nello studio precedente, abbiamo evitato di considerare la forma della funzione che esprime l'energia cinetica in funzione delle velocità o delle quantità di moto. La sola forma esplicita che abbiamo enunciato dell'energia cinetica è

$$T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2} (p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \dots) \quad (13.0.21)$$

nella quale essa è espressa dalla semi somma dei prodotti delle quantità di moto per le corrispondenti velocità.

Possiamo esprimere le velocità in funzione della derivata di T_p rispetto alle quantità di moto, come nella (13-3).

$$T_p = \frac{1}{2} \left(p_1 \frac{dT_p}{dp_1} + p_2 \frac{dT_p}{dp_2} + \dots \right) \quad (13.0.22)$$

Ciò ci mostra che T_p è una funzione omogenea e di secondo grado delle quantità di moto p_1, p_2, \dots

Possiamo così esprimere le quantità di moto in funzione di $T_{\dot{q}}$ e troviamo

$$T_{\dot{q}} = \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1 \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} + \dots \right) \quad (13.0.23)$$

la quale mostra che $T_{\dot{q}}$ è una funzione omogenea e di secondo grado delle velocità $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$

Se poniamo

$$P_{11} = \frac{d^2 T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1^2} \quad P_{12} = \frac{d^2 T_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1 d\dot{q}_2} \quad \dots$$

e

$$Q_{11} = \frac{d^2 T_p}{dp_1^2} \quad Q_{12} = \frac{d^2 T_p}{dp_1 dp_2} \quad \dots$$

poiché $T_{\dot{q}}$ e T_p sono funzioni di secondo grado, una rispetto alle \dot{q} , l'altra alle p , le P e Q saranno funzioni delle sole variabili q e saranno indipendenti dalle velocità e dalle quantità di moto. Otteniamo così le espressioni di T

$$2T_{\dot{q}} = P_{11}\dot{q}_1^2 + 2P_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots \quad (13.0.24)$$

$$2T_p = Q_{11}p_1^2 + 2Q_{12}p_1p_2 + \dots \quad (13.0.25)$$

Le quantità di moto sono espresse in funzione delle velocità dalle equazioni lineari

$$p_1 = P_{11}\dot{q}_1 + P_{12}\dot{q}_2 + \dots \quad (13.0.26)$$

e le velocità sono espresse in termini delle quantità di moto dalle equazioni lineari

$$\dot{q}_1 = Q_{11}p_1 + Q_{12}p_2 + \dots \quad (13.0.27)$$

Nei trattati sulla dinamica dei corpi solidi, si chiamano *momenti d'inerzia* i coefficienti tali che P_{11} , per i quali i due indici sono gli stessi, e *prodotti di inerzia* i coefficienti tale che P_{12} per i quali i due indici sono differenti. Possiamo estendere questi nomi al caso più generale che ci occupa in questo momento, dove queste quantità non sono più assolutamente costanti, come nel caso di un corpo solido, ma dove sono funzioni delle variabili q_1, q_2, \dots

Analogamente, possiamo chiamare *momenti di mobilità* i prodotti della forma Q_{11} e *prodotti di mobilità* quelli della forma Q_{12} . Ma avremo spesso occasione di parlare dei coefficienti di mobilità.

566. L'energia cinetica del sistema è una quantità nulla o essenzialmente positiva. Pertanto, sia che venga espressa in funzione delle velocità o delle quantità di moto, i coefficienti devono essere tali che nessun valore reale delle variabili possa rendere T negativa.

Da questo fatto, vi è una serie di condizioni necessarie alle quali devono soddisfare i coefficienti P . Queste condizioni sono le seguenti:

Le quantità P_{11}, P_{12}, \dots devono essere tutte positive.

Gli $(n - 1)$ determinanti formati successivamente con il determinante

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2n} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

sopprimendo i termini aventi l'indice 1, poi aventi gli indici 1 o 2, e così di seguito, devono essere tutti positivi.

Pertanto il numero delle condizioni per n variabili sarà $(2n - 1)$.

I coefficienti Q sono sottoposti a condizioni della stessa natura.

567. Da questa esposizione dei principi fondamentali della Dinamica di un sistema vincolato, abbiamo lasciato da parte il meccanismo con il quale sono collegate le parti del sistema; non abbiamo altresì posto equazioni indicanti come il moto di una parte qualunque del sistema dipende dalle variazioni delle variabili. Abbiamo posto la nostra attenzione solo sulle variabili, le loro velocità, le loro quantità di moto e le forze che sono applicate alle parti che rappresentano le variabili. Le nostre sole ipotesi sono che i vincoli siano tali che il tempo non figuri esplicitamente nelle equazioni delle condizioni, e che il principio di conservazione dell'energia sia applicabile al sistema.

Questa esposizione dei metodi della Dinamica pura non è inutile: poiché Lagrange e la maggior parte dei suoi successori, ai quali dobbiamo questi metodi, si sono generalmente limitati a dimostrarle, e, per porre tutta la loro attenzione sui simboli che compaiono nelle loro equazioni, si sono sforzati di bandire ogni altra idea diversa dalla quantità, non solo dispensandosi da rappresentazioni figurate, ma anche eliminando le idee di velocità, di quantità di moto e di energia, sostituite una volta per tutte dai simboli nelle equazioni iniziali. È per avere il modo di ricondurci ai risultati di questa analisi impiegando il linguaggio comune della Dinamica, che ci siamo sforzati di tradurre i principali risultati di questo metodo in termini comprensibili senza l'uso di simboli.

È lo sviluppo delle idee e dei metodi dei Matematici puri che ha permesso di formare una teoria matematica della Dinamica e di mettere così in luce verità che non si sarebbero potute scoprire senza questo approccio matematico; e se noi vogliamo formare delle teorie dinamiche di altre scienze, serve che la nostra mente sia imbevuta di queste verità dinamiche così come dei metodi matematici.

Quando creiamo le idee e il linguaggio di una scienza che, come l'Elettricità, si occupa di forze e dei loro effetti, dobbiamo avere costantemente presenti le nozioni della scienza fondamentale della Dinamica, in modo da evitare, durante il primo sviluppo della Scienza, ciò che sarebbe in disaccordo con i principi già stabiliti; di modo che, divenute le nostre idee più chiare, il linguaggio adottato ci sia di aiuto e non di ostacolo.

14 Teoria dinamica dell'elettromagnetismo

568. Abbiamo mostrato, al § 552, che quando esiste una corrente elettrica in un circuito conduttore, è in grado di effettuare una certa quantità di lavoro meccanico, e ciò, indipendentemente da ogni forza elettromotrice esterna che genera la corrente. La capacità di compiere lavoro, da qualunque parte venga, non è altro che energia, e tutte le energie sono della stessa specie, sebbene possano differire nella forma. L'energia della corrente elettrica è o della forma che consiste nel movimento reali della materia, oppure nella capacità di poter essere messa in movimento sotto l'azione di forze agenti tra corpi posti in certe posizioni relative.

Il primo tipo di energia, quella del movimento, è detta energia cinetica, e, una volta compresa, sembra un fatto primordiale nella natura, tanto che si è con difficoltà immaginata la possibilità di ridurla a qualcosa d'altro. Il secondo tipo di energia, quello che dipende dalla posizione, è detta energia potenziale; essa è dovuta all'azione di quelle che chiamiamo forze, cioè a tendenze a un cambiamento di posizione relativa. Per quanto riguarda queste forze, possiamo ammettere la loro esistenza come un fatto dimostrato; ma ci serve sempre convenire che ogni spiegazione del meccanismo, con il quale i corpi sono messi in movimento, costituisce un reale aumento delle nostre conoscenze.

569. Si può immaginare la corrente elettrica come un fenomeno cinetico. Lo stesso Faraday, che si sforzò sempre di sottrarre la sua mente all'influsso delle idee alle quali si è trascinati dall'impiego delle parole come corrente elettrica, fluido elettrico, parla di corrente elettrica come di "qualcosa di progressivo che non consiste solo in un semplice arrangiamento"¹.

Gli effetti della corrente, come l'elettrolisi e il trasporto dell'elettrizzazione da un corpo a un altro, sono tutte azioni successive che richiedono tempo per compiersi e che, di conseguenza, sono della natura dei movimenti.

Quanto alla velocità delle corrente, abbiamo mostrato che non serve a nulla, non più se essa è di $\frac{1}{10}$ di pollice all'ora o di cento millesimi al secondo². Tanto serve che conosciamo il suo valore assoluto in un caso qualunque, quanto ignoriamo pure se ciò che chiamiamo direzione positiva è, in realtà, la direzione effettiva del movimento o quella contraria.

Tutto ciò che ammettiamo qui, è che la corrente elettrica implica un movimento di qualche natura. La causa dei moti elettrici, l'abbiamo chiamata forza elettromotrice: da lungo tempo questa parola è impiegata con vantaggio, e mai ha portato ad alcuna contraddizione nel linguaggio scientifico. Si deve sempre intendere che la forza elettromotrice agisce soltanto sull'elettricità e non sui corpi nei quali questa elettricità risiede; non la si deve mai confondere con la forza meccanica ordinaria che agisce sui corpi, e non sull'elettricità che essi contengono. Se ma giungiamo a conoscere la natura della relazione che esiste tra l'elettricità e la materia ordinaria, conosceremo probabilmente anche la relazione della forza elettromotrice e della forza comune.

570. Quando una forza ordinaria agisce su un corpo e questo corpo cede alla sua azione, il lavoro compiuto dalla forza ha come misura il prodotto della forza per la grandezza dello spostamento del corpo. Così, se si fa rifluire dell'acqua attraverso un tubo, il lavoro compiuto in una sezione qualunque ha per misura il prodotto della pressione del liquido in questa sezione per la quantità di acqua che attraversa la sezione.

¹*Exp. Res.*, 283.

²*Exp. Res.*, 1648.

Analogamente, il lavoro di una forza elettromotrice ha per misura il prodotto della forza per la quantità di elettricità che attraversa una sezione del conduttore sotto l'azione di questa forza elettromotrice.

Il lavoro compiuto da una forza elettromotrice è esattamente della stessa natura di quello di una forza ordinaria e si misura con gli stessi campioni o unità.

Una parte del lavoro che compie una forza elettromotrice agente in un circuito conduttore è speso nel vincere la resistenza del circuito, e questa parte del lavoro si converte in calore. Un'altra parte è spesa per produrre i fenomeni elettromagnetici osservati da Ampère, nei quali dei conduttori si muovono sotto l'azione di forze elettromagnetiche. Il lavoro restante è speso nell'aumentare l'energia cinetica della corrente, e gli effetti di quest'ultima parte si percepiscono nei fenomeni di correnti indotte osservati da Faraday.

Sappiamo abbastanza sulla corrente elettrica per riconoscere in un sistema di conduttori materiali attraversati da correnti un sistema dinamico che è sede di energia, in parte cinetica e in parte potenziale.

Non conosciamo la natura dei legami che esistono tra le parti di questo sistema; ma abbiamo in dinamica dei metodi di ricerca che non richiedono la conoscenza del meccanismo del sistema, e le applicheremo a questo caso.

Esamineremo dapprima quali conseguenze risulteranno dall'ipotesi che la funzione che esprime l'energia cinetica del sistema ha la forma più generale.

571. Sia un sistema consistente in un certo numero di circuiti conduttori, la cui forma e posizione sono determinate dai valori di un sistema di variabili x_1, x_2, \dots , il cui numero è uguale al numero dei gradi di libertà del sistema.

Se tutta l'energia cinetica del sistema fosse dovuta al movimento di questi conduttori, essa sarebbe espressa da

$$T = \frac{1}{2} (x_1 x_1) \dot{x}_1^2 + \dots + (x_1 x_2) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dots$$

dove i simboli $(x_1 x_1), \dots$ indicano quantità che abbiamo chiamato momenti di inerzia, e $(x_1 x_2), \dots$ i prodotti di inerzia.

Se X' è la forza motrice tendente ad aumentare la coordinata x , che è necessaria per produrre il movimento reale, dall'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dx} - \frac{dT}{dx} = X'$$

Quando T indicherà l'energia dovuta al solo movimento visibile, la indicheremo con l'indice, m , perciò T_m .

Ma una parte dell'energia cinetica di un sistema di conduttori attraversati da correnti elettriche è dovuta all'esistenza di queste correnti. Sia un'altra serie di coordinate y_1, y_2, \dots determinante il movimento dell'elettricità e tutti gli altri movimenti che dipendono da quello dell'elettricità; T sarà una funzione omogenea dei quadrati e dei prodotti di tutte le velocità di due serie di coordinate. Possiamo quindi dividere T in tre parti: nella prima T_m , compaiono solo le velocità delle coordinate x ; nella seconda, T_e , solo le velocità delle coordinate; nella terza, T_{me} , ogni termine è formato dal prodotto delle velocità di una coordinata x e di una coordinata y .

Abbiamo quindi

$$T = T_m + T_e + T_{me}$$

dove

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2} (x_1 x_1) \dot{x}_1^2 + \dots + (x_1 x_2) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dots \\ T_e &= \frac{1}{2} (y_1 y_1) \dot{y}_1^2 + \dots + (y_1 y_2) \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dots \\ T_{me} &= (x_1 y_1) \dot{x}_1 \dot{y}_1 + \dots \end{aligned}$$

572. Nella teoria dinamica generale, i coefficienti di tutti i termini possono essere funzioni di tutte le coordinate x e y . Nel caso delle correnti elettriche, è facile vedere che le coordinate del tipo y non compaiono nei coefficienti.

Infatti, se si mantengono costanti tutte le correnti e tutti i conduttori a riposo, lo stato totale del campo rimane costante: in questo caso, le coordinate y sono variabili, sebbene le velocità \dot{y} siano costanti; quindi queste coordinate y non possono intervenire né nell'espressione di T , né in alcuna altra espressione dello stato effettivo del sistema.

Inoltre, in virtù dell'equazione di continuità, se tutti i conduttori sono circuiti lineari, serve una sola variabile per esprimere l'intensità di corrente di ognuno di essi. Supponiamo che le velocità $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots$ rappresentino le intensità delle correnti nei diversi conduttori.

Tutto ciò sarebbe vero se, invece di correnti elettriche, avessimo correnti di un fluido incomprimibile, circolante in tubi flessibili: le velocità delle correnti interverrebbero nell'espressione di T , ma i coefficienti dipenderebbero solo dalle variabili x che determinano la forma e la posizione dei tubi.

Ma, in questo caso, il movimento del fluido in un tubo non ha azione diretta sul moto né di un altro tubo né del fluido che vi si trova contenuto. Pertanto, nel valore di T_e compaiono solo i quadrati delle velocità \dot{y} e non i loro prodotti, e nella T_{me} una velocità \dot{y} si trova associata alle velocità di tipo \dot{x} che sono relative al tubo stesso.

Sappiamo che, nel caso di correnti elettriche, non si ha più a che fare con queste restrizioni, poiché le correnti dei diversi circuiti reagiscono gli uni sugli altri. Dobbiamo quindi ammettere l'esistenza di termini della forma $\dot{y}_1 \dot{y}_2$, ciò che implica l'esistenza di una certa cosa in movimento, il cui moto dipende dall'intensità di due correnti elettriche \dot{y}_1 e \dot{y}_2 . Questa materia mobile, qualunque essa sia, non è racchiusa all'interno dei conduttori dove circolano le correnti, ma si estende probabilmente in tutto lo spazio che li circonda.

573. Consideriamo ora la forma che assumano, in questo caso, le equazioni di Lagrange. Sia X' la forza motrice corrispondente a una delle variabili x che determinano la forma e la posizione dei circuiti conduttori. Questa è una forza, nel senso comune del termine, una tendenza a un cambiamento di posizione. Essa è data dall'equazione

$$X' = \frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx}$$

Possiamo considerare questa forza come formata da tre parti corrispondenti a ognuna delle tre parti nelle quali si può suddividere l'energia cinetica del sistema e che indicheremo con gli stessi indici.

$$X = X'_m + X'_e + X'_{me}$$

La parte X'_m è quella che dipende da considerazioni dinamiche ordinarie, e non abbiamo bisogno di fissare y .

Poiché T_e non contiene \dot{x} , il primo termine di X'_e , è nullo e il suo valore si riduce a

$$X'_e = - \frac{dT_e}{dx}$$

Questa è l'espressione della forza meccanica che deve essere applicata a un conduttore per fare equilibrio alla forza elettromagnetica: vediamo che essa ha per misura la diminuzione dell'energia puramente elettrocinetica per unità di variazione della variabile x . La forza elettromagnetica X_e , che mette in gioco questa forza meccanica esterna, è uguale e opposta a X'_e e, di conseguenza, ha per misura l'aumento di energia elettrocinetica per unità di variazione della variabile x . Poiché il valore di X_e dipende dai quadrati e dai prodotti di correnti, essa rimane la stessa se si invertono tutte le correnti.

La terza parte di X' è

$$X'_{me} = \frac{d}{dt} \frac{dT_{me}}{d\dot{x}} - \frac{dT_{me}}{dx}$$

La quantità T_{me} contiene solo prodotti della forma $\dot{x}\dot{y}$, così che $\frac{dT_{me}}{d\dot{x}}$ è una funzione lineare dell'intensità delle correnti \dot{y} . Il primo termine dipende quindi dalla variazione dell'intensità delle correnti nell'unità di tempo e indica una forza meccanica agente sul conduttore, la quale è nulla quando la corrente è costante, e positiva o negativa se la corrente aumenta o diminuisce di intensità.

Il secondo termine dipende, non dalla variazione delle correnti, ma dalla loro effettiva intensità. Poiché è una funzione lineare di queste correnti, cambia di segno quando anche le correnti lo cambiano; e, poiché ogni termine contiene una velocità \dot{x} , è nullo quando i conduttori sono a riposo. Vi sono pure termini dovuti alla variazione nel tempo dei coefficienti di \dot{y} in $\frac{dT_{me}}{d\dot{x}}$: queste osservazioni si applicano anche ad essi.

Possiamo quindi studiare questi termini separatamente: se i conduttori sono a riposo, abbiamo a che fare solo con il primo termine; se le correnti sono costanti, solo con il secondo.

574. Siccome è molto importante determinare se una parte dell'energia cinetica è della forma T_{me} , che consiste di prodotti delle velocità propriamente dette dei conduttori per le intensità delle correnti elettriche, è da desiderare che le esperienze siano fatte con la massima cura.

È difficile determinare le forze che agiscono su un corpo dotato di un moto rapido. Esaminiamo quindi il primo termine, che dipende dalla variazione di intensità della corrente.

Se una parte qualunque dell'energia cinetica dipende dal prodotto di una velocità ordinaria per l'intensità di una corrente, sarà, senza dubbio, più facile osservarla quando la velocità e la corrente avranno lo stesso verso o il verso contrario. Prendiamo quindi una bobina di un grande numero di avvolgimenti, sospendiamola con un filo verticale sottile, in modo che le sue spire siano orizzontali e che la bobina possa ruotare attorno a un asse verticale, sia nel verso della corrente, sia in quello contrario.

Supponiamo che la corrente penetri nella bobina attraverso il filo di sospensione e che, dopo aver percorso le spire, completi il suo circuito scorrendo dall'alto in basso lungo un filo posto sul prolungamento del filo di sospensione e immergendosi in un recipiente di mercurio.

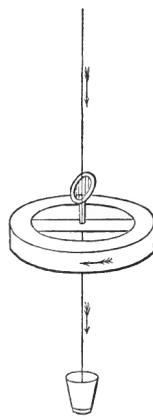


Fig. 33.

Quando la corrente attraversa questa bobina, la componente orizzontale del magnetismo terrestre tenderà a farla ruotare attorno a un asse orizzontale; supporremo pertanto che questa componente orizzontale venga esattamente compensata per mezzo di magneti fissi o che l'esperienza si faccia al polo magnetico. Uno specchio verticale è fissato alla bobina, al fine di segnalare tutto il movimento in azimut.

Facciamo ora passare una corrente nella bobina nel verso nord-est-sud-ovest. Se l'elettricità fosse un fluido simile all'acqua, che cola lungo il filo, nel momento dell'emissione di corrente e mentre la sua velocità cresce, servirebbe l'azione di una forza per comunicare la sua quantità di moto angolare al fluido che circola attorno alla bobina, e, siccome essa deve forzatamente essere fornita dall'elasticità del filo di sospensione, la bobina dovrebbe ruotare dapprima in

senso inverso, cioè ovest-sud-est-nord, cosa che si osserverà tramite uno specchio. Con l'arresto della corrente, vi sarà un altro movimento dello specchio, nel verso della corrente, questa volta.

Non si è finora osservato alcun fenomeno di questo genere. Se esistesse un'azione parallela, la si distinguerebbe facilmente dalle altre azioni già note della corrente per le particolarità seguenti:

1° Essa si manifesterebbe solo quando la forza della corrente varia, e quando si stabilisce o si interrompe il contatto, ma non quando la corrente è costante.

Tutte le azioni meccaniche note della corrente dipendono dalla sua intensità, e non dalle variazioni di questa intensità; e quanto all'azione elettromotrice, nel caso di correnti indotte, essa non potrebbe essere confusa con questa azione elettromagnetica.

2° Il verso di questa azione cambierebbe qualora si invertisse il verso di tutte le correnti del campo.

Tutte le azioni meccaniche note delle correnti restano le stesse quando si inverte il verso di tutte le correnti, poiché esse dipendono solo dai quadrato o dai prodotti di queste correnti.

Se si scoprisse un'azione di questa natura, potremmo considerare come una reale sostanza una di queste due cose che chiamiamo specie di elettricità, la positiva o la negativa, e potremmo definire la corrente elettrica come un reale movimento di questa sostanza in una data direzione. Infatti, se i movimenti elettrici fossero, a un livello qualunque, paragonabili a quelli della materia comune, vi sarebbero dei termini della forma T_{me} , e la loro esistenza sarebbe manifestata dalla forza meccanica X_{me} .

Con l'ipotesi di Fechner, secondo la quale la corrente elettrica consiste di due correnti uguali di elettricità positiva e negativa circolanti in versi contrari nello stesso conduttore, i termini della seconda classe T_{me} scomparirebbero, ogni termine relativo a una corrente positiva corrispondente a un uguale termine e di segno contrario relativo alla corrente negativa, e i fenomeni dovuti all'esistenza dei termini T_{me} non si manifesterebbero.

Mi sembra tuttavia che se la conoscenza di numerose analogie che esistono tra la corrente elettrica e una corrente di un fluido materiale ci deve essere di un grande vantaggio, dobbiamo soprattutto evitare con cura di avanzare alcuna ipotesi che non sia confermata da prove sperimentali. Ora, non abbiamo finora, alcuna prova sperimentale che ci mostri se la corrente elettrica è realmente una corrente di sostanza materiale, o se è una corrente doppia, o se la sua velocità misurata in piedi al secondo è grande o piccola.

Conoscere queste cose, sarebbe almeno iniziare a costruire una teoria dinamica completa dell'elettricità; dove l'azione elettrica non sarebbe più considerata, come in questo Trattato, come un fenomeno dovuto a una causa sconosciuta e soggetta soltanto alle leggi generali della Dinamica, ma come il risultato dei movimenti conosciuti di masse materiale note, e dove si studierebbe non più solo l'effetto totale e i risultati finali, ma anche tutto il meccanismo intermedio e tutti i dettagli del movimento.

575. Lo studio sperimentale del secondo termine di X_{me} , cioè $\frac{dT_{me}}{dx}$, è più difficile, poiché implica l'osservazione degli effetti delle forze agenti su un corpo dotato di un moto rapido.

Lo strumento rappresentato in fig. 34, che ho fatto costruire nel 1861, è destinato a verificare l'esistenza di una tale forza.

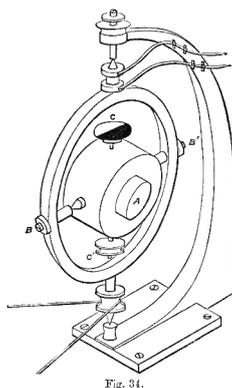


Fig. 54.

L'elettromagnete A può ruotare attorno a un asse orizzontale BB' , all'interno di un anello anch'esso ruotante attorno a un asse verticale.

Siano A, B, C i momenti d'inerzia dell'elettromagnete attorno all'asse della bobina, dell'asse orizzontale BB' e di un terzo asse perpendicolare ai primi due CC' .

Siano θ l'angolo che CC' forma con la verticale, ϕ l'azimut dell'asse BB' e ψ una variabile dalla quale dipende il movimento dell'elettricità nella bobina.

L'energia cinetica dell'elettromagnete si può scrivere

$$2T = A\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + B\dot{\theta}^2 + C\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + E(\dot{\phi} \sin \theta + \dot{\psi})^2$$

dove E è una quantità che si può chiamare il momento d'inerzia dell'elettricità nella bobina.

Se Θ è il momento delle forze motrici che tendere ad aumentare θ , abbiamo, dalle equazioni della Dinamica,

$$\Theta = B \frac{d^2 \theta}{dt^2} - [(A - C) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + E \dot{\phi} \cos \theta (\dot{\phi} \sin \theta + \dot{\psi})]$$

Eguagliando a zero la forza motrice Ψ che tende ad aumentare ψ , abbiamo

$$\phi \sin \theta + \psi = \gamma$$

essendo γ una costante che si può considerare come rappresentante l'intensità della corrente nella bobina.

Se C è un poco più grande di A , Θ sarà nullo, e l'equilibrio attorno all'asse BB' sarà stabile se

$$\sin \theta = \frac{E\gamma}{(C - A)\phi}$$

Questo valore di θ dipende da quello di γ , l'intensità della corrente; esso è positivo o negativo, secondo il verso della corrente.

La corrente è inviata nella bobina media dei perni B e B' che sono collegati alla pila con molle che sfregano su anello metallici montati sull'asse verticale.

Per determinare il valore di θ , si pone in C un pezzo di carta diviso, lungo un diametro, in due parti che sono colorate, una di rosso e l'altra di verde. Quando lo strumento è in movimento, se θ è positivo, si vede in C un cerchio rosso il cui raggio indica grossolanamente il valore di θ ; se θ è negativo, si vede in C un cerchio verde.

Per mezzo di dadi mobili su viti fissate all'elettromagnete, si ottiene una regolazione tale che l'asse CC' sia un asse principale rispetto al quale il momento di inerzia è di poco superiore al momento di inerzia relativo all'asse A . Di modo che, si rende lo strumento molto sensibile all'azione della forza, se esiste.

La maggiore difficoltà in queste esperienze riguarda l'azione perturbatrice della forza magnetica terrestre, che fa funzionare l'elettromagnete come un ago di inclinazione. Per questo motivo

i risultati ottenuti sono stati molto grossolani; tuttavia, non si può ottenere alcun indizio di una variazione di θ , anche ponendo nella bobina un nucleo di ferro, in modo da farne un elettromagnete potente.

Se quindi un magnete contiene materia dotata di una rapida rotazione, la quantità di moto angolare di questa materia deve essere assai piccola rispetto a tutte le quantità che possiamo misurare; e, finora, non abbiamo ottenuto alcun indizio dell'esistenza dei termini T_{me} per mezzo del loro effetto meccanico.

576. Consideriamo ora le forze che agiscono sulle correnti elettriche, cioè le forze elettromotrici.

Sia Y la forza elettromotrice effettiva dovuta all'induzione: la forza elettromotrice esterna che deve agire sul circuito per equilibrarla è $Y' = -Y$ e, dall'equazione di Lègrange,

$$Y = -Y' = -\frac{d}{dt} \frac{dT}{dy} + \frac{dT}{dy}$$

Poiché in T non vi è termine che contiene la coordinata y , il secondo termine è nullo e Y si riduce al suo primo termine. Pertanto non può esistere forza elettromotrice in un sistema a riposo e attraversato da correnti costanti.

Dividiamo, come prima, Y in tre parti: Y_m, Y_e, Y_{me} corrispondenti alle tre parti di T ; poiché T_m non contiene \dot{y} , Y_m deve essere nullo.

Troviamo così

$$Y_e = -\frac{d}{dt} \frac{dT_e}{dy}$$

Qui $\frac{dT_e}{dy}$ è una funzione lineare delle intensità e questa parte della forza elettromotrice è uguale alla variazione di questa funzione nell'unità di tempo. Esamineremo più in dettaglio la forza elettromotrice di induzione scoperta da Faraday.

577. Dalla parte di T che dipende dai prodotti delle velocità e delle intensità, ricaviamo

$$Y_{me} = -\frac{d}{dt} \frac{dT_{me}}{dy}$$

Ora $\frac{dT_{me}}{dy}$ è una funzione lineare delle velocità dei conduttori. Se quindi i termini di T_{me} fossero realmente esistenti, sarebbe possibile determinare una forza elettromotrice, indipendentemente da ogni corrente esistente, semplicemente facendo variare la velocità dei conduttori. Per esempio, nel caso della bobina sospesa del § 559, la bobina, prima a riposo, essendo improvvisamente messa in movimento attorno all'asse verticale, entrerebbe in gioco una forza elettromotrice, che sarebbe proporzionale all'accelerazione del moto, si annullerebbe se il movimento divenisse uniforme, e cambierebbe di segno se rallentasse.

Vi sono poche osservazioni scientifiche che possono essere fatte con maggior precisione di quelle dove si constata, tramite il galvanometro, l'esistenza o la non esistenza di una corrente. La sensibilità di questo metodo supera di molto quella della maggior parte dei procedimenti che si possono impiegare per misurare la forza meccanica che agisce su un corpo. Se quindi si potessero produrre correnti in questo modo, sarebbero messi in evidenza anche nel caso fossero piccoli. Si distinguerebbero dalle correnti di induzione ordinarie per le seguenti caratteristiche:

1° Non dipenderebbero unicamente dal movimento dei conduttori, e non del tutto dall'intensità delle correnti o delle forze magnetiche esistenti già nel campo.

2° Dipenderebbero non da velocità assolute dei conduttori, ma dalle loro accelerazioni, così come dai prodotti e dai quadrati della loro velocità, e cambierebbero di verso per una decelerazione, rimanendo la velocità assoluta la stessa.

In tutti i casi osservati finora, le correnti indotte dipendono sia dalla forza sia dalla variazione delle correnti del campo; non possono essere eccitate in un campo dove non esistono né forze magnetiche né correnti; e, per quanto riguarda la relazione che esiste tra queste correnti e i

movimenti dei conduttori, essi dipendono dalla velocità assoluta e non dai cambiamenti di velocità di questi movimenti.

Abbiamo quindi tra metodi per scoprire l'esistenza dei termini della forma T_{me} ; nessuno ha fornito, finora, risultati positivi. Io li ho segnalati con una attenzione del tutto particolare, poiché mi sembra molto importante raggiungere il massimo grado di certezza possibile in una questione che tocca così da vicino l'effettiva teoria dell'elettricità.

Poiché finora non si è potuto scoprire alcun indizio dell'esistenza di questi termini, passo oltre per supporre che questi termini non esistono o, almeno, che non producono un effetto osservabile: questa ipotesi semplifica notevolmente la nostra teoria dinamica. Ma, discutendo le relazioni del magnetismo e della luce, avremo l'occasione di mostrare che il movimento che costituisce la luce può entrare come fattore nei termini comprendenti il moto che costituisce il Magnetismo.

15 Teoria dei circuiti elettrici

578. Possiamo ora limitare la nostra attenzione a questa parte dell'energia cinetica del sistema che dipende dai quadrati e dai prodotti delle intensità delle correnti elettriche: è quanto possiamo chiamare l'*energia elettrocinetica* del sistema. La parte che dipende dal moto dei conduttori appartiene alla Dinamica ordinaria, e abbiamo mostrato che la parte che dipenderebbe dai prodotti delle velocità e della intensità non esiste.

Siano A_1, A_2, \dots i diversi circuiti conduttori. Esprimiamo le loro forme e posizioni mediante le variabili x_1, x_2, \dots , il cui numero è uguale al numero dei gradi di libertà del sistema meccanico. Chiameremo queste variabili variabili geometriche.

Indichiamo con y_1 la quantità di elettricità che attraversa una sezione data del conduttore A_1 dall'origine del tempo t . L'intensità della corrente è rappresentata dalla derivata \dot{y}_1 di questa quantità.

Chiameremo \dot{y} l'intensità reale e y_1 l'intensità integrale. Vi è una variabile di questo tipo per ciascuno dei circuiti del sistema.

Indichiamo con T l'energia elettrocinetica del sistema: è una funzione omogenea di secondo grado delle intensità di corrente, della forma

$$T = \frac{1}{2}L_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{y}_2^2 + \dots + M_{12}\dot{y}_1\dot{y}_2 + \dots \quad (15.0.1)$$

dove i coefficienti L, M, \dots sono funzioni delle variabili geometriche. Le variabili elettriche y_1, y_2, \dots non intervengono in questa espressione.

Possiamo chiamare L_1, L_2, \dots i momenti di inerzia elettrica dei circuiti A_1, A_2, \dots , e M_{12} il prodotto di inerzia elettrica dei due circuiti A_1 e A_2, \dots

Se vogliamo evitare il linguaggio della teoria dinamica, chiameremo L_1 il coefficiente di autoinduzione del circuito A_1 , e M_{12} il coefficiente di induzione reciproca dei circuiti A_1 e A_2 ; M_{12} è pure detto il potenziale del circuito A_1 rispetto al circuito A_2 . Queste quantità dipendono solo dalla forma e dalla posizione relativa dei circuiti. Vedremo che, nel sistema di misura elettromagnetica, queste quantità hanno la dimensione di una linea. (Si veda § 627)

Differenziando T rispetto a \dot{y}_1 , otteniamo la quantità p_1 che, nella teoria dinamica, si può chiamare la quantità di moto corrispondente a y_1 . Nella teoria elettrica, chiameremo p_1 la quantità di moto elettrocinetica del circuito A_1 . Il suo valore è

$$p_1 = L_1\dot{y}_1 + M_{12}\dot{y}_2 + \dots$$

La quantità di moto elettrocinetica del circuito A_1 si compone del prodotto dell'intensità in questo circuito per il suo coefficiente di autoinduzione, e della somma delle intensità negli altri circuiti, moltiplicati ciascuno per il coefficiente di induzione reciproca di A_1 e del circuito considerato.

Forza elettromotrice

579. Sia E la forza elettromotrice applicato al circuito A_1 , dovuta a una pila voltaica o termoelettrica o a qualunque altra causa in grado di produrre corrente indipendentemente da ogni induzione magneto-elettrica.

Sia R la resistenza del circuito. Dalla legge di Ohm, serve una forza elettromotrice $R\dot{y}$ per sovrastare questa resistenza, ciò che lascia una forza elettromotrice $E - R\dot{y}$ disponibile per cambiare la quantità di moto nel circuito. Chiamando Y' questa forza, abbiamo, dalle equazioni generali,

$$Y' = \frac{dp}{dt} - \frac{dT}{dy}$$

ma poiché T con contiene y , l'ultimo termine scompare.

L'equazione della forza elettromotrice è quindi

$$E - R\dot{y} = Y' = \frac{dp}{dt}$$

o

$$E = R\dot{y} + \frac{dp}{dt}$$

La forza elettromotrice impressa E comprende quindi due parti: la prima, $R\dot{y}$, necessaria per mantenere l'intensità di corrente malgrado la resistenza R ; la seconda, necessaria per aumentare la quantità di moto elettromagnetica p . Tale è la forza elettromotrice che deve essere fornita da sorgenti indipendenti dall'induzione magneto-elettrica. La forza elettromotrice dovuta alla sola induzione magneto-elettrica è evidentemente $-\frac{dp}{dt}$, cioè la diminuzione nell'unità di tempo della quantità di moto elettrocinetica del circuito.

Forza elettromagnetica

580. Sia X' la forza motrice meccanica, dovuta a cause esterne, che tende ad aumentare la variabile x . Dalle equazioni generali

$$X' = \frac{d}{dt} \frac{dT}{dx} - \frac{dT}{dx}$$

Poiché l'espressione dell'energia elettrocinetica non contiene la velocità, \dot{x} , il primo termine del secondo membro scompare, e troviamo

$$X' = -\frac{dT}{dx}$$

Qui X' è la forza esterna necessaria per equilibrare le forze dovute alle cause elettriche; si ha l'abitudine di considerarla come la reazione contro la forza elettromagnetica che chiameremo X e che è uguale e contraria a X' .

Si ha quindi

$$X = \frac{dT}{dx}$$

cioè, la forza elettromagnetica che tende ad aumentare una variabile è uguale all'aumento dell'energia elettrocinetica per l'unità di accrescimento della variabile, mantenendo le correnti costanti.

Se le correnti sono mantenute costanti da una pila durante uno spostamento dove la forza elettromotrice compie una quantità W di lavoro, l'energia elettrocinetica del sistema crescerà di W nello stesso tempo. Pertanto la pila avrà dovuto fornire una quantità doppia di energia, $2W$, oltre all'energia spesa sotto forma di calore nel circuito. Questo risultato è stata segnalato da Sir W. Thomson¹. Confrontare questo risultato con la proprietà elettrostatica indicata al § 93.

¹Nichols, *Cyclopaedia of Physical Science*, ed. 1860, Articolo *Magnetism, Dynamical Relations of*.

Caso di due circuiti

581. Chiamiamo A_1 il circuito primario e A_2 il circuito secondario. L'energia elettrocinetica del sistema si può scrivere

$$T = \frac{1}{2}L_1\dot{y}_1^2 + M\dot{y}_1\dot{y}_2 + \frac{1}{2}N\dot{y}_2^2$$

dove L e N sono rispettivamente i coefficienti di autoinduzione del primario e secondario, e M il coefficiente della loro mutua induzione.

Supponiamo che il circuito secondario sia soggetto alla sola forza elettromotrice dovuta all'induzione del circuito primario. Abbiamo così

$$E_2 = R_2\dot{y}_2 + \frac{d}{dt}(My_1 + Ny_2) = 0$$

Integrando questa equazione rispetto a t , abbiamo

$$R_2y_2 + My_1 + Ny_2 = C$$

dove C è una costante e y_2 è la corrente totale nel circuito secondario.

Si descriverà al § 748 il modo di misurare una corrente totale di breve durata, e, nella maggior parte dei casi, è facile fare in modo che la corrente secondaria abbia una durata molto breve.

Indichiamo con un accento i valori delle variabili di questa equazione dopo il tempo t : se y_2 è la corrente totale, o la quantità totale di elettricità che attraversa una sezione del circuito secondario nel tempo t ,

$$R_2y_2 = My_1 + Ny_1 - (M'y_1' + N'y_2')$$

Ma se la corrente secondaria è interamente dovuta all'induzione, il suo valore iniziale y_2 è nullo se, prima dell'inizio del tempo t , la corrente primaria era costante e i conduttori a riposo.

E se il tempo t è sufficiente per permettere alla corrente secondaria di estinguersi, il valore finale è pure zero, di modo che l'equazione diviene

$$R_2y_2 = My_1 - M'y_1'$$

In questo caso, la corrente integrale nel circuito secondario dipende dai valori iniziali e finali di My_1 .

Correnti indotte

582. Supponiamo dapprima che il circuito primario sia interrotto, o che $y_1 = 0$ e sia una corrente y_1' che si stabilisce quando si ferma il contatto.

L'equazione che determina la corrente integrale secondaria è

$$r_2y_2 = -My_1'$$

Se i circuiti sono posti l'uno accanto all'altro e presi nello stesso verso, M è una quantità positiva. Pertanto, quando si stabilisce il contatto nel circuito primario, una corrente negativa è indotta nel secondario.

Quando il contatto è interrotto nel circuito primario la corrente primaria cessa, e la corrente indotta è y_2 , dove

$$R_2y_2 = My_1$$

In questo caso, la corrente secondaria è positiva.

Se si mantiene costante la corrente primaria, e si cambia la forma o la posizione relativa dei circuiti, in modo che M divenga M' , la corrente secondaria totale è y_2 , dove

$$R_2y_2 = (M - M')y_1$$

Nel caso di due circuiti posti fianco a fianco e nello stesso verso, M diminuisce quando la distanza dei circuiti aumenta. Pertanto la corrente indotta è positiva quando questa distanza cresce, e negativa quando decresce.

Questi sono i casi elementari di induzione descritti al § 530.

Azione meccanica tra due circuiti

583. Sia x una delle variabili geometriche che definiscono la forma e la posizione relativa dei circuiti; la forza elettromagnetica che tende ad aumentare x è

$$X = \frac{1}{2} \dot{y}_1^2 \frac{dL}{dx} + y_1 y_2 \frac{dM}{dx} + \frac{1}{2} \dot{y}_2^2 \frac{dN}{dx}$$

Se il movimento del sistema che corrisponde alla variazione della variabile x è tale che ogni circuito si muove come un corpo invariabile, L e N sono indipendenti da x , e l'equazione si riduce alla forma

$$X = y_1 y_2 \frac{dM}{dx}$$

Pertanto, se le correnti primaria e secondaria hanno lo stesso segno, la forza X che agisce tra i circuiti tenderà a muoverli in modo da aumentare M .

Se i circuiti sono posti fianco a fianco e la corrente vi circola nello stesso verso, M cresce quando i circuiti si avvicinano. Pertanto, in questo caso, la forza X è attrattiva.

584. L'insieme dei fenomeni di mutua azione tra due circuiti, induzione di corrente o forza meccanica esercitata tra di loro, dipende dalla quantità M che abbiamo chiamato *coefficiente di mutua induzione*.

S è già dato, al § 524, il modo di calcolare questa quantità dalle relazioni geometriche di due circuiti; ma, nelle ricerche esposte al Capitolo seguente, non supporremo di conoscere la forma matematica di questa quantità; la considereremo come dedotta dalle esperienze sull'induzione, come, per esempio, l'osservazione della corrente totale ottenuta quando si sposta bruscamente il circuito secondario da una posizione data, fino a una distanza infinita o fino a una posizione dove sappiamo che $M = 0$.

16 Esplorazione del campo per mezzo del circuito secondario

585. Abbiamo dimostrato, ai §§ 582, 583, 584, che l'azione elettromagnetica tra il circuito primario e quello secondario dipende dalla quantità indicata da M , che è una funzione della forma e della posizione relativa di due circuiti.

Sebbene, in realtà, questa quantità M non sia diversa dal potenziale di due circuiti di cui abbiamo dedotto (§§ 442, 492, 521, 539) la forma matematica e le proprietà dei fenomeni magnetici ed elettromagnetici, non ci riferiremo qui a questi risultati; ma inizieremo su una nuova base, senza avanzare altre ipotesi oltre a quelle della teoria dinamica esposta nel Capitolo precedente.

La quantità di moto elettrocinetica del circuito secondario comprende due parti (§ 578): l'una, Mi_1 , dipende dalla corrente primaria i_1 e l'altra, Ni_2 , dalla corrente secondaria i_2 . Studiamo la prima di queste parti, che indicheremo con p :

$$p = Mi_1 \quad (16.0.1)$$

Supporremo anche il circuito primario fisso e la corrente primaria costante. La quantità p , quantità di moto elettrocinetica del circuito secondario, dipenderà, in questo caso, solo dalla forma e dalla posizione del circuito secondario; di modo che, se si prende per circuito secondario una curva chiusa qualunque, e se si sceglie su questa curva la direzione che si conterà come positiva, il valore di p è determinato da questa curva chiusa. Se si fosse presa la direzione contraria come direzione positiva sulla curva, il segno di p sarebbe l'opposto.

586. Poiché la quantità p dipende dalla forma e dalla posizione del circuito, possiamo supporre che ogni parte del circuito contribuisce per una certa parte al valore di p , e che la parte dovuta a ciascuna delle componenti del circuito dipende solo dalla forma e dalla posizione di questa parte soltanto, e non dalla posizione delle altre parti del circuito.

Questa ipotesi è legittima; poiché non consideriamo qui una corrente, le cui diverse parti possono reagire, e reagiscono effettivamente le une sulle altre, ma soltanto un circuito, cioè una curva chiusa lungo la quale può circolare una corrente elettrica, ma che è soltanto una figura geometrica, delle quale non si saprebbe immaginare che le parti possano avere un'azione fisica le une sulle altre.

Possiamo quindi ammettere che la parte dovuta all'elemento ds del circuito sia Jds , essendo J una funzione dipendente dalla posizione e dalla direzione dell'elemento ds . Il valore di p si può allora esprimere con un integrale preso lungo il circuito

$$p = \int Jds \quad (16.0.2)$$

essendo l'integrazione effettuata una sola volta lungo l'intero circuito.

587. Si tratta ora di determinare la forma della quantità J . In primo luogo, se ds cambia di verso, J cambia di segno. Pertanto, se due circuiti $ABCE$ e $AECD$ hanno l'arco AEC in comune, ma preso in verso contrario nei due circuiti, la somma dei valori di p per i due circuiti sarà uguale al valore di p per il circuito $ABCD$ formato dai due circuiti.

Infatti, le parti dell'integrale che dipendono dall'arco AEC sono uguali e di segno contrario per i due circuiti parziali, di modo che essi si annullano reciprocamente quando si sommano, lasciando solo le parti dell'integrale che dipendono dal limite esterno $ABCD$.

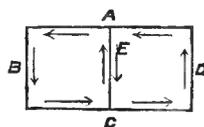


Fig. 35.

Analogamente, si può mostrare che se si divide in un numero qualunque di parti una superficie limitata da una curva chiusa, e se si considera come circuito il perimetro di ciascuna delle parti, essendo la direzione positiva su ciascuno dei circuiti e sulla curva chiusa esterna, il valore di p per questa curva esterna è uguale alla somma dei valori di p per ognuno dei circuiti (si veda § 483).

588. Consideriamo ora una porzione di superficie, le cui dimensioni siano molto piccole rispetto ai raggi di curvatura principali in questa parte della superficie, affinché si possano trascurare le variazioni di direzione della normale. Supponiamo anche che, se un circuito molto piccolo si trasporta parallelamente a se stesso da un punto ad un altro di questa superficie, il valore di p per questo piccolo circuito non cambia significativamente. Così è se le dimensioni della porzione di superficie sono sufficientemente piccole rispetto alla distanza dal circuito primario.

Se si traccia su questa parte della superficie una curva chiusa qualsiasi, il valore di p per essa è proporzionale all'area che vi è compresa. Infatti, le aree di due circuiti qualsiasi possono essere suddivise in piccoli elementi, tutti della stessa grandezza e aventi lo stesso valore di p . Le aree di questi due circuiti stanno tra loro come i numeri degli elementi che contengono, e i valori di p per questi due circuiti stanno pure nello stesso rapporto.

Pertanto, il valore di p per il circuito che limita un elemento di superficie dS è della forma $I ds$ dove I è una quantità che dipende dalla posizione di dS e dalla direzione della sua normale. Abbiamo quindi una nuova espressione di p ,

$$p = \iint I ds \quad (16.0.3)$$

dove l'integrale doppio si estende a una superficie qualunque limitata dal circuito.

589. Siano $ABCD$ un circuito e AC un elemento di esso molto piccolo affinché lo si possa considerare come rettilineo. Siano APB e CQB , piccole aree uguali poste nello stesso piano; il valore di p è lo stesso per i piccoli circuiti APB e CQB o

$$p(APB) = p(CQB)$$

da cui

$$p(APBQCD) = p(ABQCD) + p(APB) = p(ABQCD) + p(CQB) = p(ABCD)$$

cioè il valore di p non è significativamente cambiato se si sostituisce la linea tratteggiata alla retta AC , purché l'area del circuito non cambi significativamente. Infatti, è il principio stabilito dalla seconda esperienza di Ampère (§ 506), dove mostra che una parte del circuito sinuoso è equivalente a una porzione del circuito rettilineo, purché nessun punto della parte sinuosa si trovi a una distanza osservabile dalla parte rettilinea.

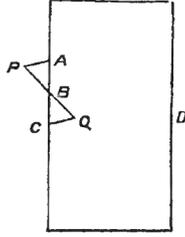


Fig. 36.

Se, pertanto, sostituiamo all'elemento ds tre piccoli elementi dx, dy, dz , tracciati uno di seguito all'altro, in modo da formare una linea continua dall'inizio alla fine dell'elemento ds , e se Fdx, Gdy, Hdz indicano gli elementi dell'integrale preso lungo dx, dy, dz

$$Jds = Fdx + Gdy + Hdz \quad (16.0.4)$$

590. Siamo ora in grado di determinare in quale modo la quantità J dipende dalla direzione dell'elemento ds ; poiché, dalla (16-4),

$$J = F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \quad (16.0.5)$$

Questa è l'espressione della componente lungo ds di un vettore le cui componenti, lungo gli assi x, y, z , saranno F, G, H .

Se si indica questo vettore con \mathfrak{A} , e con ρ il vettore tracciato dall'origine a un punto qualunque del circuito, l'elemento di circuito sarà $d\rho$, e l'espressione di Jds in quaternioni sarà

$$-SUd\rho$$

Possiamo ora scrivere la (16-3) sotto la forma

$$p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (16.0.6)$$

o

$$p = - \int SUd\rho \quad (16.0.7)$$

Il vettore \mathbf{U} e i suoi componenti F, G, H dipendono dalla posizione di ds nel campo, e non dalla direzione nella quale è tracciato questo elemento. Sono quindi funzioni delle coordinate x, y, z di ds , e non dei suoi coseni direttori l, m, n .

Il vettore \mathfrak{A} rappresenta in modulo e direzione l'integrale di tempo della forza elettromotrice alla quale sarebbe sottoposto un punto posto in (x, y, z) , se la corrente primaria venisse improvvisamente interrotta. Lo chiameremo quindi la quantità di moto elettrocinetica nel punto (x, y, z) . Esso è identico alla quantità che abbiamo studiato, al § 405, sotto il nome di potenziale vettore dell'induzione magnetica.

La quantità di moto elettrocinetica di una linea o di un circuito finito è l'integrale, preso lungo questa linea o questo circuito, della componente della quantità di moto elettrocinetica in ogni punto del circuito.

591. Determiniamo ora il valore dip per un rettangolo elementare $ABCD$ i cui lati sono dy e dz , essendo la direzione positiva nel verso dall'asse y verso l'asse z .

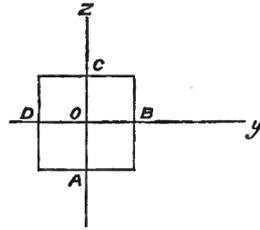


Fig. 37.

Siano (x_0, y_0, z_0) le coordinate del centro di gravità O dell'elemento; G_0 e H_0 i valori di G e H in questo punto.

Le coordinate del punto medio A del primo lato del rettangolo sono y_0 e $z_0 - \frac{1}{2}dz$. Il valore corrispondente di G è

$$G = G_0 - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} dz + \dots \quad (16.0.8)$$

e la parte del valore di p , che è dovuta al lato A , è circa

$$G_0 dy - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} dy dz \quad (16.0.9)$$

Analogamente per B ,

$$H_0 dz + \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} dy dz$$

per C ,

$$-G_0 dy - \frac{1}{2} \frac{dG}{dz} dy dz$$

per D ,

$$-H_0 dz + \frac{1}{2} \frac{dH}{dy} dy dz$$

Sommando queste quattro quantità, troviamo il valore di p per il rettangolo, cioè

$$p = \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) dy dz \quad (16.0.10)$$

Se introduciamo tre nuove quantità a, b, c , tali che

$$\begin{cases} a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dy} \\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases} \quad (16.0.11)$$

e se le consideriamo come le componenti di un nuovo vettore \mathfrak{B} , possiamo, per mezzo del teorema IV, § 24, esprimere l'integrale di \mathfrak{A} preso lungo il circuito per mezzo dell'integrale \mathfrak{B} preso su una superficie limitata dal circuito; si ha

$$p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds = \iint (la + mb + nc) \quad (16.0.12)$$

ossia

$$p = \int T \mathbf{A} \cos \epsilon ds = \iint T \mathbf{B} \cos \eta dS \quad (16.0.13)$$

dove ϵ è l'angolo compreso tra \mathfrak{A} e ds , ed η è l'angolo compreso tra \mathfrak{B} e la normale a dS i cui coseni direttori sono l, m, n e dove $T\mathfrak{A}$ e $T\mathfrak{B}$ indicano i valori numerici di \mathfrak{A} e \mathfrak{B} .

Confrontando questi risultati alla (16-3), è evidente che la quantità I di questa equazione è uguale a $\mathfrak{B} \cos \eta$ o alla componente di \mathfrak{B} , lungo la normale a dS .

592. Abbiamo già visto (§490, 511) che, secondo la teoria di Faraday, i fenomeni di forze elettromagnetiche e di induzione in un circuito dipendono dalla variazione del numero di linee di induzione magnetica che passano nel circuito. L'espressione matematica del numero di queste linee è l'integrale di superficie dell'induzione magnetica attraverso una superficie qualunque limitata dal circuito. Dobbiamo quindi considerare il vettore \mathfrak{B} e le sue componenti a, b, c come rappresentanti ciò che conosciamo già sotto il nome di induzione magnetica e delle sue componenti.

Nello studio attuale, ci proponiamo di dedurre le proprietà di questo vettore dai principi dinamici esposti nel capitolo precedente, richiamandoci il più possibile all'esperienza.

Non ci allontaniamo da questo metodo quando identifichiamo questo vettore, che ci si presenta come risultato di uno studio matematico, con l'induzione magnetica, di cui abbiamo appreso le proprietà dalle esperienze fatte sui magneti; poiché non introduciamo fatti nuovi nella teoria, diamo solo un altro nome a una quantità matematica, e si giudicherà la convenienza di tale nome con l'accordo tra le relazioni della quantità matematica e quelle della quantità fisica indicata da questo nome.

Il vettore \mathfrak{B} , che appare in un integrale di superficie, appartiene evidentemente alla categoria dei flussi descritti al § 13; al contrario, il vettore \mathfrak{A} , che appare in un integrale di linea, appartiene alla categoria delle forze.

593. Dobbiamo qui ricordare le convenzioni fatte sulle quantità e le direzioni positive e negative, alcune delle quali sono state enunciate al § 23. Adottiamo il sistema di assi perpendicolari, di modo che un bullone destrorso posto lungo l'asse, un dado posto su questa vite e ruotato nel verso della rotazione positiva, cioè nel verso dalle y verso le z , si sposta sul bullone nel verso delle x positive.

Consideriamo così come positiva l'elettricità vetrosa e il magnetismo australe. La direzione positiva per una corrente elettrica o per una linea di induzione elettrica è la direzione nella quale l'elettricità positiva si muove o tende a muoversi, e la direzione positiva di una linea di induzione magnetica è la direzione verso la quale un ago di bussola ruota la sua estremità che segna abitualmente il nord (si veda la fig. 24, § 498, e la fig. 25, § 501).

Si raccomanda al lettore di impiegare tale metodo che gli apparirà preferibile, per fissare queste convenzioni nella sua memoria; poiché è assai più difficile ricordare una regola determinando tra due forme, parimenti accettabili in se stesse, quella che si deve prendere per enunciare qualcosa, piuttosto che una regola facendo una scelta di una forma tra molte altre.

594. Dobbiamo ora dedurre da principi dinamici le espressioni della forza elettromagnetica che agisce su un conduttore attraversato da un corrente e mobile in un campo magnetico, e della forza elettromotrice che agisce sull'elettricità di un corpo mobile in un campo magnetico. Il metodo matematico che impiegheremo può essere paragonato al metodo sperimentale di Faraday¹, consistente nell'esplorare il campo per mezzo di un filo e a quanto abbiamo visto al § 490 con un metodo fondato sull'esperienza. Dobbiamo determinare ora l'effetto prodotto sul valore del momento elettrocinetico p del circuito secondario da un cambiamento dato della forma di questo circuito.

Siano AA', BB' due conduttori rettilinei paralleli, collegati da un arco conduttore C e da un conduttore rettilineo AB , capace di scorrere parallelamente a se stesso sulle rotaie AA', BB' .

¹*Exp. Res.*, p. 3082, 3087, 3113.

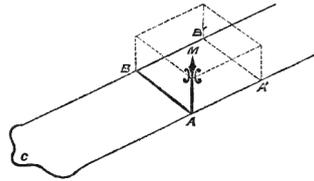


Fig. 38.

Prendiamo per circuito secondario il circuito così formato, e per direzione positiva su questo circuito la direzione ABC .

Facciamo muovere la parte scorrevole, parallelamente a se stessa, dalla sua posizione AB alla posizione $A'B'$. Dobbiamo determinare la variazione del momento elettrocinetico p del circuito dovuto a questo spostamento della parte scorrevole.

Il circuito secondario ABC diviene $A'B'C'$; pertanto, dal § 587,

$$p(A'B'C') - p(ABC) = p(AA'BB') \quad (16.0.14)$$

Dobbiamo quindi determinare il valore di p per il parallelogrammo $AA'BB'$. Se questo parallelogrammo è molto piccolo affinché si possano trascurare le variazioni di direzione e di modulo dell'induzione magnetica nei diversi punti del suo piano, il valore di p è, dal § 591, $\mathbf{B} \cos \eta \cdot AA'BB'$, dove \mathbf{B} è l'induzione magnetica e η l'angolo che essa forma con la direzione positiva della normale al parallelogrammo $AA'BB'$.

Possiamo rappresentare geometricamente questo risultato con il volume del parallelepipedo la cui base è il parallelogrammo $AA'BB'$ e il cui spigolo è la linea AM , che rappresenta in modulo e direzione l'induzione magnetica \mathfrak{B} . Se il parallelogrammo è nel piano del foglio e la normale sia tracciata dal basso in alto, a partire dal foglio, il volume del parallelepipedo deve essere contato positivamente; più in generale, deve essere preso positivamente se le direzioni del circuito AB , dell'induzione AM e dello spostamento AA' , preso nell'ordine ciclico, formano un sistema destrorso.

Il volume di questo parallelepipedo rappresenta l'aumento del valore di p del secondo circuito corrispondente allo spostamento della parte scorrevole di AB e $A'B'$.

Forza elettromotrice agente sulla parte scorrevole

595. La forza elettromotrice prodotta nel circuito secondario dal movimento della parte scorrevole è, dal § 578,

$$E = -\frac{dp}{dt} \quad (16.0.15)$$

Se supponiamo che AA' sia lo spostamento effettuato nell'unità di tempo, AA' rappresenta la velocità, il parallelepipedo rappresenta $\frac{dp}{dt}$; pertanto, dalla (16-14), la forza elettromotrice è nella direzione negativa BA .

Pertanto, la forza elettromotrice che agisce sulla parte scorrevole AB , in ragione del suo movimento attraverso il campo magnetico, è raffigurata dal parallelepipedo i cui spigoli rappresentano in modulo e direzione la velocità, l'induzione magnetica e la stessa parte scorrevole; ed essa è positiva se queste tre direzioni si susseguono in un ordine ciclico destrorso.

Forza elettromagnetica agente sulla parte scorrevole

596. Indichiamo con i_2 la corrente che attraversa il circuito secondario nella direzione positiva ABC ; il lavoro della forza elettromagnetica che agisce su AB mentre questa parte scorre dalla posizione AB alla posizione $A'B'$, è $(M' - M) i_1 i_2$, essendo M e M' è uguale a $p' - p$ e si trova

rappresentato dal volume del parallelepipedo costruito su AB , AM e AA' . Se quindi tracciamo una linea parallela ad AB , per rappresentare la quantità $AB \cdot i_2$, il parallelepipedo costruito su questa linea, l'induzione magnetica AM e lo spostamento AA' rappresenta il lavoro compiuto durante questo spostamento.

Per uno spostamento di grandezza data, questo lavoro è massimo quando lo spostamento è perpendicolare al parallelogrammo i cui lati sono AB e AM . La forza elettromagnetica è quindi rappresentata dall'area del parallelogrammo costruito su AB e AM moltiplicata per i_2 ed è diretta lungo la normale a questo parallelogrammo, tracciato in un verso tale che AB , AM e la normale siano in un ordine ciclico destrorso.

Quattro definizioni di una linea di induzione magnetica

597. Se la direzione AA' , lungo la quale avviene lo spostamento della parte scorrevole, coincide con la direzione AM dell'induzione magnetica, il movimento della parte scorrevole non mette più in gioco la forza elettromotrice, qualunque sia la direzione di AB ; e se AB è attraversato da una corrente, non vi è più una tendenza allo scorrimento lungo AA' .

Analogamente, se la parte scorrevole AB coincide in direzione con l'induzione magnetica AM , non vi è più forza elettromotrice messa in gioco da nessun movimento di AB , e una corrente attraversante AB non produce più una forza meccanica agente su AB .

Possiamo quindi definire una linea di induzione magnetica in quattro modi differenti. Questa linea è tale che:

1° Un conduttore spostato parallelamente a se stesso lungo questa linea non è soggetto ad alcuna forza elettromotrice:

2° Un conduttore attraversato da una corrente e libero di muoversi lungo una linea di induzione magnetica non subisce alcuna tendenza ad assumere tale movimento:

3° Un conduttore lineare la cui direzione coincide con quella di una linea di induzione magnetica, essendo spostato parallelamente a se stesso in una direzione qualunque, non è sottoposto ad alcuna forza elettromotrice nel verso della sua lunghezza;

4° Un circuito lineare attraversato da una corrente elettrica la cui direzione coincide con quella di una linea di induzione magnetica non è soggetto ad alcuna forza magnetica.

Equazioni generali della forza elettromotrice

598. Abbiamo visto che la forza elettromotrice E , dovuta all'induzione esercitata su un circuito secondario, è uguale a $-\frac{dp}{dt}$, dove

$$p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (16.0.16)$$

Per determinare il valore di E , differenziamo rispetto a t la quantità sotto il segno di integrale, e ricordando che se il circuito è in movimento, x, y, z sono funzioni del tempo. Abbiamo

$$\begin{aligned} E = & - \int \left(\frac{dF}{dt} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dt} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dt} \frac{dz}{ds} \right) ds - \int \left(\frac{dF}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dx} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dx} \frac{dz}{ds} \right) \frac{dx}{dt} ds \\ & - \int \left(\frac{dF}{dy} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dy} \frac{dz}{ds} \right) \frac{dy}{dt} ds - \int \left(\frac{dF}{dz} \frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dz} \frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dz} \frac{dz}{ds} \right) \frac{dz}{dt} ds \\ & - \int \left(F \frac{d^2x}{dsdt} + G \frac{d^2y}{dsdt} + H \frac{d^2z}{dsdt} \right) ds \end{aligned} \quad (16.0.17)$$

Consideriamo ora il secondo termine dell'integrale e sostituiamovi i valori di $\frac{dG}{dx}$ e $\frac{dH}{dx}$, ricavati dalla (A), § 591; questo termine diviene allora

$$- \int \left(c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds} + \frac{dF}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{ds} \right) \frac{dx}{dt} ds$$

che si può scrivere

$$- \int \left(c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds} + \frac{dF}{ds} \right) \frac{dx}{dt} ds$$

Trattando allo stesso modo il terzo e quarto termine, riunendo i termini in $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ e ricordando chde

$$\int \left(\frac{dF}{ds} \frac{dx}{dt} + F \frac{d^2x}{ds dt} \right) ds = F \frac{dx}{dt} \quad (16.0.18)$$

e che, di conseguenza, l'integrale preso lungo una curva chiusa si annulla

$$E = \int \left(c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} \right) \frac{dx}{ds} ds + \int \left(a \frac{dz}{dt} - c \frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} \right) \frac{dy}{ds} ds + \int \left(b \frac{dx}{dt} - a \frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} \right) \frac{dz}{ds} ds \quad (16.0.19)$$

Possiamo mettere questa espressione nella forma

$$E = \int \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} + R \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (16.0.20)$$

dove l'equazione della forza elettromotrice è

$$\begin{cases} P = c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} \\ Q = a \frac{dz}{dt} - c \frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy} \\ R = b \frac{dx}{dt} - a \frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \end{cases} \quad (16.0.21)$$

I termini comprendenti la nuova quantità Ψ sono stati introdotti per dare generalità alle espressioni di P, Q, R . Essi svaniscono quando l'integrale è preso lungo l'intero circuito chiuso. La quantità Ψ è quindi indeterminata, almeno per quanto concerne il problema attuale, dove ci proponiamo di ottenere la forza elettromotrice totale che agisce lungo il circuito. Ma vedremo che, quando si conoscono tutte le condizioni del problema, si può assegnare a Ψ un valore determinato che è il potenziale elettrico nel punto (x, y, z) .

La quantità sotto il segno di integrale, nella (16-19), rappresenta la forza elettromotrice che agisce sull'elemento ds del circuito, riferita all'unità di lunghezza.

Se indichiamo con TC la risultante di P, Q, R e con ϵ l'angolo tra questa risultante e l'elemento ds , si può scrivere la (16-19) sotto la forma

$$E = \int TC \cos \epsilon ds \quad (16.0.22)$$

Il vettore C è la forza elettromotrice nel punto in cui si trova l'elemento mobile ds . La sua direzione e il suo modulo dipendono dalla posizione e dal movimento di ds e dalla variazione del campo magnetico, ma non dalla direzione di ds . Possiamo quindi non tenere più conto del fatto che ds fa parte di un circuito, e lo possiamo considerare semplicemente come una parte di un corpo mobile sottoposto all'azione di una forza elettromotrice C . La forza elettromotrice in un punto è già stata definita al § 68. La si è chiamata la forza elettrica risultante, poiché è la forza alla sarebbe sottoposta una unità di elettricità positiva posta in quel punto. Abbiamo ora ottenuto la forma più generale di questa quantità, nel caso che di un corpo mobile per mezzo del campo magnetico dovuto a un sistema elettrico variabile.

Se il corpo è conduttore, la forza elettromotrice produce una corrente; se il corpo è un dielettrico, la forza elettromotrice produce solo uno spostamento elettrico.

La forza elettromotrice in un punto deve essere distinta con cura dalla forza elettromotrice che agisce lungo un arco di curva: quest'ultima quantità è l'integrale della prima lungo la curva (si veda § 69).

599. La forza elettromotrice, le cui componenti sono definite dalle equazioni (B), dipende da tre circostanze. La prima è il movimento del punto nel campo magnetico. La parte della forza che dipende da questo movimento è espressa dai primi due termini del secondo membro di ogni equazione: essa dipende dalla velocità di questo punto trasversalmente alle linee di induzione magnetica. Se \mathbf{G} è un vettore che rappresenta la velocità e \mathbf{B} un altro vettore che rappresenta l'induzione magnetica, e se \mathbf{C}_1 è la parte della forza elettromotrice che dipende da questo movimento

$$\mathbf{C}_1 = V \cdot \mathfrak{GB} \quad (16.0.23)$$

cioè la forza elettromagnetica è la parte vettoriale del prodotto dell'induzione magnetica e della velocità; in altre parole, la forza elettromotrice è raffigurata dall'area del parallelogrammo i cui lati rappresentano la velocità e l'induzione magnetica, e la sua direzione è quella di una normale a questo parallelogrammo tracciata in modo che la velocità, l'induzione magnetica e la forza elettromotrice si susseguano in un ordine ciclico destrorso.

Il terzo termine di ognuna delle (B) dipende dalla variazione nel tempo del campo magnetico. Questa variazione può essere dovuta a una variazione nel tempo dell'intensità di corrente nel circuito primario o a un movimento di questo circuito. Sia \mathbf{C}_2 la parte della forza elettromotrice che dipende da questi termini. Le componenti sono

$$-\frac{dF}{dt} \quad -\frac{dG}{dt} \quad -\frac{dH}{dt}$$

cioè le componenti del vettore $-\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ o $-\mathfrak{A}$. Pertanto

$$\mathfrak{C}_2 = -\mathfrak{A} \quad (16.0.24)$$

L'ultimo termine di ogni equazione (B) è dovuto alla variazione della funzione Ψ nei diversi punti del campo. Possiamo scrivere la terza parte della forza elettromotrice derivante da questa causa

$$\mathfrak{C}_3 = -\nabla\Psi \quad (16.0.25)$$

Così, nella notazione dei quaternioni, la forza elettromotrice definita dalle (B) si può scrivere

$$\mathfrak{C} = V \cdot \mathfrak{GB} - \mathfrak{A} - \nabla\Psi \quad (16.0.26)$$

Modifica delle equazioni della forza elettromotrice, quando gli assi ai quali sono riferite sono mobili nello spazio

600. Siano x', y', z' le coordinate di un punto relativo a un sistema di assi mobili nello spazio; x, y, z le coordinate dello stesso punto in un sistema di assi fisso.

Siano u, v, w le componenti della velocità dell'origine degli assi mobili; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le componenti della sua velocità angolare rispetto al sistema di assi fisso, e scegliamo questi assi fissi in modo che coincidano con gli assi mobili nell'istante considerato. Le sole quantità che differiscono, rispetto ai due sistemi di assi, sono quelle dove vi è una differenziazione rispetto al tempo. Se $\frac{\partial x}{\partial t}$ indica una componente della velocità di un punto invariabilmente legato agli assi mobili, e se $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dx'}{dt}$ sono le componenti della velocità di un punto qualunque occupante la stessa posizione istantanea, rispetto agli assi fissi e a quelli mobili, si ha

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{dx'}{dt} \quad (16.0.27)$$

con equazioni simili per le altre componenti.

Dalla teoria del moto di solidi invariabili

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = u + \omega_2 z - \omega_3 y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = v + \omega_2 x - \omega_1 z \\ \frac{\partial z}{\partial t} = w + \omega_1 y - \omega_2 z \end{cases} \quad (16.0.28)$$

F è la componente parallela alle x di una quantità direzionale. Se quindi $\frac{dF'}{dt}$ è il valore di $\frac{dF}{dt}$ relativo agli assi mobili, si può mostrare che

$$\frac{dF'}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{dF}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} + G\omega_3 - H\omega_2 + \frac{dF}{dt} \quad (16.0.29)$$

Sostituendo a $\frac{dF}{dy}$ e $\frac{dF}{dz}$ il loro valori dedotti dalle (A) dell'induzione magnetica, e ricordando che, per le (16-26)

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial y}{\partial t} = \omega_3 \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial z}{\partial t} = -\omega_2 \quad (16.0.30)$$

$$\frac{dF'}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{\partial x}{\partial t} + F \frac{d}{dx} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{dG}{dx} \frac{\partial y}{\partial t} + G \frac{d}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{dH}{dx} \frac{\partial z}{\partial t} + H \frac{d}{dx} \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial y}{\partial t} + b \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{dF}{dt} \quad (16.0.31)$$

Se poniamo

$$-\Psi' = F \frac{\partial x}{\partial t} + G \frac{\partial y}{\partial t} + H \frac{\partial z}{\partial t} \quad (16.0.32)$$

$$\frac{dF'}{dt} = -\frac{d\Psi'}{dx} - c \frac{\partial y}{\partial t} + b \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{dF}{dt} \quad (16.0.33)$$

L'equazione di P , componente parallela alle x della forza elettromotrice, è, dalle (B),

$$P = c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} \quad (16.0.34)$$

referita agli assi fissi. Sostituendo i valori delle quantità relative agli assi mobili, abbiamo

$$P' = c \frac{dy'}{dt} - b \frac{dz'}{dt} - \frac{dF'}{dt} - \frac{d(\Psi + \Psi')}{dx} \quad (16.0.35)$$

per i valori di P relativi agli assi mobili.

601. Risulta da ciò che la forza elettromotrice è espressa da una forma della stessa forma, sia che i movimenti dei conduttori siano riferiti agli assi fissi sia agli assi mobili nello spazio: la sola differenza tra le formule è che, nel caso degli assi mobili, il potenziale elettrico Ψ deve essere cambiato in $\Psi + \Psi'$.

In tutti i casi dove una corrente è prodotta in un circuito conduttore, la forza elettromotrice è l'integrale

$$E = \int \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} + R \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (16.0.36)$$

preso lungo la curva. Il valore di Ψ non è presente in questo integrale, di modo che l'introduzione di Ψ' non influisce. Pertanto, in tutti i fenomeni relativi ai circuiti chiusi e alle correnti che li attraversano, è indifferente che gli assi ai quali riferiamo il sistema siano a riposo o in movimento (si veda § 668).

Forza elettromotrice agente su un conduttore attraversato da una corrente e mobile in un campo magnetico

602. Abbiamo visto nello studio generale (§ 583) che se x_1 è una delle variabili che definiscono la forma e la posizione del circuito secondario, e se X_1 è la forza la cui azione su questo circuito tende ad aumentare questa variabile,

$$X_1 = \frac{dM}{dx_1} i_1 i_2 \quad (16.0.37)$$

Poiché i_1 è indipendente da x_1 , possiamo scrivere

$$Mi_1 = p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (16.0.38)$$

e abbiamo, per il valore di X_1 ,

$$X_1 = i_2 \frac{d}{dx_1} \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (16.0.39)$$

Supponiamo che lo spostamento consista nello spostare ognuno dei punti del circuito parallelamente a x di una lunghezza δx , essendo δx una qualunque funzione continua di s , di modo che le diverse parti del circuito si muovano indipendentemente le une dalle altre, rimanendo il circuito stesso continuo e chiuso.

Sia X la forza totale che agisce parallelamente alle x sulla parte del circuito compresa tra $s = 0$ e $s = s$, allora la parte che corrisponde all'elemento ds è $\frac{dX}{ds} ds$. Avremo allora l'espressione seguente del lavoro compiuto dalla forza durante lo spostamento

$$\int \frac{dX}{ds} \delta x ds = i_2 \int \frac{d}{d\delta x} \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) \delta x ds \quad (16.0.40)$$

dove l'integrazione deve essere estesa lungo l'intera curva chiusa, ricordando che δx è una funzione arbitraria di s . Possiamo quindi effettuare la differenziazione, rispetto a δx , allo stesso modo di quella relativa a t , al § 598, ricordando che

$$\frac{dx}{d\delta x} = 1 \quad \frac{dy}{d\delta x} = 0 \quad \frac{dz}{d\delta x} = 0 \quad (16.0.41)$$

Troveremo così

$$\int \frac{dX}{ds} \delta x ds = i_2 \int \left(c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds} \right) \delta x ds + i_2 \int \frac{d}{ds} (F \delta x) ds \quad (16.0.42)$$

L'ultimo termine si annulla quando l'integrale è esteso lungo tutta la curva chiusa, e, poiché l'equazione deve valere per tutte le forme della funzione δx , dobbiamo avere

$$\frac{dX}{ds} = i_2 \left(c \frac{dy}{ds} - b \frac{dz}{ds} \right) \quad (16.0.43)$$

equazione che esprime la componente parallela alle x della forza che agisce su un elemento qualunque del circuito. Le forze parallela a y e z sono

$$\frac{dY}{ds} = i_2 \left(a \frac{dz}{ds} - c \frac{dx}{ds} \right) \quad (16.0.44)$$

$$\frac{dZ}{ds} = i_2 \left(b \frac{dx}{ds} - a \frac{dy}{ds} \right) \quad (16.0.45)$$

La forza risultante agente su ogni elemento è data in modulo e direzione dall'espressione (nella simbologia dei quaternioni) $i_2 V d\rho \mathbf{B}$, dove i_2 è la misura numerica della corrente, $d\rho$ e \mathfrak{B} sono i vettori rappresentanti l'elemento di circuito e l'induzione magnetica, e dove si deve intendere la moltiplicazione nello senso di Hamilton.

603. Se il conduttore deve essere trattato, non come una linea, ma come un corpo, dobbiamo esprimere la forza che agisce su un elemento di lunghezza e la corrente che passa attraverso la sezione completa in funzione di simboli rappresentanti la forza rapportata all'unità di volume e la corrente all'unità di area.

Siano X, Y, Z le componenti della forza riferite all'unità di volume; u, v, w quelle della corrente riferita all'unità di area. Se S rappresenta la sezione del conduttore (che supporremo piccola), il volume dell'elemento ds è $S ds$ e $u = \frac{i_2 dx}{S ds}$. Pertanto la (16-41) diviene

$$\frac{XSds}{ds} = S(vc - wb) \quad (16.0.46)$$

o analogamente, per l'equazione della forza elettromagnetica

$$\begin{cases} X = vc - wb \\ Y = wa - uc \\ Z = ub - va \end{cases} \quad (16.0.47)$$

Qui x, y, z sono le componenti della forza elettromagnetica che agisce su un elemento di conduttore, divise per il volume di questo elemento; u, v, w sono le componenti della corrente elettrica che passa per questo elemento, riferite all'unità di area; a, b, c sono le componenti dell'induzione magnetica in questo elemento, riferite all'unità di area.

Se il vettore \mathbf{F} rappresenta in modulo e direzione la forza che agisce sull'unità del volume conduttore, e se \mathbf{C} rappresenta la corrente elettrica che lo attraversa

$$\mathfrak{F} = V \cdot \mathfrak{CB} \quad (16.0.48)$$

[Le equazioni (B) del § 598 possono essere stabilite con il metodo seguente, tratto da una Memoria del professor Maxwell su *A Dynamica Theory of the Electromagnetic Field. Phil. Trans.* 1864.

La variazione nel tempo di $-p$ può essere divisa in due parti, una della quali dipende, e l'altra no dal movimento del circuito. L'ultima è evidentemente

$$- \int \frac{dF}{dt} dx + \frac{dG}{dt} dy + \frac{dH}{dt} dz$$

Per trovare la prima, consideriamo un arco δs facente parte di un circuito, e supponiamo che si muova su binari che si assumere paralleli con un velocità v , le cui componenti sono $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, essendo la parte restante del circuito a riposo durante questo tempo. Possiamo supporre che l'arco mobile generi un piccolo parallelogrammo: i coseni direttori della normale ad esso sono

$$\lambda, \mu, \nu = \frac{n\dot{y} - m\dot{z}}{v \sin \theta}, \quad \frac{l\dot{z} - n\dot{x}}{v \sin \theta}, \quad \frac{m\dot{x} - l\dot{y}}{v \sin \theta}$$

dove l, m, n sono i coseni direttori di δs e θ è l'angolo tra v e δs .

Per verificare i segni di λ, μ, ν , possiamo porre $m = -1, \dot{x} = v$; essi diventano allora $0, 0, -1$, così come deve essere in un sistema di assi perpendicolari.

Siano a, b, c le componenti dell'induzione magnetica che si produce in conseguenza del movimento di δs durante il tempo δt

$$\delta p = (a\lambda + b\mu + c\nu) v \delta t \delta s \sin \theta$$

Se supponiamo che ogni parte del circuito di muova in modo simile, l'effetto totale sarà il movimento d'insieme del circuito, le correnti si compensano ogni volta che vi sono due archi adiacenti. La variazione nel tempo di $-p$, dovuta al movimento del circuito, è quindi

$$- \int [a(n\dot{y} - m\dot{z}) + \text{due altri termini simili}] ds$$

che deve essere preso lungo il circuito, o

$$\int (cy - bz) dx + \text{due altri termini simili}$$

I risultati del § 602, relativi alle componenti della forza elettromotrice, si possono dedurre dall'espressione che precede di δp . Supponiamo, infatti, che l'arco δs si sposti di una distanza $\delta s'$ nella direzione l', m', n' , si ha allora

$$\delta p = [l'(cm - bn) + \text{due altri termini simili}] \delta s \delta s'$$

Sia ora X la componente lungo x della forza che agisce sull'arco s ; per l'unità di corrente abbiamo, dal § 596,

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dp}{dx} = cm - bn$$

17 Equazioni generali del campo elettromagnetico

604. Nella nostra discussione dell'Elettrodinamica, abbiamo iniziato con l'ammettere che un sistema di circuiti attraversati da correnti è un sistema dinamico, dove le intensità possono essere considerate come velocità, e dove le coordinate che corrispondono a tali velocità non appaiono in quanto tali nelle equazioni. Risulta da ciò che l'energia cinetica del sistema, fintanto che dipende dalle correnti, è una funzione omogenea di secondo grado delle intensità, i cui coefficienti dipendono solo dalla forma e dalla posizione relativa dei circuiti. Supponendo questi coefficienti noti, mediante esperienze o in altro modo, abbiamo dedotto con un ragionamento puramente dinamico le leggi dell'induzione delle correnti e dell'attrazione elettromagnetica. In questo studio, abbiamo introdotto il concetto di energia elettrocinetica di un sistema di correnti, della quantità di moto elettromagnetica di un circuito e del potenziale reciproco tra due circuiti.

Ci siamo poi occupati di esplorare il campo dando diverse forme al circuito secondario, e siamo così stati portati a concepire un vettore \mathfrak{A} avente in ogni punto del campo un modulo e una direzione determinati. Abbiamo chiamato questo vettore quantità di moto elettromagnetica nel punto considerato. Questa quantità può essere considerata come l'integrale di tempo della forza elettromotrice che sarebbe prodotta nel punto dato, se si sopprimesse bruscamente ogni corrente del campo. Essa è identica alla quantità già studiata al § 405, con il nome di potenziale vettore dell'induzione magnetica. Le sue componenti parallele a x, y, z sono F, G, H . Il momento elettromagnetico del circuito è l'integrale di \mathfrak{A} preso lungo il circuito.

Allora, servendoci del teorema IV, § 24, abbiamo trasformato l'integrale di \mathfrak{A} lungo una linea in un integrale su una superficie di un altro vettore \mathfrak{B} , le cui componenti sono a, b, c e abbiamo trovato che i fenomeni di induzione dovuti al movimento di un conduttore e quello della forza elettromagnetica si possono esprimere in funzione di \mathfrak{B} . Abbiamo dato a \mathfrak{B} il nome di induzione magnetica, poiché le sue proprietà sono identiche a quelle delle linee di induzione magnetica studiate da Faraday.

Abbiamo pure stabilito tre serie di equazioni: la prima, (A), esprime l'induzione magnetica in funzione della quantità di moto elettromagnetica; la seconda (B) esprime la forza elettromotrice in funzione del moto di un conduttore attraverso le linee di induzione magnetica, e del tasso di variazione della quantità di moto elettromagnetica; la terza serie, (C), comprende le equazioni della forza elettromagnetica espresse in funzione dell'intensità e dell'induzione magnetica.

In tutti questi casi, si deve intendere per l'intensità effettiva che comprende non solo la corrente di induzione, ma anche quella che è dovuta alla variazione dello spostamento elettrico.

L'induzione magnetica \mathfrak{B} è la quantità che abbiamo già considerato al § 400. In un corpo non magnetizzato, essa è identica alla forza che agirebbe sull'unità di polo magnetico; ma, se il corpo è magnetizzato, in modo permanente o per induzione, è la forza che agirebbe sull'unità di polo magnetico posto in una stretta fenditura le cui pareti sarebbero perpendicolari alla direzione della magnetizzazione. Le componenti di \mathfrak{B} sono a, b, c .

Risulta dalle equazioni (A), che definiscono a, b, c , che

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$$

Si è mostrato, al § 403, che è questa una proprietà dell'induzione magnetica.

605. Abbiamo definito la forza magnetica all'interno di un magnete, distinguendola dall'induzione magnetica, come fosse la forza esercitata sull'unità di polo posto in una stretta fenditura aperta parallelamente alla direzione di magnetizzazione. Questa quantità è indicata con \mathfrak{H} e le sue componenti sono α, β, γ (si veda § 398).

Se \mathbf{I} è l'intensità di magnetizzazione e A, B, C le sue componenti, si hanno, dal § 400, le equazioni di magnetizzazione

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A \\ b = \beta + 4\pi B \\ c = \gamma + 4\pi C \end{cases} \quad (17.0.1)$$

Possiamo chiamare queste equazioni, equazioni di magnetizzazione: esse indicano che, nel sistema elettromagnetico, l'induzione magnetica \mathfrak{B} , considerata come un vettore, è la somma (nel senso geometrico del termine) di due vettori, la forza magnetica \mathfrak{H} e la magnetizzazione \mathbf{I} moltiplicata per

$$4\pi \quad \text{oppure} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{I}$$

In certe sostanze, la magnetizzazione dipende dalla forza magnetica: è quanto esprime il sistema di equazioni del magnetismo indotto, introdotte ai §§ 426 e 436.

606. Finora, in questo studio, abbiamo dedotto tutto da considerazioni puramente dinamiche, senza rifarci per nulla ai risultati quantitativi ottenuti nelle esperienze di elettricità o di magnetismo. Ci siamo serviti solo di conoscenze che dobbiamo all'esperienza per riconoscere nelle quantità astratte dedotte dalla teoria le quantità concrete scoperte dall'esperienza, e per dare loro nomi che richiamano piuttosto le loro relazioni fisiche che la loro origine matematica.

Così abbiamo mostrato che la quantità di moto elettromagnetica \mathfrak{A} è un vettore il cui modulo e direzione variano da un punto all'altro dello spazio, e ne abbiamo dedotto come vettore derivato da una operazione matematica l'induzione magnetica \mathfrak{B} ; ma non abbiamo ottenuto dati che permettano di determinare \mathfrak{A} o \mathfrak{B} dalla distribuzione di correnti nel campo. Per questo, ci serve trovare la relazione matematica tra queste quantità e le correnti.

Ammetteremo dapprima che esistono magneti permanenti la cui reciproca azione soddisfa al principio di conservazione dell'energia. Non faremo sulle leggi della forza magnetica altre ipotesi oltre quelle che derivano da questo principio, cioè, che la forza che agisce su un polo magnetico deve potersi dedurre da un potenziale.

Osservando allora l'azione delle correnti e dei magneti, troviamo che l'azione di una corrente su un magnete sembra identica a quella di un altro magnete di forza, di forma e di posizione opportune, e che il magnete agisce sulla corrente allo stesso modo di una corrente. Non è necessario supporre che queste osservazioni siano state accompagnate da misure di forze propriamente dette. Non le si deve quindi considerare come fornitrici di dati numerici, ma soltanto come fossero molto utili segnalando punti da esaminare.

La questione che ci suggeriscono queste osservazioni è questa: il campo magnetico prodotto dalle correnti elettriche, simile per molti aspetti al campo prodotto dai magneti permanenti, gli è simili anche per essere legato a un potenziale?

Si è stabilito, ai §§ 482 e 485, che un circuito elettrico produce nello spazio circostante precisamente gli stessi effetti che produrrebbe un foglio magnetico limitato da questo circuito.

Sappiamo che, nel caso di un foglio magnetico, esiste un potenziale che ha un valore determinato da tutti i punti esterni alla sostanza di questo foglio, ma i cui valori in due punti vicini posti da una parte e dall'altra del foglio differiscono di una quantità finita.

Se il campo magnetico vicino a una corrente elettrica assomiglia a quello che esiste vicino a un foglio magnetico, il potenziale magnetico ottenuto integrando la forza magnetica lungo una linea deve essere lo stesso per due contorni di integrazione qualsiasi, purché uno di essi si possa trasformare nell'altro con un moto continuo, senza tagliare la corrente elettrica.

Ma, se una delle linee di integrazione non può essere riportata all'altra senza tagliare la corrente, l'integrale della forza magnetica preso lungo una delle linee deve differire dall'integrale preso lungo l'altra linea di una quantità dipendente dall'intensità della corrente. Il potenziale magnetico dovuto a una corrente elettrica è quindi una funzione che ha una serie infinita di valori differenti tra loro per una stessa quantità, dipendendo ogni valore particolare dalla forma della linea di integrazione. All'interno della massa di un conduttore, non vi è nulla che assomiglia al potenziale magnetico.

607. Ammettendo che l'azione magnetica di una corrente abbia un potenziale del tipo indicato, esprimiamo matematicamente tale risultato.

In primo luogo, l'integrale della forza magnetica lungo una curva chiusa qualunque è nullo, purché la curva non circondi la corrente elettrica.

In secondo luogo, se la corrente attraversa una volta, e una sola, la curva chiusa nel verso positivo, l'integrale preso lungo la curva ha un valore determinato, che si può assumere come misura dell'intensità di corrente; poiché, se la curva chiusa cambia forma in un qualunque modo continuo senza intersecare la corrente, l'integrale rimane lo stesso.

In misura elettromagnetica, l'integrale della forza magnetica lungo una curva chiusa è numericamente uguale all'intensità della corrente che attraversa la curva chiusa, moltiplicato per 4π .

Se prendiamo per curva chiusa il parallelogrammo i cui lati sono dy e dz , l'integrale della forza magnetica preso lungo i lati di questo parallelogrammo è

$$\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) dydz$$

e se u, v, w sono le componenti del flusso di elettricità, la corrente che passa attraverso il parallelogrammo è

$$udydz$$

Moltiplicando per 4π e uguagliando il risultato all'integrale, abbiamo le equazioni delle intensità elettriche

$$\begin{cases} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases} \quad (17.0.2)$$

che determinano modulo e direzione delle correnti elettriche quando si dà in ogni punto la forza magnetica.

Quando non vi è corrente, queste equazioni equivalgono alla condizione che

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = -D\Omega$$

cioè che la forza magnetica si può dedurre da un potenziale magnetico in tutti i punti del campo dove mancano correnti.

Differenziando le (E) rispetto a x, y, z e sommando i risultati, otteniamo l'equazione

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

che indica che la corrente, di componenti u, v, w , è soggetta alla condizione del moto dei fluidi incomprimibili, e che deve necessariamente circolare in circuiti chiusi.

Questa equazione non è vera se consideriamo u, v, w come le componenti del flusso elettrico comprendente la variazione dello spostamento elettrico così come la conduzione propriamente detta.

Non abbiamo mote prove sperimentali di una azione elettromagnetica diretta di correnti dovute alla variazione dello spostamento elettrico nei dielettrici; ma l'estrema difficoltà di accordare le leggi dell'elettromagnetismo con l'esistenza di correnti elettriche non chiuse è un motivo, tra gli altri, per farci ammettere l'esistenza di correnti istantanee dovute alla variazione dello spostamento. Se ne vedrà l'importanza quando passeremo alla teoria elettromagnetica della luce.

608. Abbiamo ora determinato le relazioni di diverse quantità che intervengono nei fenomeni scoperti da Oersted, Ampère e Faraday. Per collegarle ai fenomeni descritti nelle prime parti di questa Opera, servono relazioni supplementari.

Quando una forza elettromotrice agisce su un corpo materiale, essa produce due effetti che Faraday ha chiamato induzione e conduzione; il primo più evidente nei dielettrici, l'altro nei conduttori.

In questo Trattato, abbiamo misurato l'elettricità statica per mezzo di ciò che abbiamo chiamato lo *spostamento elettrico*: è una quantità vettoriale che abbiamo indicato con \mathfrak{D} e le cui componenti sono state rappresentate da f, g, h .

Nelle sostanze isotrope, lo spostamento avviene nel verso della forza elettromotrice che lo produce, e gli è proporzionale, almeno per piccoli valori di questa forza. Lo si può esprimere con l'equazione

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathbf{E} \quad (17.0.3)$$

dove K è la capacità dielettrica della sostanza, si veda § 69.

Nelle sostanze non isotrope, le componenti f, g, h dello spostamento elettrico \mathbf{D} sono funzioni lineari delle componenti P, Q, R della forza elettromotrice.

La forma delle equazioni dello spostamento elettrico è simile a quella delle equazioni della conduzione date al § 298.

Si possono esprimere queste relazioni dicendo che, nelle sostanze isotrope, K è una quantità scalare e che, in altri corpi, è una funzione lineare e vettoriale operante sul vettore \mathfrak{C} .

609. L'altro effetto della forza elettromotrice è la conduzione. Le leggi della conduzione, considerata come risultato della forza elettromotrice, sono state fornite da Ohm e sono esposte nella seconda parte di questo Trattato (§ 241). Le si possono riassumere nell'equazione

$$\mathfrak{K} = C \mathfrak{C} \quad (17.0.4)$$

dove \mathbf{E} è l'intensità della forza elettromotrice nel punto considerato; \mathfrak{K} è la densità di corrente di conduzione le cui componenti sono p, q, r ; e C è la conducibilità della sostanza, la quale è una grandezza scalare nel caso di sostanze isotrope, e, nel caso delle altre sostanze, una quantità lineare e vettoriale operante sul vettore \mathfrak{C} . La forma di questa funzione in coordinate cartesiane è data al § 298.

610. Una delle particolarità più importanti di questo Trattato consiste nella teoria che la corrente elettrica vera \mathfrak{C} dalla quale dipendono i fenomeni elettromagnetici non è identica alla corrente di conduzione \mathfrak{K} , e che, per valutare il movimento totale dell'elettricità, si deve tenere conto della variazione nel tempo dello spostamento elettrico \mathfrak{D} , di modo che possiamo scrivere, come equazione della corrente vera

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}} \quad (17.0.5)$$

o, in funzione delle componenti

$$\begin{cases} u = p + \frac{df}{dt} \\ v = q + \frac{dg}{dt} \\ w = r + \frac{dh}{dt} \end{cases} \quad (17.0.6)$$

611. Poiché \mathfrak{K} e \mathfrak{D} dipendono dalla forza elettromotrice \mathfrak{E} , possiamo esprimere la corrente vera \mathfrak{C} in termini di forza elettromotrice, pertanto

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt} \right) \mathfrak{E} \quad (17.0.7)$$

o, nel caso in cui C e K sono costanti,

$$\begin{cases} u = CP + \frac{1}{4\pi} K \frac{dP}{dt} \\ v = CQ + \frac{1}{4\pi} K \frac{dQ}{dt} \\ w = CR + \frac{1}{4\pi} K \frac{dR}{dt} \end{cases} \quad (17.0.8)$$

612. La densità di volume dell'elettricità libera in un punto qualsiasi si ottiene per mezzo delle componenti dello spostamento elettrico dall'equazione

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \quad (17.0.9)$$

613. La densità superficiale dell'elettricità è

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h' \quad (17.0.10)$$

dove l, m, n sono i coseni direttori della normale tracciata dalla superficie verso il mezzo dove le componenti dello spostamento f, g, h e l', m', n' sono quelle della normale alla superficie diretta verso il mezzo dove le componenti sono f', g', h' .

614. Se la magnetizzazione è dovuta interamente all'induzione di una forza magnetica agente su questo mezzo, si può scrivere l'equazione del magnetismo indotto come

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \quad (17.0.11)$$

dove μ è il coefficiente di permeabilità magnetica, che si può considerare una quantità scalare, o una funzione lineare e vettoriale operante su \mathfrak{H} , se il mezzo è isotropo oppure no.

615. Queste relazioni possono essere viste come le principali che esistono tra le quantità che abbiamo considerato. Le si può combinare in modo da eliminare alcune di queste quantità: ma il nostro scopo attuale non è di ottenere formule matematiche condensate, ma di esprimere tutte le relazioni che conosciamo. Allo stato del nostro studio, eliminare una quantità che esprime un'idea utile sarebbe una perdita piuttosto che un vantaggio.

Tuttavia vi è un risultato di grande importanza che possiamo ottenere combinando le (A) e (E).

Supponiamo che non vi sia un magnete nel campo, se questo non è sotto forma di circuiti elettrici: la distinzione che abbiamo mantenuto finora tra forza e induzione magnetica scompare, poiché è solo all'interno delle sostanze magnetizzate che queste quantità differiscono tra loro.

Secondo la teoria di Ampère, che sarà esposta al § 883, le proprietà di ciò che chiamiamo la materia magnetizzata sono dovute a circuiti elettrici molecolari. È quindi solamente quando consideriamo la materia magnetizzata sotto forma di grandi masse che la nostra teoria della magnetizzazione si può applicare; e, se si supponessero i nostri metodi matematici capaci di rendere conto di quanto avviene in ogni molecola separatamente, non scoprirebbero nulla dei circuiti elettrici, e troveremmo la forza e l'induzione magnetica identiche in tutto lo spazio. Per poter impiegare a piacere il sistema di misure elettrostatiche o quello delle misure elettromagnetiche, conserviamo il coefficiente μ , ricordandoci che il suo valore è l'unità nel sistema elettromagnetico.

616. Dalle (A), le componenti dell'induzione magnetica sono

$$\begin{cases} a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases}$$

Le componenti della corrente elettrica sono dalle (E) date da

$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases}$$

In accordo con la nostra ipotesi, a, b, c sono rispettivamente identiche a $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$. Abbiamo quindi

$$4\pi\mu u = \frac{d^2G}{dx dy} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2H}{dz dx} \quad (17.0.12)$$

Se scriviamo

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \quad (17.0.13)$$

e¹

$$\nabla^2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \quad (17.0.14)$$

e possiamo riscrivere la (17-2),

$$\begin{cases} 4\pi\mu u = \frac{dJ}{dx} + \nabla^2 F \\ 4\pi\mu v = \frac{dJ}{dy} + \nabla^2 G \\ 4\pi\mu w = \frac{dJ}{dz} + \nabla^2 H \end{cases} \quad (17.0.15)$$

Se scriviamo

$$\begin{cases} F' = \mu \iiint \frac{u}{r} dx dy dz \\ G' = \mu \iiint \frac{v}{r} dx dy dz \\ H' = \mu \iiint \frac{w}{r} dx dy dz \end{cases} \quad (17.0.16)$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dx dy dz \quad (17.0.17)$$

dove r è la distanza del punto dato dall'elemento (x, y, z) e le integrazioni sono estese sull'intero spazio, allora

$$\begin{cases} F = F' - \frac{d\chi}{dx} \\ G = G' - \frac{d\chi}{dy} \\ H = H' - \frac{d\chi}{dz} \end{cases}$$

La quantità χ svanisce dalle (A) e non vi è alcun rapporto ad alcun fenomeno fisico. Se supponiamo che essa sia nulla in ogni punto, anche J lo è, e le (17-6) danno sopprimendo gli accenti i valori reali delle componenti di A .

617. Possiamo quindi adottare la definizione seguenti di \mathfrak{A} : è il potenziale vettore della corrente elettrica, ed è legato a questa corrente con la stessa relazione che esiste tra il potenziale scalare e la materia alla quale è relativo tale potenziale; si ottiene con la stessa operazione di integrazione che si può descrivere nel modo seguente:

¹Il segno negativo è qui impiegato per rendere la nostra espressione consistente con quella impiegata nei Quaternioni.

Da un punto dato, tracciamo un vettore che rappresenta in modulo e direzione un elemento di corrente elettrica diviso per la distanza tra questo elemento e il punto dato, e facciamo così per tutti gli elementi di corrente: la risultante di tutti i vettori così ottenuti è il potenziale dell'intera corrente. Poiché la corrente è una quantità vettoriale, anche il suo potenziale è un vettore (si veda § 422).

Quando la distribuzione delle correnti elettriche è data, vi è una e una sola distribuzione dei valori di \mathbf{A} , tale che in tutti i punti \mathfrak{A} sia finito, continuo, e soddisfi alle equazioni

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi\mu \mathfrak{C} \quad S \cdot \nabla \mathfrak{A} = 0$$

e si annulla a una distanza infinita dal sistema elettrico. Questo valore è quello che danno le (17-6) e che si può scrivere

$$\mathfrak{A} = \mu \iiint \frac{\mathfrak{C}}{r} dx dy dz$$

Espressioni in quaternioni delle equazioni elettromagnetiche

618. Ci siamo sforzati, in quest'Opera, di evitare ogni operazione che richiede al lettore la conoscenza del calcolo dei quaternioni. Nello stesso tempo, non abbiamo esitato a introdurre la nozione di vettore, là dove è stato necessario farlo. Quando abbiamo avuto l'occasione di indicare un vettore con un simbolo, abbiamo impiegato lettere gotiche [in grassetto nella traduzione], essendo il numero dei diversi vettori così grande che i simboli preferiti da Hamilton si sarebbero esauriti. Pertanto, tutte le volte che è impiegata una lettera gotica [grassetto], essa indica un vettore, nel senso che Hamilton attribuiva a questo termine, e indica non solo il suo modulo, ma anche la sua direzione. Le componenti di un vettore sono indicate da lettere latine o greche.

I principali vettori da noi considerati sono:

	Simbolo vettore	Componenti
Il raggio vettore di un punto	ρ	x, y, z
La quantità di moto elettromagnetica in un punto	A	F, G, H
L'induzione magnetica	\mathfrak{B}	a, b, c
La corrente elettrica totale	\mathfrak{C}	u, v, w
Lo spostamento elettrico	\mathfrak{D}	f, g, h
La forza elettromotrice	\mathfrak{E}	P, Q, R
La forza meccanica	\mathfrak{F}	X, Y, Z
La velocità in un punto	$\mathfrak{G} \text{ o } \dot{\rho}$	$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$
La forza magnetica	\mathfrak{H}	α, β, γ
L'intensità di magnetizzazione	\mathfrak{I}	A, B, C
La corrente di conduzione	\mathfrak{K}	p, q, r

Abbiamo anche le seguenti funzioni scalari:

Ψ , il potenziale elettrico;

Ω , il potenziale magnetico (dove esiste);

e , la densità elettrica;

m , la densità della "materia magnetica".

Infine, abbiamo le seguenti quantità che indicano proprietà del mezzo in ognuno dei suoi punti:

C , la conducibilità per le correnti elettriche;

K , il potere induttore dielettrico;

μ , il potere induttore magnetico.

Nei mezzi isotropo, questi quantità sono solo funzioni scalari di ρ ; ma, in generale, sono funzioni lineari e vettoriali, operanti sulle funzioni vettoriali alle quali sono applicate. È certo che K e μ sono sempre autoconiugati e anche C probabilmente lo è.

619. Le equazioni (A) dell'induzione magnetica, la prima delle quali è

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

si possono scrivere

$$\mathfrak{B} = V\nabla\mathfrak{A}$$

dove ∇ è l'operatore

$$i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$$

e V indica che si prende la parte vettoriale del risultato di questa operazione.

Poiché \mathfrak{A} è sottoposto alla condizione $S\nabla\mathfrak{A} = 0$, e $\nabla\mathfrak{B}$ è un vettore semplice, e il simbolo V è inutile.

Le equazioni (B) della forza elettromotrice, la prima delle quali è

$$P = cy - b \cdot - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}$$

divengono

$$\mathfrak{E} = V\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi$$

Le equazioni (C) della forza meccanica, la prima delle quali è

$$X = cv - bw - e\frac{d\Psi}{dx} - m\frac{d\Omega}{dx}$$

divengono

$$\mathbf{F} = vC\mathfrak{B} - e\nabla\Psi - m\nabla\Omega$$

Le equazioni (D) della magnetizzazione, la prima delle quali è

$$a = a + 4\pi A$$

divengono

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}$$

Le equazioni (E) delle correnti elettriche, la prima delle quali è

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

divengono

$$4\pi\mathfrak{C} = V\nabla\mathfrak{H}$$

L'equazione della corrente di conduzione è, dalla legge di Ohm,

$$\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}$$

Quella dello spostamento elettrico è

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}k\mathfrak{E}$$

L'equazione della corrente totale, derivante dalla variazione dello spostamento elettrico così come dalla conduzione è

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \mathfrak{D}$$

Quando la magnetizzazione deriva dall'induzione magnetica,

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

Abbiamo anche, per determinare la densità elettrica di volume

$$e = S \nabla \mathfrak{D}$$

Per determinare la densità magnetica di volume

$$m = S \nabla I$$

Quando la forza magnetica può essere derivata da un potenziale

$$\mathfrak{H} = -\nabla \Omega$$

18 Dimensioni delle unità elettriche

620. Ogni quantità elettromagnetica si può definire per mezzo di unità fondamentali di lunghezza, di massa e di tempo. Se partiamo dalla definizione dell'unità elettrica data al § 65, otteniamo definizioni delle unità di tutte le altre quantità elettromagnetiche, grazie alle equazioni che presentano tali grandezze con quantità di elettricità. Il sistema di unità così ottenuto è detto sistema elettrostatico.

Se, al contrario, partiamo dalla definizione dell'unità di polo magnetico, data al § 374, si ottiene un altro sistema di unità per la stessa serie di quantità. Questo sistema, che non è in accordo con il primo, è detto sistema elettromagnetico-

Inizieremo con l'enunciare le relazioni tra le diverse unità che sono comuni ai due sistemi, e formeremo poi una tabella delle dimensioni delle unità nei due sistemi.

621. Disporremo a coppie le quantità fondamentali che dobbiamo considerare. Nelle prime tre coppie, il prodotto dei due elementi della coppia è una quantità di energia o di lavoro. Nelle tre seconde coppie, il prodotto dei due elementi è una quantità di energia per unità di volume.

Prime tre coppie

	Simbolo
Coppia elettrostatica	
(1) Quantità di elettricità	e
(2) Integrale di linea della forza elettromotrice o potenziale elettrico	E
Coppia magnetica	
(3) Quantità di magnetismo libero, o forza di un polo	m
(4) Potenziale magnetico	Ω
Coppia elettrocinetica	
(5) Quantità di moto elettrocinetica di un circuito	p
(6) Corrente elettrica	C

Tre seconde coppie

	Simbolo
Coppia elettrostatica	
(7) Spostamento elettrico (misurato dalla densità superficiale=	\mathfrak{D}
(8) Forza elettromotrice in un punto	\mathfrak{E}
Coppia magnetica	
(9) Induzione magnetica	\mathfrak{B}
(10) Forza magnetica	\mathfrak{H}
Coppia elettrocinetica	
(11) Intensità della corrente in un punto	\mathfrak{C}
(12) Potenziale vettore delle correnti elettriche	\mathfrak{A}

622. Tra queste quantità esistono le seguenti relazioni: in primo luogo, poiché le dimensioni dell'energia sono $\left[\frac{L^2M}{T^2}\right]$ e quelle dell'energia riferita all'unità di volume $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$, abbiamo le seguenti equazioni dimensionali:

$$[eE] = [m\Omega] = [pC] = \left[\frac{L^2M}{T^2}\right] \quad (18.0.1)$$

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{E}] = [\mathfrak{B}\mathfrak{H}] = \left[\frac{M}{LT^2} \right] \quad (18.0.2)$$

In secondo luogo, e, p e \mathfrak{A} sono rispettivamente gli integrali del tempo di C, E e \mathfrak{E}

$$\left[\frac{e}{C} \right] = \left[\frac{p}{E} \right] = \left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}} \right] = [T] \quad (18.0.3)$$

In terzo luogo, poiché E, Ω e p sono rispettivamente gli integrali di linea di $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}$ ¹

$$\left[\frac{E}{\mathfrak{E}} \right] = \left[\frac{\Omega}{\mathfrak{H}} \right] = \left[\frac{p}{\mathfrak{A}} \right] = [L] \quad (18.0.4)$$

Infine, poiché e, C, m sono rispettivamente gli integrali di superficie di $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{B}$

$$\left[\frac{e}{\mathfrak{D}} \right] = \left[\frac{C}{\mathfrak{E}} \right] = \left[\frac{m}{\mathfrak{B}} \right] = [L^2] \quad (18.0.5)$$

623. Queste quindici equazioni non sono indipendenti, e, per dedurne le dimensioni delle dodici che contengono, abbiamo bisogno di una equazione supplementare. Ma, se prendiamo e o m come unità indipendenti, possiamo dedurre le dimensioni di tutte le altre in funzione dell'una o dell'altra di queste due unità.

$$\begin{aligned} (1) \quad [e] &= [e] = \left[\frac{L^2 M}{m T} \right] \\ (2) \quad [E] &= \left[\frac{L^2 M}{e T^2} \right] = \left[\frac{m}{T} \right] \\ (3) \text{ e } (5) \quad [p] &= [m] = \left[\frac{L^2 M}{e T} \right] = [m] \\ (4) \text{ e } (6) \quad [C] &= [\Omega] = \left[\frac{e}{T} \right] = \left[\frac{L^2 M}{m T^2} \right] \\ (7) \quad [\mathfrak{D}] &= \left[\frac{e}{L^2} \right] = \left[\frac{M}{m T} \right] \\ (8) \quad [\mathfrak{E}] &= \left[\frac{L M}{e T^2} \right] = \left[\frac{m}{L T} \right] \\ (9) \quad [\mathfrak{B}] &= \left[\frac{M}{e T} \right] = \left[\frac{m}{L^2} \right] \\ (10) \quad [\mathfrak{H}] &= \left[\frac{e}{L T} \right] = \left[\frac{L M}{m T^2} \right] \\ (11) \quad [\mathfrak{C}] &= \left[\frac{e}{L^2 T} \right] = \left[\frac{M}{m T^2} \right] \\ (12) \quad [\mathfrak{A}] &= \left[\frac{L M}{e T} \right] = \left[\frac{m}{L} \right] \end{aligned}$$

624. Le relazioni che esistono tra le prime dieci di queste quantità possono essere messe in evidenza dalla disposizione seguente:

$$\begin{array}{cccc|cccc} e & \mathfrak{D} & \mathfrak{H} & C \text{ e } \Omega & E & \mathfrak{E} & \mathfrak{B} & m \text{ e } p \\ m \text{ e } p & \mathfrak{B} & \mathfrak{E} & E & C \text{ e } \Omega & \mathfrak{H} & \mathfrak{D} & e \end{array}$$

¹Abbiamo anche $\frac{A}{B} = [L]$

Le quantità inscritte nella prima linea si derivano da e con le stesse operazioni di quelle inscritte nella seconda linea che si derivano da m . Si vedrà che l'ordine delle quantità sulla prima linea è esattamente inverso al loro ordine sulla seconda. Le prime quattro su ogni linea hanno il simbolo fondamentale al numeratore; le quattro ultime l'hanno al denominatore.

Tutte le relazioni sono vere, qualunque sia il sistema di unità adottato.

625. I soli sistemi aventi un valore scientifico sono i sistemi elettrostatico ed elettromagnetico. Il sistema elettrostatico è basato sulla definizione dell'unità di elettricità (§ 41 e 42) e si può dedurre dall'equazione

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{L^2}$$

che rappresenta la forza risultante in un punto \mathbf{E} , dovuta all'azione di una quantità e di elettricità posta a una distanza L , e si ottiene dividendo e per L^2 . Sostituendo nelle equazione dimensionale (1) e (8), troviamo

$$\left[\frac{LM}{eT^2} \right] = \left[\frac{e}{L^2} \right] \quad \left[\frac{m}{LT} \right] = \left[\frac{M}{mT} \right]$$

da cui

$$[e] = \left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right] \quad m = \left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right]$$

nel sistema elettrostatico.

Il sistema elettromagnetico è basato su una definizione del tutto simile dell'unità di forza per un polo magnetico (§ 374) che porta all'equazione

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{L^2}$$

da cui

$$\left[\frac{e}{LT} \right] = \left[\frac{M}{eT} \right] \quad \left[\frac{LM}{mT^2} \right] = \left[\frac{m}{L^2} \right]$$

e

$$[e] = \left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right] \quad [m] = \left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$$

nel sistema elettromagnetico. Da questi risultati troviamo le dimensioni delle altre quantità.

626. Tabella delle dimensioni

	Simbolo	Sistema Elettrostatico	Sistema Elettromagnetico
Quantità di elettricità	q	$\left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$	$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right]$
Integrale di linea della forza elettromotrice	L	$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$	$\left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \right]$
Quantità di magnetismo	$\left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\}$	$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right]$	$\left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$
Corrente elettrica	$\left\{ \begin{matrix} C \\ \Omega \end{matrix} \right\}$	$\left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \right]$	$\left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$
Potenziale magnetico			
Spostamento elettrico	\mathfrak{D}	$\left[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \right]$	$\left[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right]$
Densità superficiale			
Forza elettromotrice in un punto	\mathfrak{E}	$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$	$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \right]$
Induzione magnetica	\mathfrak{B}	$\left[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right]$	$\left[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$
Forza magnetica	\mathfrak{H}	$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \right]$	$\left[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$
Intensità di corrente in un punto	\mathfrak{C}	$\left[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \right]$	$\left[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$
Potenziale vettore	\mathfrak{A}	$\left[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right]$	$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \right]$

627. Abbiamo già considerato i prodotti delle coppie di queste quantità nell'ordine in cui sono dati. I loro rapporti hanno, in certi casi, un'importanza scientifica. Così:

	Simbolo	Sistema Elettrostatico	Sistema Elettromagnetico
$\frac{e}{E}$ = capacità di un condensatore	e	$[L]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$
$\frac{p}{C}$ = coefficiente di autoinduzione di un circuito, o capacità elettromagnetica	E	$[\frac{T^2}{L}]$	$[L]$
$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}$ =potere induttore specifico di un dielettrico	K	$[0]$	$[\frac{T^2}{L^2}]$
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$ = capacità di induzione magnetica	μ	$[\frac{T^2}{L^2}]$	$[0]$
$\frac{E}{C}$ =resistenza di un conduttore	R	$[\frac{T}{L}]$	$[\frac{L}{T}]$
$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{C}}$ =resistenza specifica di una sostanza	r	$[T]$	$[\frac{L^2}{T}]$

628. Se le unità di lunghezza, di massa e di tempo sono le stesse nei due sistemi, il numero di unità elettrostatiche di elettricità contenute in una unità elettromagnetica è numericamente uguale a una certa velocità, la cui grandezza assoluta non dipende dalla grandezza delle unità fondamentali impiegate. Questa velocità è una quantità fisica importante, che indicheremo con il simbolo v .

Numero di unità elettrostatiche contenute in una unità elettromagnetica

Per $e, C, \Omega, \mathfrak{D}, \mathfrak{H}, \mathfrak{C} \dots v$

Per $m, E, \mathfrak{B}, \mathfrak{E}, \mathfrak{A}, \dots \frac{1}{v}$.

Per capacità elettrostatica, potere induttore dielettrico e la conducibilità, ... v^2 ;

Per la capacità elettromagnetica, il potere induttore magnetico e la resistenza, ... $\frac{1}{v^2}$.

Si daranno, ai §§ 768, 780, diversi metodi per determinare la velocità v .

Nel sistema elettrostatico, si ammette che il potere induttore specifico dielettrico dell'aria è uguale all'unità. Questa quantità è quindi rappresentata da $\frac{1}{v^2}$ nel sistema elettromagnetico.

Nel sistema elettromagnetico, si ammette che il potere induttore specifico magnetico dell'aria è uguale all'unità. Questa quantità è quindi rappresentata da $\frac{1}{v^2}$ nel sistema elettrostatico.

Sistema pratico di unità elettriche

629. Di questi due sistemi, quello elettromagnetico è quello che impiegano più volentieri gli elettrici sperimentali che si occupano di telegrafi elettromagnetici. Ma, se le unità di lunghezza, di tempo e di massa sono quelle che sono comunemente impiegate nelle altre Opere scientifiche, cioè il metro o il centimetro, il secondo e il grammo, le unità di resistenza e della forza elettromotrice sono così piccole che, per rappresentare le quantità che si incontrano nella pratica, servono numeri enormi; e le unità di quantità e di capacità sono così grandi che non si incontreranno mai nella pratica, se non con frazioni estremamente piccole. Così gli elettrici pratici hanno adottato una serie di unità elettriche deducendole dal sistema elettromagnetico di una unità di lunghezza molto e di una unità di massa molto piccola.

L'unità di lunghezza impiegata a tale scopo è di dieci milioni di metri, o circa la lunghezza di un quarto del meridiano terrestre.

L'unità di tempo è, come prima, il secondo.

L'unità di massa è $10^{-11} g$ o la cento milionesima parte di un milligrammo.

Le unità elettriche dedotte da queste unità fondamentali hanno ricevuto il nome da persone che hanno fatto importanti scoperte in elettricità. Così, l'unità pratica di resistenza è detta *ohm*, ed è rappresentata dalla bobina costruita dall'Associazione britannica, che abbiamo descritto al § 310. Essa è espressa nel sistema elettromagnetico da una velocità di $10^7 \frac{m}{s}$.

L'unità pratica di forza elettromotrice è detta il *volt* e non differisce molto dalla forza elettromotrice di un elemento Daniell. M. Latimer Clark ha immaginato recentemente una pila molto costante la cui forza elettromotrice è quasi esattamente $1,457 V$.

L'unità pratica della capacità è detta *farad*. La quantità di elettricità che, nell'intervallo di un secondo, attraversa una resistenza di 1Ω sotto l'azione di una forza elettromotrice di $1 V$, è uguale alla carica data da una forza elettromotrice di $1 V$ a un conduttore la cui capacità è di $1 Far$.

Si è trovato più comodo per la pratica impiegare questi nomi piuttosto che ripetere costantemente i termini "unità elettromagnetiche", e di dover ricordare unità fondamentali particolari sulle quali è basato il sistema.

Quando si deve misurare quantità molto grandi, si forma una grande unità moltiplicando l'unità originale per un milione e facendo precedere il suo nome dal prefisso *mega*.

Analogamente, il prefisso *micro* indica una piccola unità, formata prendendo la milionesima parte di una unità iniziale.

La tabella seguente presenta i valori di queste unità pratiche nei diversi sistemi che sono stati impiegati in diverse epoche:

Unità fondamentali	Sistema pratico	Associazione Britannica 1863	Thomson	Weber
Lunghezza	Quarto di meridiano	Metro	Centimetro	Millimetro
Tempo	Secondo	Secondo	Secondo	Secondo
Massa	10^{-11} grammi	Grammo	Grammo	Milligrammo
Resistenza	Ohm	10^7	10^9	10^{10}
Forza elettromotrice	Volt	10^5	10^8	10^{11}
Capacità	Farad	10^{-7}	10^{-9}	10^{-10}
Quantità	Farad caricato a un Volt	10^{-2}	10^{-1}	10

19 Energia e Tensione nel campo elettromagnetico

Energia elettrostatica

630. L'energia del sistema si può suddividere in energia potenziale ed energia cinetica.

Si è già considerato, al § 85, l'energia potenziale dovuta all'elettrizzazione. La si può rappresentare con

$$W = \frac{1}{2} \sum (e\Psi) \quad (19.0.1)$$

essendo e la carica elettrica in un punto dove il potenziale elettrico è Ψ , ed essendo la sommatoria estesa a tutti i punti dove vi è elettricità.

Se f, g, h sono le componenti dello spostamento elettrico, la quantità di elettricità che si trova nell'elemento di volume $dx dy dz$ è

$$e = \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) dx dy dz \quad (19.0.2)$$

e

$$W = \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) \Psi dx dy dz \quad (19.0.3)$$

dove l'integrazione è estesa a tutto lo spazio.

631. Integriamo questa espressione per parti e ricordando che, quando la distanza r da un punto dato di un sistema elettrico finito diviene infinita, il potenziale Ψ diviene una quantità infinitamente piccola di ordine r^{-1} , e le quantità f, g, h infinitamente piccole di ordine r^{-2} , l'espressione si riduce a

$$W = -\frac{1}{2} \iiint \left(f \frac{d\Psi}{dx} + g \frac{d\Psi}{dy} + h \frac{d\Psi}{dz} \right) \Psi dx dy dz \quad (19.0.4)$$

dove l'integrazione è estesa a tutto lo spazio.

Se, ora, poniamo P, Q, R per le componenti della forza elettromotrice, invece di $-\frac{d\Psi}{dx}, -\frac{d\Psi}{dy}, -\frac{d\Psi}{dz}$, troviamo

$$W = -\frac{1}{2} \iiint (Pf + Qg + Rh) dx dy dz \quad (19.0.5)$$

Pertanto, l'energia elettrostatica dell'intero campo rimane la stessa, se supponiamo che si trovi in tutti i punti del campo dove si osserva una forza e uno spostamento elettrico, invece di sopporla concentrata nei luoghi in cui si osserva elettricità libera.

L'energia riferita all'unità di volume è il semi prodotto della forza elettromotrice per lo spostamento elettrico e per il coseno dell'angolo compreso tra questi due vettori.

Nel linguaggio dei quaternioni, è $\frac{1}{2} S \mathcal{E} \mathcal{D}$.

Energia Magnetica

¹632. Possiamo trattare l'energia dovuta alla magnetizzazione con lo stesso metodo impiegato nel caso della elettrizzazione (§ 85). Se A, B, C sono le componenti della magnetizzazione, α, β, γ le componenti della forza magnetica, l'energia potenziale del sistema di magneti è, dalla § 389,

$$-\frac{1}{2} \iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz \quad (19.0.6)$$

essendo l'integrazione estesa a tutto lo spazio occupato dalla materia magnetica. Ma questa parte dell'energia sarà compresa nell'energia cinetica sotto la forma che presentiamo.

633. Quando non vi sono correnti elettriche, possiamo trasformare questa equazione con il metodo seguente:

Sappiamo che

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \quad (19.0.7)$$

Pertanto, dal § 97, se

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx} \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz} \quad (19.0.8)$$

e questo è sempre il caso nei fenomeni magnetici dove intervengono punti di correnti

$$\iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz = 0 \quad (19.0.9)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio, o ancora

$$\iiint [(\alpha + 4\pi A)\alpha + (\beta + 4\pi B)\beta + (\gamma + 4\pi C)\gamma] dx dy dz = 0 \quad (19.0.10)$$

Pertanto, l'energia dovuta a un sistema magnetico è

$$-\frac{1}{2} \iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz = \frac{1}{8\pi} \iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dx dy dz = \frac{1}{8\pi} \iiint \mathfrak{H}^2 dx dy dz \quad (19.0.11)$$

Energia elettrocinetica

634. Abbiamo già espresso (§ 578) l'energia cinetica di un sistema di correnti sotto la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum (pi) \quad (19.0.12)$$

dove p è il momento elettromagnetico del circuito e i l'intensità della corrente che circola in esso, e dove la sommatoria è estesa a tutti i circuiti.

Abbiamo mostrato, al § 590, che p si può esprimere con un integrale di linea della forma

$$p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (19.0.13)$$

dove F, G, H sono le componenti della quantità di moto elettromagnetica \mathbf{A} nel punto (x, y, z) e dove l'integrazione deve essere estesa lungo l'intero circuito chiuso s . Troviamo quindi

$$T = \frac{1}{2} \sum i \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \quad (19.0.14)$$

¹Si veda l'Appendice I, al termine di questo Capitolo.

Se u, v, w sono le componenti della densità di corrente in un punto qualunque del circuito conduttore, e se S è la sezione trasversale del circuito, possiamo scrivere

$$i \frac{dx}{ds} = uS \quad i \frac{dy}{ds} = vS \quad i \frac{dz}{ds} = wS \quad (19.0.15)$$

e possiamo così scrivere il volume $dx dy dz$

$$S ds = dx dy dz$$

e troviamo così

$$T = \frac{1}{2} \iiint (Fu + Gv + Hw) dx dy dz \quad (19.0.16)$$

dove l'integrazione è estesa a tutti i punti dello spazio dove ci sono correnti elettriche.

635. Sostituiamo ora a u, v, w i valori ricavati dalle equazioni delle correnti elettriche (E), § 607), in funzione delle componenti α, β, γ della forza magnetica. Abbiamo allora

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[F \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + G \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + H \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right] dx dy dz \quad (19.0.17)$$

estendendo l'integrazione a una regione dello spazio comprendente tutte le correnti.

Integriamo per parti, e osserviamo che a una grande distanza r dal sistema α, β, γ sono dell'ordine di grandezza r^{-3} : troviamo che estendendo l'integrazione a tutto lo spazio, l'espressione si riduce a

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\alpha \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + \beta \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + \gamma \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] dx dy dz \quad (19.0.18)$$

Dalle equazioni (A) dell'induzione magnetica, § 591, possiamo sostituire alle quantità comprese tra le parentesi tonde le componenti a, b, c dell'induzione magnetica di modo che l'energia cinetica si può scrivere

$$T = T = \frac{1}{8\pi} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz \quad (19.0.19)$$

dove l'integrazione è estesa a tutte le parti dello spazio dove la forza magnetica e l'induzione magnetica hanno valori diverso da zero.

In questa espressione, la quantità tra parentesi è il prodotto dell'induzione magnetica per le componenti della forza magnetica lungo la direzione dell'induzione.

Nel linguaggio dei quaternioni si può scrivere

$$-S \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}$$

dove \mathfrak{B} è l'induzione magnetica, le cui componenti sono a, b, c e \mathfrak{H} è la forza magnetica, le cui componenti sono α, β, γ .

636. Si può quindi esprimere l'energia elettrocinetica del sistema, sia sotto forma di un integrale preso per tutti i punti in cui vi sono correnti elettriche, sia sotto forma di integrale esteso a tutti i punti del campo dove esiste una forza magnetica.

Il primo integrale è l'espressione naturale della teoria che vuole che le correnti esercitino le une sulle altre un'azione diretta a distanza; la seconda conviene alla teoria che cerca di spiegare l'azione delle correnti con qualche azione intermedia che si esercita nel mezzo compreso tra i circuiti. Siccome abbiamo adottato quest'ultimo metodo di ricerca, sarà naturale impiegare la seconda espressione, essendo la forma più significativa che si possa dare all'energia cinetica.

Nella nostra ipotesi, ammettiamo che l'energia cinetica esiste dappertutto dove vi è una forza magnetica, cioè in tutti i punti del campo in generale. La grandezza di questa energia, per unità di volume, è $-\frac{1}{8\pi} S \mathfrak{B} \mathfrak{H}$ e questa energia esiste in tutti i punti dello spazio sotto forma di un certo movimento della materia.

Quando studieremo l'effetto scoperto da Faraday del magnetismo sulla luce polarizzata, esporremo le ragioni che abbiamo di credere che là vi siano linee di forza magnetiche, vi sia un movimento di rotazione della materia attorno a queste linee (si veda § 821).

Confronto delle energie magnetica e elettrocinetica

637. Abbiamo trovato (§ 423) che l'energia potenziale reciproca di due fogli magnetici di potenze ϕ e ϕ' , limitati dalle curve chiuse s e s' , è

$$-\phi\phi' \iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds'$$

dove ϵ è l'angolo tra le direzioni ds e ds' , e r la distanza tra questi punti.

Abbiamo così trovato, al § 521, che l'energia reciproca di due circuiti s e s' , attraversati da due correnti i e i' , è

$$ii' \iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds'$$

Se i e i' sono rispettivamente uguali a ϕ e a ϕ' , l'azione meccanica esercitata tra i fogli magnetici è uguale a quella che agisce tra i circuiti elettrici corrispondenti, e dello stesso verso. Nel caso dei fogli, la forza tende a diminuire la loro mutua energia potenziale; nel caso delle correnti, essa tende ad aumentare la loro mutua energia, poiché questa energia è cinetica.

Non è possibile, con nessuna distribuzione di materia magnetica, produrre un sistema corrispondente completamente a un circuito elettrico; poiché il potenziale del sistema magnetico ha un solo valore in ogni punto dello spazio, mentre quello del sistema elettrico ne ha un numero qualunque.

Ma è sempre possibile disporre di circuiti elettrici infinitamente piccoli, in modo da formare un sistema corrispondente a un sistema magnetico dato, purché non si faccia passare attraverso uno di questi piccoli circuiti la linea di integrazione seguita per calcolare il potenziale. Lo si spiegherà più a lungo al § 833.

L'azione dei magneti a distanza è perfettamente simile a quello delle correnti elettriche. Cercheremo quindi di spiegare le due con la stessa causa, e, poiché non possiamo spiegare le correnti elettriche per mezzo di magneti, dobbiamo adottare l'altra ipotesi e provare a spiegare i magneti per mezzo di correnti elettriche molecolari.

638. Nello studio fatto dei fenomeni magnetici, nella terza parte di questo Trattato, non abbiamo cercato di dare una spiegazione dell'azione magnetica a distanza: abbiamo considerato questa azione come un fatto fondamentale risultante dall'esperienza. Abbiamo quindi ammesso che l'energia di un sistema magnetico è energia potenziale, e che questa energia diminuisce quando le parti del sistema cedono all'azione delle forze magnetiche che agiscono su di esse.

Ma, se consideriamo i magneti come se le loro proprietà fossero dovute a correnti elettriche circolanti all'interno delle loro molecole, la loro energia è cinetica, e la forza che agisce tra loro tende a muoverle in una direzione tale che, se le intensità delle correnti fossero mantenute costanti, l'energia cinetica sarebbe *accresciuta*.

Questo modo di spiegare il magnetismo esige anche che noi abbandoniamo il metodo seguito nella terza parte, dove consideriamo il magnete come un corpo continuo e omogeneo, la cui più piccola parte ha proprietà magnetiche simili a quelle del tutto.

Dobbiamo ora considerare un magnete come un numero molto considerevole di circuiti elettrici, di modo che la sua struttura è essenzialmente molecolare, e del tutto diversa da una struttura continua.

Se supponiamo il nostro strumento matematico così grossolano, che la nostra linea di integrazione non possa attraversare uno di questi circuiti molecolari e che il nostro elemento di volume contenga sempre un numero immenso di molecole magnetiche, arriveremo ancora a risultati simili a quelli della terza parte; ma, se supponiamo il nostro strumento più perfetto e in grado di studiare tutto ciò che passa all'interno delle molecole, dobbiamo abbandonare la vecchia teoria del magnetismo e adottare la teoria di Ampère, che non ammette altri magneti se non quelli che formano le correnti elettriche.

Dobbiamo così considerare l'energia magnetica e l'energia elettromagnetica come fossero energia cinetica e attribuire loro un segno di conseguenza, così come fatto al § 635.

In seguito a questo, potremo all'occasione (§ 639 3 segg.) provare a sviluppare la vecchia teoria del magnetismo; ma riconosceremo che non possiamo ottenere un sistema perfettamente coordinato, se non abbandonando questa teoria per quella delle correnti molecolari di Ampère, come data al § 644.

Da ciò, l'energia del campo comprende solo due parti: l'energia elettrostatica o potenziale

$$W = \frac{1}{2} \iiint (Pf + Qg + Rh) dx dy dz$$

e l'energia elettromagnetica o cinetica

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma) dx dy dz$$

Forze che agiscono su un elemento di un corpo posto nel campo elettromagnetico

Forze agenti su un elemento magnetico

639.² Sia $dx dy dz$ un elemento di un corpo magnetizzato con una intensità le cui componenti sono A, B, C ; e siano α, β, γ le componenti del campo magnetico dove è posto; la sua energia potenziale è

$$- (A\alpha + B\beta + C\gamma) dx dy dz$$

Se quindi $X_1 dx dy dz$ è la forza che spinge il corpo a muoversi senza rotazione nella direzione x

$$X_1 = A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\beta}{dy} + C \frac{d\gamma}{dz} \quad (19.0.20)$$

e se $L dx dy dz$ è il momento della coppia che tende a far ruotare il corpo attorno all'asse delle x da y verso z ,

$$L = B\gamma - C\beta \quad (19.0.21)$$

La forza e il momento corrispondenti alle direzioni delle y e delle z si dedurranno da queste espressioni con le opportune permutazioni.

640. Se il corpo magnetizzato è attraversato da una corrente elettrica le cui componenti sono u, v, w , ne risulta, dalle equazioni (C), § 603, una forza elettromagnetica addizionale, le cui componenti sono X_2, Y_2, Z_2 essendo X_2 uguale a

$$X_2 = vc - wb \quad (19.0.22)$$

Pertanto, la forza totale, X , derivante dal magnetismo della molecola, così come la corrente passante attraverso di essa, è

$$X = A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\beta}{dy} + C \frac{d\gamma}{dz} + vc - wb \quad (19.0.23)$$

Le quantità a, b, c sono le componenti dell'induzione magnetica, e sono correlate alle α, β, γ , le componenti della forza magnetica, dalle equazioni date al § 400,

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A \\ b = \beta + 4\pi B \\ c = \gamma + 4\pi C \end{cases} \quad (19.0.24)$$

²Si veda l'Appendice II, alla fine del Capitolo.

Le componenti della corrente, u, v, w , si possono esprimere in termini di α, β, γ attraverso le equazioni del § 607,

$$\begin{cases} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases} \quad (19.0.25)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4\pi} \left[(a - \alpha) \frac{d\alpha}{dx} + (b - \beta) \frac{d\beta}{dy} + (c - \gamma) \frac{d\gamma}{dz} + b \left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} \right) + c \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[a \frac{d\alpha}{dx} + b \frac{d\alpha}{dy} + c \frac{d\alpha}{dz} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] \end{aligned} \quad (19.0.26)$$

Dal § 403,

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \quad (19.0.27)$$

Moltiplicando questa equazione e dividendo per 4π , possiamo sommare il risultato alla (19-26) e troviamo

$$X = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dx} \left[a\alpha - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] + \frac{d}{dy} (b\alpha) + \frac{d}{dz} (c\alpha) \right\} \quad (19.0.28)$$

così, dalla (19-21)

$$L = \frac{1}{4\pi} [(b - \beta)\gamma - (c - \gamma)\beta] \quad (19.0.29)$$

$$= \frac{1}{4\pi} (b\gamma - c\beta) \quad (19.0.30)$$

dove X è la forza riferita all'unità di volume nella direzione x , e L il momento delle forze su questo asse.

Spiegazione di queste forze con l'ipotesi di un mezzo in uno stato di deformazione

641. Indichiamo con un simbolo della forma P_{hk} una deformazione di tipo qualunque, riferita all'unità di superficie: il primo indice h specifica che la normale alla superficie alla quale si suppone applicata la deformazione sia parallelo all'asse h ; e il secondo indice k specifica che l'asse k è parallelo alla direzione della pressione che la parte del corpo posta sul lato positivo della superficie esercita sulla parte posta sul lato negativo.

Le direzioni di h e k possono essere le stesse, nel qual caso la pressione è una pressione normale. Esse possono essere oblique tra loro, nel qual caso la pressione è obliqua; o possono essere perpendicolari tra loro, nel qual caso la pressione è tangenziale.

La condizione perché le pressioni non tendano a produrre rotazioni nelle parti elementari del corpo è

$$P_{hk} = P_{kh}$$

Nel caso di un corpo magnetizzato, vi è una tendenza a una tale rotazione; di conseguenza, questa condizione, che è soddisfatta nella teoria ordinaria delle deformazioni, non lo è più.

Consideriamo l'effetto delle pressioni sulle sei facce dell'elemento $dx dy dz$ del corpo, essendo l'origine delle coordinate preso nel suo centro di gravità-

Sulla faccia positiva $dy dz$, per la quale il valore di x è $\frac{1}{2} dx$, le forze sono

$$\begin{cases} \parallel a x & \left(P_{xx} + \frac{1}{2} \frac{dP_{xx}}{dx} dx \right) dy dz = X_{+x} \\ \parallel a y & \left(P_{xy} + \frac{1}{2} \frac{dP_{xy}}{dy} dy \right) dy dz = Y_{+z} \\ \parallel a z & \left(P_{xz} + \frac{1}{2} \frac{dP_{xz}}{dz} dz \right) dy dz = Z_{+z} \end{cases} \quad (19.0.31)$$

Le forze che agiscono sulla faccia opposta, $-X_{-x}$, $-Y_y$, $-Z_{-z}$ si possono dedurre da queste formule cambiando il segno di dx . Possiamo esprimere analogamente i sistemi di tre forze che agiscono su ognuna delle altre facce dell'elemento, essendo la direzione della forza indicata dalla lettera maiuscola e la faccia sulla quale essa agisce dall'indice.

Se $Xdxdydz$ è la forza totale che agisce sull'elemento parallelamente alle x

$$Xdxdydz = X_{+x} + X_{+y} + X_{+z} + X_{-x} + X_{-y} + Z_{-z} = \left(\frac{dP_{xx}}{dx} + \frac{dP_{yx}}{dy} + \frac{dP_{zx}}{dz} \right) dxdydz$$

da cui

$$X = \frac{d}{dx}P_{xx} + \frac{d}{dy}P_{yx} + \frac{d}{dz}P_{zx} \quad (19.0.32)$$

Se $Ldxdydz$ è il momento delle forze che tendono a far ruotare l'elemento da y verso z attorno all'asse x

$$Ldxdydz = \frac{1}{2}dy(Z_{+y} - Z_{-y}) - \frac{1}{2}dz(Y_{+y} - Y_{-y}) = (P_{yz} - P_{zy}) dxdydz$$

da cui

$$L = P_{yz} - P_{zy} \quad (19.0.33)$$

Confrontando i valori di X e L dati dalla (19-28) e dalla (19-30) con quelle delle (19-32) e (19-33), troviamo che, se poniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{xx} = \frac{1}{4\pi} \left[a\alpha - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] \\ P_{yy} = \frac{1}{4\pi} \left[b\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] \\ P_{zz} = \frac{1}{4\pi} \left[c\gamma - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] \\ P_{yz} = \frac{1}{4\pi}b\gamma \quad P_{xy} = \frac{1}{4\pi}c\beta \\ P_{zx} = \frac{1}{4\pi}c\alpha \quad P_{xz} = \frac{1}{4\pi}a\gamma \\ P_{xy} = \frac{1}{4\pi}a\beta \quad P_{yx} = \frac{1}{4\pi}b\alpha \end{array} \right. \quad (19.0.34)$$

vediamo che dal punto di vista statico una forza dovuta al sistema delle pressioni aventi queste componenti sarebbe equivalente, quanto agli effetti prodotti su ogni elemento del corpo, alle forze dovute alla magnetizzazione e alle correnti elettriche.

642. È facile trovare la natura della pressione che hanno queste componenti. Prendiamo per asse x la bisettrice dell'angolo che formano le direzioni della forza magnetica e dell'induzione magnetica, e prendiamo l'asse y nel piano di queste due direzioni, e contato dalla parte della forza magnetica.

Indichiamo con \mathfrak{H} il valore numerico della forza magnetica; con \mathfrak{B} quello dell'induzione magnetica e con 2ϵ l'angolo tra le loro direzioni:

$$\begin{array}{l} \alpha = \mathfrak{H} \cos \epsilon \quad \beta = \mathfrak{H} \sin \epsilon \quad \gamma = 0 \\ a = \mathfrak{B} \cos \epsilon \quad b = -\mathfrak{B} \sin \epsilon \quad c = 0 \end{array} \quad (19.0.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{xx} = \frac{1}{4\pi} \left(+\mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos^2 \epsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \right) \\ P_{yy} = \frac{1}{4\pi} \left(-\mathfrak{B}\mathfrak{H} \sin^2 \epsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \right) \\ P_{zz} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \right) \\ P_{yx} = P_{zx} = P_{xy} = P_{xz} = 0 \\ P_{xy} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos \epsilon \sin \epsilon \\ P_{yz} = -\frac{1}{4\pi} \mathfrak{B}\mathfrak{H} \cos \epsilon \sin \epsilon \end{array} \right. \quad (19.0.36)$$

Pertanto, si può considerare lo stato di deformazione come dovuta a:

1° Una compressione uguale in tutte le direzioni, e uguale a $\frac{1}{8}\mathfrak{H}^2$;

2° Una tensione lungo la bisettrice dell'angolo compreso tra le direzioni della forza magnetica e dell'induzione magnetica, uguale a $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\epsilon$;

3° Una compressione lungo la bisettrice esterna dell'angolo tra queste due direzioni, uguale a $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\epsilon$;

4° Una coppia tendente a far ruotare ogni elemento del corpo nel piano delle due direzioni dell'induzione magnetica e della forza magnetica, dalla prima verso la seconda, e uguale a $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin 2\epsilon$.

Se l'induzione magnetica è nello stesso verso della forza magnetica, cosa che vale sempre nei solidi non magnetizzati e nei fluidi, $\epsilon = 0$, e facendo coincidere l'asse x con la direzione della forza magnetica,

$$P_{xx} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathfrak{B}\mathfrak{H} - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \right) \quad P_{yy} = P_{zz} = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \quad (19.037)$$

e le pressioni tangenziali si annullano.

In questo caso, la pressione consiste in una pressione idrostatica uguale a $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$, combinata con una tensione longitudinale diretta lungo le linee di forza e uguale a $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}$.

643. Quando siamo in assenza di magnetizzazione, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, e la pressione se semplifica ulteriormente: essa consiste in una tensione uguale a $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$ lungo le linee di forza e una pressione pure uguale a $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$ lungo tutte le direzioni perpendicolari alla direzione delle linee di forza. In questo caso importante, le componenti delle tensioni sono

$$\begin{cases} P_{xx} = \frac{1}{8\pi} (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) \\ P_{yy} = \frac{1}{8\pi} (\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2) \\ P_{zz} = \frac{1}{8\pi} (\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2) \\ P_{yx} = P_{zy} = \frac{1}{4\pi} \beta\gamma \\ P_{zx} = P_{xz} = \frac{1}{4\pi} \gamma\alpha \\ P_{xy} = P_{yx} = \frac{1}{4\pi} \alpha\beta \end{cases} \quad (19.038)$$

La componente lungo le x della forza sviluppata da queste pressioni su un elemento del mezzo è, per unità di volume,

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{dx}P_{xx} + \frac{d}{dy}P_{yx} + \frac{d}{dz}P_{zx} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\alpha \frac{d\alpha}{dx} - \beta \frac{d\beta}{dx} - \gamma \frac{d\gamma}{dx} \right) + \frac{1}{4\pi} \left(\alpha \frac{d\beta}{dy} + \beta \frac{d\alpha}{dy} \right) + \frac{1}{4\pi} \left(\alpha \frac{d\gamma}{dz} + \gamma \frac{d\alpha}{dz} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) + \frac{1}{4\pi} \gamma \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) - \frac{1}{4\pi} \beta \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} &= 4\pi m \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi v \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi w \end{aligned}$$

dove m è la densità della materia magnetica australe per unità di volume, e dove v e w sono le componenti delle correnti elettriche, per unità di area contata perpendicolarmente a y o a z .

Da cui, le equazioni della forza elettromagnetica

$$\begin{cases} X = \alpha m + v\gamma - w\beta \\ Y = \beta m + w\alpha - u\gamma \\ Z = \gamma m + u\beta - v\alpha \end{cases} \quad (19.039)$$

644. Se adottiamo le teorie di Ampère e Weber, sulla natura dei corpi magnetici e diamagnetici, e se ammettiamo che la polarità magnetica o diamagnetica è dovuta a correnti elettriche molecolari, facciamo sparire questa materia magnetica ideale, e ciò porta a scrivere, per tutti dello spazio

$$m = 0$$

e

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \quad (19.0.40)$$

di modo che le equazioni delle forza elettromagnetica divengono

$$\begin{cases} X &= v\gamma - w\beta \\ Y &= w\alpha - u\gamma \\ Z &= u\beta - v\alpha \end{cases} \quad (19.0.41)$$

Queste sono le componenti della forza meccanica per unità di volume della sostanza. Le componenti della forza magnetica sono α, β, γ ; quelle delle correnti elettriche sono u, v, w . Queste equazioni sono identiche a quelle già stabilite con le equazioni (C) al § 603.

645. Spiegando la forza elettromagnetica per mezzo di uno stato di tensione del mezzo, non facciamo altro che seguire l'idea di Faraday, secondo la quale le linee di forza tendono ad avvicinarsi e ad allontanarsi tra di loro quando sono poste fianco a fianco.

Abbiamo soltanto espresso in un linguaggio matematico, il modulo della tensione che si esercita lungo queste linee e della pressione che agisce lungo le direzioni perpendicolari; provato che lo stato di tensione, come l'abbiamo supposto esistere nel mezzo, produrrebbe le forze delle quali si osserva l'effetto sui conduttori attraversati da correnti elettriche.

Non abbiamo affermato nulla, finora, sul modo in cui questo stato di deformazione si origini e si mantenga nel mezzo. Abbiamo soltanto mostrato che è possibile pensare l'azione reciproca delle correnti elettriche come dipendente da uno stato particolare di deformazione del mezzo ambiente, invece di considerare un'azione a distanza diretta e immediata.

Ogni nuovo sviluppo su questo stato di deformazione, spiegandolo con il movimento del mezzo o diversamente, deve essere considerato come una parte distinta e indipendente dell'attuale teoria; la sua conferma o la sua rovina non inficerà per nulla i risultati acquisiti finora (Si veda § 832).

Nella prima parte di questo Trattato (§ 108), abbiamo mostrato che si può pensare l'azione delle forze elettromotrici come esercitantesi tramite l'intermediazione del mezzo circostante sottoposto a certe deformazioni. Facciamo ora la stessa cosa per le forze elettromagnetiche; ora, rimane da vedere se questa ipotesi di un mezzo in grado di supportare queste deformazioni può essere in accordo con gli altri fenomeni noti, oppure se bisogna abbandonarla non presentando vantaggi.

In un campo dove si esercitano tensioni elettrostatiche ed elettromagnetiche, dobbiamo supporre che la deformazione elettrostatica, descritta nella prima parte, si sovrapponga alla deformazione elettromagnetica da considerare.

646. Se ammettiamo che la forza totale dovuta al magnetismo terrestre sia di 10 unità britanniche (piede, grano, secondo), che vale più o meno in Inghilterra, la tensione lungo le linee di forza è di 0,128 grani per piede quadrato. La tensione magnetica maggiore ottenuta da Joule³, per mezzo di elettromagneti, era di circa 140 pound per inch quadrato ($9800 \frac{g}{cm^2}$).

³Sturgeon, *Annals of Electricity*, vol. v. p. 187 (1840); o *Philosophical Magazine*, Dic. 1851.

Appendice I

[La nota seguente, tratta da una lettera scritta dal professor Clerk Maxwell al professor Chrystal ha una grande importanza rispetto ai §§ 389 e 632.]

Al § 389, l'energia dovuta alla presenza di un magnete i cui componenti di magnetizzazione sono A_1, B_1, C_1 posto in un campo dove le componenti della forza magnetica sono $\alpha_1, \beta_2, \gamma_2$ è

$$- \iiint (A_1\alpha_2 + B_1\beta_2 + C_1\gamma_2) dx dy dz$$

dove l'integrazione è estesa al solo volume del magnete, poiché A_1, B_1, C_1 sono nulli dappertutti.

Ma l'energia totale è della forma

$$-\frac{1}{2} \iiint [(A_1 + A_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots] dx dy dz$$

essendo l'integrazione estesa a tutta la regione dello spazio dove vi sono corpi magnetizzati, e A_2, B_2, C_2 che indicano le componenti della magnetizzazione in un punto esterno al magnete.

L'energia totale è quindi formata da quattro parti:

$$-\frac{1}{2} \iiint (A_1\alpha_1 + \dots) dx dy dz \quad (19.0.42)$$

che è costante se la magnetizzazione del magnete è invariabile

$$-\frac{1}{2} \iiint (A_2\alpha_1 + \dots) dx dy dz \quad (19.0.43)$$

che è uguale, dal teorema di Green, a

$$-\frac{1}{2} \iiint (A_1\alpha_2 + \dots) dx dy dz \quad (19.0.44)$$

infine,

$$-\frac{1}{2} \iiint (A_2\alpha_2 + \dots) dx dy dz \quad (19.0.45)$$

potendo, quest'ultima, essere considerata come dovuta a una magnetizzazione invariabile ed essendo, di conseguenza, costante.

Pertanto quando un magnete, considerato come magnetizzato invariabilmente, si sposta, la parte variabile della sua energia è la somma delle espressioni (A-2,A-3), cioè

$$-\frac{1}{2} \iiint (A_1\alpha_2 + B_1\beta_2 + C_1\gamma_2) dx dy dz$$

Ricordando che lo spostamento del magnete cambia il valore di α_2, \dots , ma non quello di A_1, \dots , troviamo per componente della forza che agisce sul magnete lungo una direzione qualunque ϕ

$$\int \left(A_1 \frac{d\alpha_2}{d\phi} + B_1 \frac{d\beta_2}{d\phi} + C_1 \frac{d\gamma_2}{d\phi} \right) dx dy dz$$

Se, invece di un magnete, abbiamo un corpo magnetizzato per induzione, l'espressione della forma rimane la stessa e ponendo $A_1 = k\alpha, \dots$, abbiamo

$$\iiint \kappa \left(\alpha \frac{d\alpha_2}{d\phi} + \beta \frac{d\beta_2}{d\phi} + \gamma \frac{d\gamma_2}{d\phi} \right) dx dy dz$$

In questa espressione α per $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$; ma, se il corpo magnetizzato è piccolo o se κ è debole, si può trascurare α_1 rispetto a α_2 , e l'equazione della forza diviene, come al § 440,

$$\frac{d}{d\phi} \frac{1}{2} \iiint \kappa (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dx dy dz$$

Così, il lavoro compiuto dalle forze magnetiche mentre un corpo di piccolo potere induttore magnetizzato per induzione si allontana fino all'infinito è solo la metà del lavoro che sarebbe stato effettuato se questo stesso corpo avesse ricevuto all'inizio una magnetizzazione invariabile della stessa potenza; poiché, allontanandosi, il magnete indotto perde la sua potenza.

Appendice II

[L'espressione data al § 639 per l'energia potenziale sviluppata dalle forze magnetiche nell'unità di volume di un mezzo sollevato da obiezioni, per la ragione che, per trovare questa espressione al § 389, si è supposto che α, β, γ potessero dedursi da un potenziale, non vale più nei § 639 e § 640. Questa obiezione ricade pure sull'espressione della forza X , che è la variazione nello spazio dell'energia. L'oggetto di questa Nota è di presentare alcune considerazioni tendenti a confermare l'esattezza del testo.

Consideriamo l'elemento $dx dy dz$ isolato dal resto del mezzo e attraversato da una corrente elettrica u, v, w . Le forze che agiscono sull'elemento sono dovute a due cause: la magnetizzazione dell'elemento e il passaggio di corrente che lo attraversa. La forza dovuta a quest'ultima causa è $(X_2, Y_2, Z_2) dx dy dz$ ed è stata data dalla (19-22): si ha $X_2 = vc - wb$, ecc.

Per valutare l'altra forza, osserviamo che, se nessuna corrente attraversa l'elemento, la forza magnetica agente su di esso sarebbe $(X', Y', Z') dx dy dz$, dove

$$X' = A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\alpha}{dy} + C \frac{d\alpha}{dz}$$

Ma, oltre a questa, vi sono le forze dovute all'azione della corrente elettrica sul magnetismo delle facce dell'elemento. Si mostrerà al § 653 che, quando si passa dal lato positivo a quello negativo di uno strato di corrente, la componente della forza magnetica normalmente alla superficie non subisce discontinuità, non più della componente parallela alla direzione della corrente; mentre la componente parallela allo strato e normale alla direzione della corrente varia di $4\pi i$, dove i è l'intensità di corrente per unità di lunghezza. Supponiamo che le facce del nostro elemento, che sono perpendicolari all'asse y in un sistema di assi perpendicolari, facciano parte di una strato di corrente infinita, nella quale circola una corrente parallela all'asse z uguale a $w dy$. Oltre alla forza $B \frac{d\alpha}{dy} dx dy dz$, che abbiamo già contato nella valutazione delle forze parallele a dx che agiscono sulle facce $dz dx$, vi sarà una forza magnetica $B 4\pi w dx dy dz$. Allo stesso modo troveremo una forza addizionale

$$-C 4\pi v dx dy dz$$

agente sulle facce $dx dy$. Dobbiamo quindi sommare a X' un termine

$$X'' = 4\pi B w - 4\pi C v$$

e la componente totale, lungo le x della forza magnetica, sarà

$$A \frac{d\alpha}{dx} + B \left(\frac{d\alpha}{dy} + 4\pi w \right) + C \left(\frac{d\alpha}{dz} - 4\pi v \right)$$

cioè

$$A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\beta}{dy} + C \frac{d\gamma}{dz}$$

Si osserverà che la forza (X'', Y'', Z'') non influisce sul valore di (L, M, N) .

20 Current sheet

647. Una current-sheet è uno strato infinitamente sottile di materia conduttrice, limitato su ogni faccia da mezzi isolanti, di modo che delle correnti elettriche possono circolare nello strato, ma non possono uscirne, salvo in certi punti detti *elettrodi*, che servono da entrata e uscita alla corrente.

Per poter condurre una corrente finita, una strato superficiale materiale deve avere uno spessore finito e, di conseguenza, deve essere considerato come un conduttore tridimensionale; ma, in molti casi, è comodo dedurre le proprietà elettriche di una tale superficie conduttrice materiale o di uno strato sottile di filo arrotolato, proprietà di una current-sheet definita come in precedenza.

Possiamo quindi considerare una superficie di forma qualunque come una current-sheet. Sceglieremo un lato della superficie come positivo, e tutte le linee tracciate sulla superficie saranno viste dal lato positivo. Nel caso di una superficie chiusa, prenderemo il lato esterno come lato positivo. Si veda il § 294, dove tuttavia si è definita la direzione della corrente come la si vedeva dalla faccia negativa della falda.

Funzione di corrente

648. Prendiamo sulla superficie un punto qualunque A come origine, e tracciamo da esso a un altro punto P una linea sulla superficie. Sia ϕ la quantità di elettricità che attraversa questa linea, da sinistra a destra nell'unità di tempo: ϕ è detta la funzione di corrente nel punto P .

La funzione di corrente dipende solo dalla posizione di P , e rimane la stessa per due forme qualunque della linea AP , purché questa possa passare dall'una all'altra di queste forme con un movimento continuo senza incontrare l'elettrodo. Infatti, queste due forme della linea AP comprendente una superficie all'interno della quale non si trova l'elettrodo, la stessa quantità di elettricità che penetra in essa attraverso una delle linee deve forzatamente uscire dall'altra.

Se s indica la lunghezza della linea AP , la corrente che attraversa da sinistra a destra l'elemento ds sarà $\frac{d\phi}{ds} ds$.

Se ϕ è costante per una certa curva, non passa corrente attraverso di essa: si chiama allora linea di corrente o linea di flusso.

649. Sia ψ il potenziale elettrico in un punto qualunque dello strato superficiale: la forza elettromotrice che agisce lungo un elemento della curva ds è

$$-\frac{d\psi}{ds} ds$$

se non esiste altra forza elettromotrice oltre quella dovuta alla differenza di potenziale.

Se ψ è costante per una certa curva, quest'ultima è detta linea equipotenziale.

650. Possiamo supporre che la posizione di un punto sia definita sullo strato superficiale dai valori di ϕ e ψ in questo punto. Sia ds_1 la lunghezza dell'elemento della linea equipotenziale ψ intercettata tra le linee di corrente ϕ e $\phi + d\phi$, e sia ds_2 la lunghezza dell'elemento della linea di corrente ϕ intercettata tra le due linee equipotenziali ψ e $\psi + d\psi$. Possiamo considerare ds_1 e ds_2 come i lati dell'elemento dello strato $d\phi d\psi$. La forza elettromotrice $-d\psi$ diretta lungo ds_2 , produce una corrente $d\phi$ attraverso ds_1 .

Sia una parte dello strato, di lunghezza ds_2 e di larghezza ds_1 e sia la sua resistenza uguale a

$$\sigma \frac{ds_2}{ds_1}$$

dove σ è la resistenza specifica dello strato riferito all'unità di area, allora

$$d\psi = \sigma \frac{ds_2}{ds_1} d\phi$$

da cui

$$\frac{ds_1}{d\phi} = \sigma \frac{ds_2}{d\psi}$$

651. Se lo strato è formato da una sostanza ugualmente conduttrice in tutte le direzioni, ds_1 è perpendicolare a ds_2 . Nel caso di uno strato di resistenza uniforme, σ è costante e, se poniamo $\psi = \sigma\psi'$, abbiamo

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \sigma \frac{d\phi}{d\psi'}$$

e le linee di flusso ed equipotenziali suddivideranno la superficie in piccoli quadrati-

Da ciò deriva che, se ϕ_1 e ψ'_1 sono funzioni coniugate di ϕ e di ψ' (§ 183), le linee ϕ_1 possono essere linee di flusso della superficie, alle quali le linee ψ'_1 corrisponderanno come linee equipotenziali. Questo è evidentemente il caso dove $\phi_1 = \psi'$ e $\psi'_1 = -\phi$; allora le linee di flusso divengono linee equipotenziali, e viceversa¹.

Se abbiamo trovato, in un caso particolare, la distribuzione delle correnti elettriche in una strato superficiale uniforme, di forma qualsiasi, possiamo dedurne la distribuzione in un altro caso qualunque, con una opportuna trasformazione delle funzioni coniugate: questo metodo è stato esposto al § 190.

652. Ci serve ora determinare l'azione magnetica di uno strato superficiale di corrente, nel quale la corrente è interamente contenuto nello strato, senza che vi siano elettrodi attraverso i quali la corrente sia portata allo strato o ne esca.

In questo caso, la funzione di corrente ha un valore determinato in ogni punto, e le linee di flusso sono curve chiuse non intersecantesi tra loro, sebbene una linea di flusso possa incrociare se stessa. Consideriamo la porzione anulare della strato che è compreso tra le linee di flusso ϕ e $\phi + d\phi$. Questa parte dello strato forma un circuito conduttore nel quale circola una corrente di intensità $\delta\phi$, nel verso positivo, attorno a questa parte dello strato per il quale ϕ ha un valore più grande del valore dato. L'effetto di questa corrente è lo stesso di quello di un foglio magnetico di potenza $d\phi$ su ogni punto non compreso nella massa del foglio. Supponiamo che questo foglio coincida con la parte dello strato superficiale di corrente, sul quale ϕ ha un valore maggiore che sulla linea di flusso data.

Tracciamo successivamente tutte le linee di flusso, iniziando da quella per la quale ϕ ha un valore maggiore e finendo con quella per la quale il suo valore è il minore; dividiamo poi lo strato superficiale di corrente in una serie di circuiti. Sostituiamo a ciascuno di essi il foglio magnetico corrispondente; troviamo che l'effetto magnetico esercitato dallo strato di corrente su un punto non compreso nella sua massa è lo stesso di quello di un foglio magnetico complesso la cui potenza sarebbe in ogni punto $C + \phi$, essendo C una costante.

Se lo strato superficiale di corrente è limitato, dobbiamo porre $C + \phi = 0$ lungo la curva limitata. Se lo strato forma una superficie chiusa o infinita, non vi è nulla che determina il valore di C .

¹Si veda Thomson, *Camb. and Dub. Math. Journ.*, vol. III, p. 286.

653. Il potenziale magnetico in un punto qualunque, posto su uno o sull'altra faccia dello strato, è dato, come al § 415, dall'espressione

$$\Omega = \iint \frac{1}{r^2} \phi \cos \theta dS$$

dove r è la distanza del punto dato dall'elemento di superficie dS e θ è l'angolo tra la direzione di r e quella della normale tracciata dal lato positivo di dS .

Questa espressione ci dà il potenziale magnetico per tutti i punti non compresi nello spessore dello strato; sappiamo d'altronde che non esiste nulla di simile a un potenziale magnetico per i punti interni a un conduttore attraversato da una corrente.

Il valore di Ω è discontinuo sullo strato superficiale di corrente; poiché, se Ω_1 è il suo valore in un punto interno allo strato, molto vicino alla sua superficie, e Ω_2 il suo valore in un punto vicino al primo, ma esterno allo strato,

$$\Omega_2 = \Omega_1 + 4\pi\phi$$

essendo ϕ la funzione di corrente in questo punto.

Il valore della componente della forza magnetica normale allo strato è continuo, poiché è lo stesso sui due lati. La componente parallela alle linee di flusso è pure continua, ma la componente tangenziale perpendicolare alle linee di flusso è discontinua alla superficie dello strato. Se s è la lunghezza di una curva tracciata sullo strato, la componente della forza magnetica, nella direzione di ds , dal lato negativo, $-\frac{d\Omega_1}{ds}$, e, dal lato positivo, $-\frac{d\Omega_2}{ds} = -\frac{d\Omega_1}{ds} - 4\pi - \frac{d\phi}{ds}$.

La componente della forza magnetica dal lato positivo supera quindi di $-4\pi\frac{d\phi}{ds}$ la componente posta sul lato negativo. In un punto dato, questa quantità è massima quando ds è perpendicolare alle linee di flusso.

Induzione di correnti elettriche in uno strato superficiale di conducibilità infinita

654. Si è mostrato, al § 579, in un circuito qualunque,

$$E = \frac{dp}{dt} + Ri$$

dove E è la forza elettromagnetica applicata, p la quantità di moto elettrocinetica del circuito, R la sua resistenza e i l'intensità di corrente che lo attraversa. In assenza di forza elettromotrice applicata e di resistenza, $\frac{dp}{dt} = 0$, con p costante. La quantità di moto elettrocinetica del circuito p è misurata, come mostrato al § 588, dall'integrale dell'induzione magnetica preso su una superficie limitata dal circuito. Pertanto, nel caso di uno strato superficiale di corrente senza resistenza, l'integrale dell'induzione magnetica attraverso una curva chiusa tracciata sulla superficie deve essere costante, ciò che suppone che la componente normale dell'induzione magnetica rimanga costante in tutti i punti dello strato di corrente.

655. Se quindi il moto di un magnete o la variazione di corrente nelle vicinanze modificano in qualche modo il campo magnetico, si svilupperanno nello strato correnti elettriche tali che il loro effetto magnetico, unito a quello dei magneti o delle correnti del campo, mantenendo invariata la componente normale dell'induzione magnetica in ogni punto dello strato superficiale.

Lo strato può quindi essere considerato come impenetrabile all'induzione magnetica; le linee di induzione magnetica sono deviate dallo strato, assolutamente come le linee di flusso di una corrente elettrica sarebbero deviate dall'introduzione di uno strato della stessa forma, fatto di una sostanza di resistenza infinita.

Se lo strato ha la forma di una superficie chiusa o infinita, nessuna azione magnetica producentesi da un lato dello strato produrrà effetti magnetici dall'altro lato.

Teoria di uno strato superficiale di corrente piano

656. Abbiamo visto che l'azione magnetica di uno strato di corrente sui punti esterni è equivalente a quello di un foglio magnetico la cui potenza sarà in ogni punto uguale alla funzione di corrente ϕ . Se lo strato è piano, possiamo esprimere tutte le quantità necessarie alla determinazione degli effetti elettromagnetici per mezzo di una sola funzione P , che è il potenziale di uno strato di materia fittizia distribuita nel piano alla densità superficiale ϕ . Il valore di P è evidentemente

$$P = \iint \frac{\phi}{r} dx' dy' \quad (20.0.1)$$

dove r è la distanza dal punto (x, y, z) dal quale P è calcolato, al punto $(x', y', 0)$ nel piano dello strato superficiale di corrente dove l'elemento $dx' dy'$ è preso.

Per trovare il potenziale magnetico, possiamo considerare il foglio magnetico come formato da due superfici parallele al piano xy , una delle quali ha per equazione $z = -\frac{1}{2}c$, avrebbe la densità superficiale $-\frac{\phi}{c}$.

I potenziali dovuti a queste superfici saranno rispettivamente

$$\frac{1}{c}P_{(z-\frac{c}{2})} \quad -\frac{1}{c}P_{(z+\frac{c}{2})}$$

dove gli indici ricordano che si è sostituito z con $z - \frac{c}{2}$ nella prima espressione, e con $z + \frac{c}{2}$ nella seconda. Sviluppando queste espressioni mediante il teorema di Taylor, sommandole e facendo c infinitamente piccolo, abbiamo, per il potenziale magnetico dovuto allo strato superficiale in un punto esterno ad esso,

$$\Omega = -\frac{dP}{dz} \quad (20.0.2)$$

657. La quantità P è simmetrica rispetto al piano dello strato; essa rimane la stessa quando si sostituisce $-z$ con z .

Sulla superficie positiva dello strato,

$$\Omega = -\frac{dP}{dz} = 2\pi\phi \quad (20.0.3)$$

sulla superficie positiva

$$\Omega = -\frac{dP}{dz} = -2\pi\phi \quad (20.0.4)$$

All'interno, se i suoi effetti magnetici sono dovuti alla magnetizzazione della sostanza, il potenziale effettivo, in modo continuo, da $+2\pi\phi$ sulla superficie positiva a $-2\pi\phi$ su quella negativa.

Se lo strato contiene correnti elettriche, la forza magnetica all'interno non soddisfa più alla condizione di avere un potenziale; ma è comunque perfettamente determinato.

La sua componente normale

$$\gamma = -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{d^2P}{dz^2} \quad (20.0.5)$$

ha lo stesso valore sulle due facce dello strato e in tutta la massa.

Se le sue componenti parallelamente a x e y sono α e β sulla faccia positiva, α' e β' sulla faccia negativa,

$$\alpha = -2\pi \frac{d\phi}{dx} = -\alpha' \quad (20.0.6)$$

$$\beta = -2\pi \frac{d\phi}{dy} = -\beta' \quad (20.0.7)$$

All'interno dello strato, queste componenti variano in modo continuo da α e β a α' e β' .

Le equazioni

$$\begin{cases} \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = -\frac{d\Omega}{dx} \\ \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = -\frac{d\Omega}{dy} \\ \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = -\frac{d\Omega}{dz} \end{cases} \quad (20.0.8)$$

che collegano le componenti F, G, H del potenziale vettore dovuta allo strato superficiale di corrente, al potenziale scalare Ω , sono soddisfatte se poniamo

$$F = \frac{dP}{dy} \quad G = -\frac{dP}{dx} \quad H = 0 \quad (20.0.9)$$

Otteniamo così questi valori direttamente per integrazione, così per F ,

$$F = \iint_u^r dx' dy' = \iint \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dy'} dx' dy' = \int \frac{\phi}{r} dx' - \iint \phi \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} dx' dy'$$

Poiché l'integrazione deve essere estesa allo strato piano infinito, e, inoltre, il primo termine si annulla all'infinito, l'espressione si riduce al secondo termine; sostituendo

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{r} \quad \text{per} \quad -\frac{d}{dy'} \frac{1}{r}$$

e ricordando che ϕ dipende da x' e y' , e non da x, y, z , otteniamo, per la (20-1)

$$F = \frac{d}{dy} \iint \frac{\phi}{r} dx' dy' = \frac{dP}{dy}$$

Se Ω' è il potenziale magnetico dovuto a un sistema elettrico o magnetico esterno allo strato, possiamo scrivere

$$P' = - \int \Omega' dz \quad (20.0.10)$$

e avremo allora, per le componenti del potenziale vettore dovuto a questo sistema

$$F' = \frac{dP'}{dy} \quad G' = \frac{dP'}{dx} \quad H' = 0 \quad (20.0.11)$$

658. Determiniamo ora la forza elettromotrice in un punto qualunque dello strato supposto fissato.

Siano X e Y le componenti della forza elettromotrice parallelamente a x e y ; dal § 598, abbiamo

$$X = -\frac{d}{dt} (F + F') - \frac{d\psi}{dx} \quad (20.0.12)$$

$$Y = -\frac{d}{dt} (G + G') - \frac{d\psi}{dy} \quad (20.0.13)$$

Se la resistenza elettrica dello strato è uniforme e uguale a σ ,

$$X = \sigma u \quad Y = \sigma v \quad (20.0.14)$$

dove u e v sono le componenti della corrente, e se ϕ è la funzione corrente,

$$u = \frac{d\phi}{dy} \quad v = -\frac{d\phi}{dx} \quad (20.0.15)$$

Dall'equazione (20-3), $2\pi\phi = -\frac{dP}{dz}$ sulla faccia positiva dello strato di corrente. Pertanto le equazioni (20-12.13) si possono scrivere

$$-\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^2 P}{dy dz} = -\frac{d^2}{dy dt} (P + P') - \frac{d\psi}{dx} \quad (20.0.16)$$

$$-\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^2 P}{dx dz} = -\frac{d^2}{dx dt} (P + P') - \frac{d\psi}{dy} \quad (20.0.17)$$

dove i valori delle espressioni sono quelli corrispondenti alla superficie positiva dello strato.

Differenziamo la prima di queste espressioni rispetto a x , la seconda rispetto a y e sommiamo i risultati; otteniamo

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} = 0 \quad (20.0.18)$$

Il solo valore di ψ che soddisfa questa equazione, ed è finito e continuo in ogni punto del piano, e si annulla a distanza infinita, è

$$\psi = 0 \quad (20.0.19)$$

Pertanto l'induzione di correnti elettriche in uno strato piano infinito, di conducibilità uniforme, non comporta la formazione di differenze di potenziale elettrico tra le diverse parti dello strato.

Sostituendo questo valore di ψ e integrando le equazioni (20-16, 20-17), otteniamo

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{dP}{dz} - \frac{dP}{dt} - \frac{dP'}{dt} = f(z, t) \quad (20.0.20)$$

Poiché i valori delle correnti nello strato sono trovati differenziando rispetto a x o y , la funzione arbitraria di z e t svanirà. Non ne terremo quindi conto.

Se sostituiamo pure $\frac{\sigma}{2\pi}$ con l'unico simbolo R , che rappresenta una certa velocità, l'equazione tra P e P' diviene

$$R \frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dt} + \frac{dP'}{dt} \quad (20.0.21)$$

659. Supponiamo dapprima che non vi sia sistema magnetico esterno agente sullo strato di corrente. Possiamo allora porre $P' = 0$ e il caso è quello di un sistema di correnti elettriche esistenti nello strato, abbandonate a se stesse, e perdenti nello stesso tempo la loro energia a causa della resistenza dello strato. Questo risultato è espresso dall'equazione

$$R \frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dt} \quad (20.0.22)$$

la cui soluzione è

$$P = f[x, y, (z + Rt)] \quad (20.0.23)$$

Pertanto il valore di P^2 , al tempo t , e in un punto posto dal lato positivo della superficie e avente per coordinate x, y, z , è uguale al valore di P al tempo $t = 0$, nel punto $(x, y, z, +Rt)$.

Se quindi si eccita in uno strato piano uniforme, di grandezza infinita, un sistema di correnti che si lascia poi a se stesso, il loro effetto magnetico su un punto situato dal lato positivo dello strato è lo stesso che se queste correnti fossero mantenute costanti nello strato, spostandosi queste con una velocità costante R nel verso della normale tracciata alla sua faccia negativa. La diminuzione delle forze elettromagnetiche, che è dovuta, in realtà, alla distruzione delle correnti, è rappresentata molto esattamente dalla diminuzione della forza che risulterebbe da questo aumento fittizio della distanza.

660. Integrando la (20-21) rispetto a t , otteniamo

$$P + P' = \int R \frac{dP}{dz} dt \quad (20.0.24)$$

²[Le equazioni (20-20) e (20-22) sono state dimostrate solo per la superficie dello strato, dove $z = 0$. L'espressione (20-23) soddisfa la (20-22) in generale, e, di conseguenza, anche alla superficie; essa soddisfa pure alle altre condizioni del problema: è quindi una soluzione. Ogni altra soluzione deve differire da questa per un sistema di correnti chiuse che, dipendendo dallo stato iniziale dello strato e non da cause esterne, devono eliminarsi rapidamente. Se quindi supponiamo che non sia trascorso un tempo infinito, è la sola soluzione del problema.] (Si veda Prof. Clerk Maxwell, *Paper Royal Soc. Proc.*, XX, pp. 160-168).

Supponiamo che P e P' siano dapprima nulli e che un magnete o un elettromagnete sia improvvisamente eccitata o portato da una distanza infinita, in modo da far passare rapidamente il valore di P' da 0 a P' : poiché l'integrale di tempo del secondo membro della (20-24) si annulla con il tempo, dobbiamo avere al primo istante $P = -P'$ alla superficie dello strato.

Pertanto, l'introduzione improvvisa del sistema al quale è dovuto P' eccita nello strato un sistema di correnti, tale da neutralizzare esattamente alla superficie dello strato gli effetti magnetici di questo sistema.

Così, alla superficie dello strato, e di conseguenza in tutti i punti posti dal lato negativo, il sistema iniziale delle corrente produce un effetto esattamente uguale e opposto a quello del sistema magnetico posto dal lato positivo. È quanto possiamo esprimere dicendo che l'effetto delle corrente è equivalente a quello di una immagine del sistema magnetico, che occupa la stessa posizione di questo sistema, ma che presenta una magnetizzazione e correnti elettriche di verso contrario. Una tale immagine è detta immagine *negativa*.

L'effetto delle correnti dello strato in un punto posto sul lato positivo è equivalente all'effetto di un'immagine positiva del sistema magnetico posta sul lato negativo dello strato, essendo le linee che uniscono i punti corrispondenti tagliate dal mezzo e ad angolo retto con lo strato di corrente.

Così, l'azione delle correnti dello strato su un punto posto da un lato o dall'altro dello strato può essere rappresentato dall'azione di una immagine del sistema magnetico posto sul lato dove non si trova il punto, essendo questa immagine positiva o negativa a seconda che il punto si trovi dalla parte positiva o negativa dello strato.

661. Se lo strato ha una conducibilità infinita, $R = 0$, e il secondo termine della (20-24) è nullo, di modo che l'immagine rappresenta, in un momento qualunque, l'effetto delle correnti dello strato.

Nel caso di uno strato reale, la resistenza R ha un certo valore finito. L'immagine che si viene a descrivere non rappresenta quindi l'effetto delle correnti durante il primo istante che segue l'introduzione del sistema magnetico. Le correnti iniziano immediatamente a estinguersi, e tale effetto è esattamente raffigurato se si suppone che le due immagini si spostino dalla loro posizione iniziale, nel verso delle normali tracciate allo strato, con velocità costante R .

662. Siamo ora in grado di studiare il sistema delle correnti indotti nello strato da un sistema qualunque M di magneti o di elettromagneti posti sul lato positivo dello strato, la cui posizione e potenza variano in un modo qualunque.

Sia, come in precedenza, P' la funzione da cui si dedurrà l'azione diretta di questo sistema dalle (20-3, 20-9), ecc.; $\frac{dP'}{dt} \delta t$ sarà la funzione che corrisponde al sistema rappresentato da $\frac{dM}{dt} \delta t$. Questa quantità, che è l'aumento di M nel tempo δt , può pure essere vista come rappresentante un sistema magnetico.

Se supponiamo che al tempo t un'immagine positiva del sistema $\frac{dM}{dt} \delta t$ si formi sul lato negativo dello strato, l'azione magnetica esercitata da questa immagine su un punto qualunque posto sul lato negativo sarà equivalente all'azione delle correnti eccitate nello strato dal cambiamento di M , nel primo momento che segue tale cambiamento; e l'immagine continuerà ad essere equivalente alle correnti dello strato, se, non appena formata, inizia ad allontanarsi nel verso delle z negative con la velocità costante R .

Se supponiamo che a ognuno degli elementi successivi del temo si forma una simile immagine, la quale, non appena formata, inizia ad allontanarsi dallo strato con velocità R , arriviamo a pensare come una successione di immagini l'ultima delle quali è in via di formazione, mentre l'insieme delle altre si allontana dallo strato come un corpo invariabile, con velocità R .

663. Se P' è una funzione qualunque proveniente dall'azione di un sistema magnetico, si può trovare la funzione corrispondente P proveniente dalle correnti dello strato, con il metodo seguente che è l'espressione simbolica della teoria della successione delle immagini.

Sia P_τ il valore della funzione P proveniente da correnti dello strato, nel punto $[x, y, (z + R\tau)]$, e al tempo $t - \tau$; e sia P'_τ il valore della funzione P' dovuto al sistema magnetico nel punto $[x, y, -(x + R\tau)]$ e al tempo $t - \tau$. Allora

$$\frac{dP_\tau}{d\tau} = R \frac{dP_\tau}{dz} - \frac{dP_\tau}{dt} \quad (20.0.25)$$

e la (20-21) diviene

$$\frac{dP_\tau}{d\tau} = \frac{dP'_\tau}{dt} \quad (20.0.26)$$

e otteniamo per integrazione rispetto a τ da $\tau = 0$ a $\tau = \infty$,

$$P = - \int_0^\infty \frac{dP'_\tau}{dt} d\tau \quad (20.0.27)$$

valore della funzione P da cui ricaviamo tutte le proprietà dello strato di corrente per differenziazione, come nelle (20-3), (20-9), ...

664. Come esempio di questo metodo, consideriamo il caso di un polo magnetico isolato, di potenza unitaria, che si muove in linea retta con una velocità costante.

Siano le coordinate del polo al tempo t (342)

$$\xi = ut \quad \eta = 0 \quad \zeta = c + \mathfrak{w}t$$

Le coordinate dell'immagine del polo formato al tempo $t - \tau$ saranno

$$\xi = \mathfrak{u}(t - \tau) \quad \eta = 0 \quad \zeta = [c + \mathfrak{w}(t - \tau) + R\tau]$$

e, se r è la distanza di questa immagine dal punto (x, y, z)

$$r^2 = [x - \mathfrak{u}(t - \tau)]^2 + y^2 + [z + c + \mathfrak{w}(t - \tau) + R\tau]^2$$

Per ottenere il potenziale dovuto alla successione di immagini, dobbiamo calcolare

$$-\frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{d\tau}{r}$$

Se poniamo

$$Q^2 = \mathfrak{u}^2 + (R - \mathfrak{w})^2$$

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{r} = -\frac{1}{Q} \log [Qr + \mathfrak{u}(x - \mathfrak{u}\tau) + (R - \mathfrak{w})(z + c + \mathfrak{w}\tau)]$$

più un termine che è infinitamente grande, ma che si annulla quando si differenzia rispetto a t ; il valore di r , in questa espressione, essendo ottenuto ponendo $\tau = 0$ nell'espressione di r data in precedenza.

Differenziando questa espressione rispetto a t e ponendo $t = 0$, otteniamo il potenziale magnetico dovuto alla serie di immagini

$$\Omega = \frac{1}{Q} \frac{Q \frac{\mathfrak{w}(z+c) - \mathfrak{u}x}{r} - \mathfrak{u}^2 - \mathfrak{w}^2 + R\mathfrak{w}}{Qr + \mathfrak{u}x + (R - \mathfrak{w})(z + c)}$$

Differenziando questa espressione rispetto a x o z , otteniamo le componenti parallele a x o a z della forza magnetica in un punto qualunque; e, ponendo $x = 0, z = c, r = 2c$ in queste espressioni, otteniamo i valori seguenti della forza che agisce sul polo mobile stesso

$$X = \frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{u}}{Q + R - \mathfrak{w}} \left[1 + \frac{\mathfrak{w}}{Q} - \frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q + R - \mathfrak{w})} \right]$$

$$Z = \frac{1}{4c^2} \left[\frac{\mathfrak{w}}{Q} - \frac{u^2}{Q(Q+R-\mathfrak{w})} \right]$$

665. Dobbiamo ricordare che, in questa espressione, si suppone il movimento iniziato da un tempo infinito prima del momento considerato. Non dobbiamo così prendere per \mathfrak{w} una quantità positiva; poiché, in questo caso, il polo avrebbe dovuto attraversare lo strato dopo un tempo finito.

Se poniamo $u = 0$ e \mathfrak{w} negativo, $X = 0$, e

$$Z = \frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{w}}{R + \mathfrak{w}}$$

cioè che il polo è respinto dallo strato più si avvicina.

Se poniamo $\mathfrak{w} = 0$, troviamo $Q^2 = u^2 + R^2$,

$$X = -\frac{1}{4c^2} \frac{uR}{Q(Q+R)} \quad Z = \frac{1}{4c^2} \frac{u^2}{Q(Q+R)}$$

La componente X rappresenta una forza ritardatrice che agisce sul polo in verso contrario al suo moto proprio. R avendo un valore dato, X è massimo per $u = 1, 27R$.

Se lo strato non è conduttore, $R = \infty$ e $X = 0$.

Se lo strato è conduttore perfetto, $R = 0$ e $X = 0$.

La componente Z rappresenta una repulsione esercitata dallo strato sul polo. Essa aumenta con il crescere della velocità, e, al limite, diviene $\frac{1}{4c^2}$ quando la velocità è infinita. Essa ha lo stesso valore quando $R = 0$.

666. Se il polo magnetico si muove lungo una curva parallela allo strato, il calcolo diviene più complesso, ma è facile vedere che l'effetto della parte più vicina della successione di immagini è di produrre una forza che agisce sul polo in verso contrario al suo moto. L'effetto della parte della serie di immagini che segue immediatamente questa è analoga all'effetto di un magnete il cui asse è parallelo alla direzione nella quale si muove il polo qualche tempo prima. Poiché il polo di questo magnete il più vicino al polo mobile ha lo stesso nome di quello, la forza sarà formata in parte da una repulsione, in parte da una forza parallela alla direzione anteriore del moto, ma di verso contrario. Quest'ultima forza può essere scomposta in una forza ritardatrice e una forza diretta verso la concavità della traiettoria del polo mobile.

667. Questo studio ci permette di trattare il caso in cui le correnti non potrebbero formarsi completamente, poiché la superficie conduttrice sarebbe discontinua, o limitata.

Ma è facile vedere che, se il polo si muove parallelamente al bordo dello strato, le correnti saranno indebolite dal lato più vicino al bordo. Pertanto le forze dovute a queste correnti saranno minori, e non solo la forza ritardatrice sarà inferiore, ma anche, siccome la forza repulsiva è minore dal lato del bordo, il polo mobile sarà attratto verso il bordo dello strato.

Teoria del disco ruotante di Arago

668. Arago³ ha scoperto che un magnete posto vicino a un disco metallico, dotato di moto di rotazione, è sottoposta a una forza che tende a fargli seguire il moto del disco, e questo, sebbene non si eserciti alcuna azione tra il magnete e il disco quando quest'ultimo è a riposo.

Si attribuì questa azione del disco ruotante a un nuovo tipo di magnetizzazione indotta, fino al giorno in cui Faraday⁴ lo spiegò con l'effetto di correnti elettriche indotte nel disco in virtù del suo moto nel campo di forza magnetico.

³*Annales de Chimie et de Physique*, 1826.

⁴*Exp, Res.*, 81.

Per determinare la distribuzione di queste correnti indotte e il loro effetto sul magnete, ci potremo servire dei risultati già ottenuti per uno strato conduttore a riposo sottoposto all'azione di un magnete mobile, utilizzando il metodo dato al § 600 per trattare le equazioni elettromagnetiche riferite sistemi di assi mobili. Ma, siccome questo caso ha una importanza particolare, lo tratteremo direttamente, supponendo dapprima che i poli del magnete siano molto lontani dai bordi del disco perché si possa non tener conto del fatto che lo strato conduttore ha una estensione limitata.

Impiegando le stesse notazioni dei paragrafi precedenti (§ 656-667), troviamo per le componenti della forza elettromotrice parallelamente a x e a y

$$\begin{cases} \sigma u &= \gamma \frac{dy}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ \sigma v &= -\gamma \frac{dx}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \end{cases} \quad (20.028)$$

dove γ è la componente della forza magnetica normalmente al disco.

Se esprimiamo u e v per mezzo della funzione di corrente ϕ ,

$$u = \frac{d\phi}{dy} \quad v = -\frac{d\phi}{dx} \quad (20.029)$$

e se il disco ruota attorno all'asse z con la velocità angolare ω

$$\frac{dy}{dt} = \omega x \quad \frac{dx}{dt} = -\omega y \quad (20.030)$$

Sostituendo questi valori nella (20-28), troviamo

$$\sigma \frac{d\phi}{dy} = \gamma \omega x - \frac{d\psi}{dx} \quad (20.031)$$

$$-\sigma \frac{d\phi}{dx} = \gamma \omega y - \frac{d\psi}{dy} \quad (20.032)$$

Moltiplicando la (20-31) per x e la (20-32) per y , e sommando, otteniamo

$$\sigma \left(x \frac{d\phi}{dy} - y \frac{d\phi}{dx} \right) = \gamma \omega (x^2 + y^2) - \left(x \frac{d\psi}{dx} + y \frac{d\psi}{dy} \right) \quad (20.033)$$

Moltiplicando la (20-31) per y e la (20-32) per $-x$ e sommando, otteniamo

$$\sigma \left(x \frac{d\phi}{dx} + y \frac{d\phi}{dy} \right) = x \frac{d\psi}{dy} - y \frac{d\psi}{dx} \quad (20.034)$$

Se ora esprimiamo queste equazioni in funzione di r e di θ , dove

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (20.035)$$

esse divengono

$$\sigma \frac{d\phi}{d\theta} = \gamma \omega r^2 - r \frac{d\psi}{dr} \quad (20.036)$$

$$\sigma r \frac{d\phi}{dr} = \frac{d\psi}{d\theta} \quad (20.037)$$

La (20-36) è soddisfatta se, prendendo una funzione qualunque χ di r e di θ , poniamo

$$\phi = \frac{d\chi}{d\theta} \quad (20.038)$$

$$\psi = \sigma r \frac{d\chi}{dr} \quad (20.039)$$

Sostituendo questi valori nella (20-36), diviene

$$\sigma \left(\frac{d^2\chi}{d\theta^2} + r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) \right) = \gamma \omega r^2 \quad (20.0.40)$$

Dividendo per σr^2 e ritornando alle coordinate x e y , questa equazione diviene

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} = \frac{\omega}{\sigma} \gamma \quad (20.0.41)$$

Questa è l'equazione fondamentale della teoria, ed esprime la relazione tra la funzione χ e la componente γ della forza magnetica normalmente al disco.

Sia, in un punto qualunque della faccia positiva del disco, Q il potenziale dovuto a una materia fittizia distribuita sul disco con la densità superficiale γ .

Alla superficie del disco

$$\frac{dQ}{dz} = -2\pi\chi \quad (20.0.42)$$

Pertanto il primo membro della (20-41) diviene

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} \right) \quad (20.0.43)$$

Ma poiché Q soddisfa l'equazione di Laplace in tutti i punti esterni al disco

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} = -\frac{d^2Q}{dz^2} \quad (20.0.44)$$

e la (20-41) diviene

$$\frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^3Q}{dz^3} = \omega\gamma \quad (20.0.45)$$

Analogamente, poiché Q è il potenziale dovuto alla distribuzione χ , il potenziale dovuto alla distribuzione ϕ , o $\frac{d\chi}{d\theta}$, sarà $\frac{dQ}{d\theta}$. Da ciò ricaviamo, per il potenziale magnetico dovuto alle correnti del disco,

$$\Omega_1 = -\frac{d^2Q}{d\theta dz} \quad (20.0.46)$$

e per la componente della forza magnetica normale al disco dovuto alle correnti

$$\gamma_1 = \frac{d\Omega}{dz} = \frac{d^3Q}{d\theta dz^2} \quad (20.0.47)$$

Se Ω_2 è il potenziale magnetico dovuto ai magneti esterni, e se scriviamo

$$P = -\int \Omega_2 dz \quad (20.0.48)$$

la componente della forza magnetica normale al disco dovuta ai magneti sarà

$$\gamma_2 = \frac{d^2P}{dz^2} \quad (20.0.49)$$

Possiamo ora scrivere la (20-45), ricordando che

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 \\ \frac{\sigma}{2\pi} \frac{d^3Q}{dz^3} - \omega \frac{d^3Q}{d\theta dz^2} &= \omega \frac{d^2P}{dz^2} \end{aligned} \quad (20.0.50)$$

Integrando due volte rispetto a z e ponendo $z = \frac{\sigma}{2\pi}$

$$\left(R \frac{d}{dz} - \omega \frac{d}{d\theta} \right) Q = \omega P \quad (20.051)$$

Se i valori di P e Q sono espressi in funzione della distanza r dall'asse del disco, e se ξ e ζ sono nuove variabili, tali che

$$2\xi = z + \frac{R}{\omega}\theta \quad 2\zeta = z - \frac{R}{\omega}\theta \quad (20.052)$$

la (20-51) diviene, per integrazione rispetto a $zeta$

$$Q = \int \frac{\omega}{R} P d\zeta \quad (20.053)$$

669. Se si applica a questa espressione il metodo del § 662, la sua forma mostra che l'azione magnetica delle correnti indotte nel disco equivale all'azione di una serie di immagini del sistema magnetico disposte a forma di elica.

Se il sistema magnetico è formato da un solo polo magnetico della potenza uguale all'unità, l'elica è tracciata sul cilindro avente come asse l'asse del disco, e passante per il polo magnetico. L'elica inizia nel punto in cui si trova l'immagine ottica del polo nel disco. La distanza, parallelamente all'asse delle due spire consecutive dell'elica, è $2\pi \frac{R}{\omega}$. L'effetto magnetico della serie di immagini è lo stesso che se l'elica fosse stata magnetizzata in tutti i suoi punti lungo la direzione della tangente tracciata al cilindro perpendicolarmente al suo asse, e con una intensità tale che il momento magnetico di un piccolo arco sia numericamente uguale alla lunghezza della proiezione di questo arco sul disco.

Sarebbe più facile calcolare l'effetto prodotto sul polo magnetico, ma è facile vedere che questo effetto consiste in:

- 1° Una forza che lo tira parallelamente alla direzione del moto del disco;
- 2° Una forza repulsiva tendente ad allontanarlo dal disco;
- 3° Una forza diretta verso l'asse del disco.

Se il polo è vicino al bordo del disco, questa forza può essere superata dalla forza che spinge il polo verso il polo del disco e la cui origine è stata indicata al § 667.

Arago aveva osservato l'esistenza di tutte queste forze e le aveva descritte negli *Annales de Chimie et de Physique* del 1826. (Si veda anche Felici, negli *Annali di Tortolini*, t. IV, p. 173 (1853) e t. V. p. 35; e E. Jochmann, nel *Journal de Crelle*, t. 63, p. 158 e p. 329; e *Pogg Ann.* t. CXXII, p. 224 (1864). In queste ultime si presentano le equazioni necessarie per determinare l'induzione delle correnti su se stesse, ma si trascura questa parte dell'azione nei calcoli che seguono. Il metodo di immagini che è qui indicato è stato pubblicato nei *Proceedings of the Royal Society*, 15 febbraio 1872.

Strato superficiale di corrente sferico

670. Sia ϕ la funzione di corrente in un punto qualsiasi dello strato di corrente sferico e sia P il potenziale in un punto dato, dovuto a uno strato di materia fittizia distribuita sulla superficie della sfera con la densità superficiale ϕ ; si chiede di trovare in funzione di P il potenziale magnetico e il potenziale vettore dello strato di correnti.

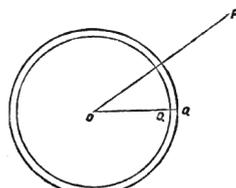


Fig. 39.

Siano a il raggio della sfera; r la distanza dal punto dato; p l'inverso della distanza dal punto dato al punto Q della sfera, per la quale la funzione di corrente è ϕ .

L'azione dello strato di corrente su un punto che non fa parte della sua massa è identica a quella di un foglio magnetico la cui potenza in un punto qualsiasi è numericamente uguale alla funzione di corrente.

Il potenziale reciproco del foglio e di un polo di forza uguale all'unità, posto nel punto P , è, dal § 410,

$$\Omega = \iint \phi \frac{dp}{da} dS$$

Poiché p è una funzione omogenea di grado -1 in r e a ,

$$a \frac{dp}{da} + r \frac{dp}{dr} = -p$$

o

$$\frac{dp}{da} = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr} (pr)$$

e

$$\Omega = - \iint \frac{\phi}{a} \frac{d}{dr} (pr) dS$$

Poiché r e a sono costanti sull'intera superficie di integrazione

$$\Omega = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr} \left(r \iint \phi p dS \right)$$

Ma se P è il potenziale dovuto a uno strato di materia immaginaria di densità superficiale ϕ

$$P = \iint \phi p dS$$

e Ω , il potenziale magnetico dello strato di corrente, può essere espresso in termini di P nella forma

$$\Omega = -\frac{1}{a} \frac{d}{dr} (pr)$$

671. Possiamo determinare F , la componente lungo l'asse x del potenziale vettore, dall'espressione data al § 416,

$$F = \iint \phi \left(m \frac{dp}{d\zeta} - n \frac{dp}{d\eta} \right) dS$$

dove ξ, η, ζ sono le coordinate dell'elemento dS , e l, m, n sono i coseni direttore della normale.

Poiché lo strato è una sfera, i coseni direttori della normale sono

$$k \frac{\xi}{a} \quad m = \frac{\eta}{a} \quad n = \frac{\zeta}{a}$$

Ma

$$\frac{dp}{d\zeta} = (z - \zeta) p^3 = -\frac{dp}{dz}$$

e

$$\frac{dp}{d\eta} = (y - \eta) p^3 = -\frac{dp}{dy}$$

cosicché

$$m \frac{dp}{d\zeta} - n \frac{dp}{d\eta} = [n(z - \zeta) - \zeta(y - \eta)] \frac{p^3}{a} = [z(\eta - y) - y(\zeta - z)] \frac{p^3}{a} = \frac{z}{a} \frac{dp}{dy} - \frac{y}{a} \frac{dp}{dz}$$

moltiplicando per ϕdS e integrando sulla superficie della sfera, troviamo

$$F = \frac{z dP}{a dy} - \frac{y dP}{a dz}$$

Analogamente

$$G = \frac{x dP}{a dz} - \frac{z dP}{a dx}$$

$$H = \frac{y dP}{a dx} - \frac{x dP}{a dy}$$

Il vettore \mathfrak{A} , le cui componenti sono F, G, H , è evidentemente perpendicolare al raggio vettore r , e al vettore le cui componenti sono $\frac{dP}{dx}, \frac{dP}{dy}, \frac{dP}{dz}$. Se determiniamo le linee di intersezione della superficie sferica di raggio r con la serie di superfici equipotenziali corrispondenti a dei valori di P in progressione aritmetica, queste linee indicano con la loro direzione e con il loro avvicinamento la grandezza del vettore \mathfrak{A} .

Nel linguaggio dei quaternioni

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a} V \rho \nabla P$$

672. Se ammettiamo che il valore di P all'interno della sfera sia

$$P = A \left(\frac{r}{a} \right)^i Y_i$$

dove Y_i è l'armonica sferica di grado i , allora all'esterno della sfera

$$P' = A \left(\frac{r}{a} \right)^{i+1} Y_i$$

La funzione di corrente ϕ è

$$\phi = \frac{2i+1}{4\pi} \frac{1}{a} A Y_i$$

Il potenziale magnetico dentro la sfera è

$$\Omega = -(i+1) \frac{1}{a} A \left(\frac{r}{a} \right)^i Y_i$$

e all'esterno

$$\Omega' = i \frac{1}{a} A \left(\frac{r}{a} \right)^{i+1} Y_i$$

Supponiamo, per esempio, che si chieda di produrre, per mezzo di un filo a forma di strato sferico, un campo di forza magnetica M uniforme all'interno della sfera. In questo caso, il potenziale magnetico, all'interno della sfera, è un'armonica solida di primo grado, della forma

$$\Omega = -Mr \cos \theta$$

essendo M la forza magnetica. Pertanto $A = \frac{1}{2} a^2 M$, e

$$\phi = \frac{3}{8\pi} M a \cos \theta$$

Pertanto la funzione di corrente è proporzionale alla distanza dal piano equatoriale della sfera, e, di conseguenza, il numero di avvolgimenti del filo, compresi tra due piccoli cerchi, deve essere proporzionale alla distanza dei piani di questi cerchi.

Se N è il numero totale degli avvolgimenti, e se γ è l'intensità di corrente in ogni avvolgimento,

$$\phi = \frac{1}{2} N \gamma \cos \theta$$

Pertanto la forza magnetica all'interno della bobina, è

$$M = \frac{4\pi}{3} \frac{N\gamma}{a}$$

673. Cercheremo ora quale dovrebbe essere il modo di avvolgimento del filo per produrre, all'interno della sfera, un potenziale magnetico della forma di un'armonica solida zonale di secondo grado.

$$\Omega = -3 \frac{1}{a} A \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

Quindi

$$\phi = \frac{5}{4\pi} \frac{A}{a} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

Se il numero totale degli avvolgimenti è N , quello compreso tra il polo e la distanza polare θ è

$$\frac{1}{2} N \sin^2 \theta$$

È alla latitudine di 45° che gli avvolgimenti sono più ravvicinati. All'equatore il verso dell'avvolgimento cambia, e, nell'altro emisfero, i fili sono avvolti in senso contrario.

Sia γ l'intensità di corrente nel filo: all'interno dello strato

$$\Omega = -\frac{4}{5} \pi N \gamma \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

Consideriamo ora un conduttore a forma di curva piana chiusa qualsiasi, posto in un punto qualunque all'interno dello strato, di modo che il suo piano sia perpendicolare all'asse. Per determinare il suo coefficiente di induzione, dobbiamo trovare l'integrale di superficie di $-\frac{d\Omega}{dz}$ per l'area del piano delimitata dalla curva, ponendo $\gamma = 1$.

Ora

$$\Omega = -\frac{4\pi}{5a^2} N \left[z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right]$$

e

$$-\frac{d\Omega}{dz} = \frac{8\pi}{5a^2} N z$$

Se quindi S è l'area della curva chiusa, il suo coefficiente di induzione è

$$M = \frac{8\pi}{5a^2} N S z$$

Se la corrente in questo conduttore è γ' , vi sarà, dal § 583, una forza Z , che spinge nel verso di z

$$Z = \gamma \gamma' \frac{dM}{dz} = \frac{8\pi}{5a^2} N S \gamma \gamma'$$

e, poiché questa è indipendente da x, y, z , la forza è la stessa, qualunque sia la posizione del circuito all'interno della sfera.

674. Il metodo dato da Poisson e indicato al § 437 si può applicare agli strati superficiali di corrente, sostituendo al corpo che si suppone magnetizzato uniformemente nella direzione delle

z , con l'intensità I , uno strato di corrente avente la stessa forma e per il quale la funzione di corrente è

$$\phi = Iz \quad (20.0.54)$$

Le correnti dello strato saranno comprese in piani paralleli allo xy , e l'intensità di corrente che circola in un ramo di spessore dz è $I dz$.

Il potenziale magnetico dovuto a questo strato di corrente è, in un punto qualunque esterno

$$\Omega = -I \frac{dV}{dz} \quad (20.0.55)$$

In un punto interno è

$$\Omega = -4\pi Iz - I \frac{dV}{dz} \quad (20.0.56)$$

Le componenti del potenziale vettore sono

$$F = I \frac{dV}{dy} \quad G = -I \frac{dV}{dx} \quad H = 0 \quad (20.0.57)$$

Questi risultati sono applicabili a numerosi casi pratici.

675. 1° Un circuito elettrico piano di forma qualsiasi: sia V il potenziale dovuto a uno strato superficiale di corrente piano, di densità superficiale uguale all'unità; se a questo strato sostituiamo un foglio magnetico di potenza I , o una corrente elettrica di intensità I lungo il contorno dello strato, i valori di Q, F, G, H sono quelli dati in precedenza.

2° Per una sfera piena di raggio a

$$V = \frac{4\pi a^3}{3r} \quad r > a \quad (20.0.58)$$

$$V = \frac{2}{3}(3a^2 - r^2) \quad r < a \quad (20.0.59)$$

Se quindi una simile sfera è magnetizzata parallelamente alle z con una intensità I , il potenziale magnetico è

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} I \frac{a^3}{r^3} z \quad \text{esterno alla sfera} \quad (20.0.60)$$

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} Iz \quad \text{interno alla sfera} \quad (20.0.61)$$

Se, invece di essere magnetizzata, la sfera è ricoperta dal filo avvolto in cerchi equidistanti, l'intensità totale della corrente compresa tra due piccoli cerchi i cui piani sono all'unità di distanza, essendo I , il valore di Ω all'esterno della sfera è lo stesso di prima; ma, all'interno della sfera

$$\Omega = -\frac{8}{3}\pi Iz \quad (20.0.62)$$

È il caso già discusso al § 672.

3° Il caso di un ellissoide uniformemente magnetizzato, parallelamente a una linea data, è stato discusso al § 437.

Se l'ellissoide è ricoperto da filo avvolto lungo piani paralleli ed equidistanti, la forza magnetica all'interno dell'ellissoide è uniforme.

4° Magnete cilindrico o solenoide

676. Se il corpo è un cilindro avente una sezione di forma qualsiasi, e limitato da piani perpendicolari alle sue generatrici; se V_1 è il potenziale nel punto (x, y, z) dovuto a un'area piana di densità superficiale uguale all'unità coincidente con l'estremità positiva del solenoide, e se V_2 è il potenziale nello stesso punto dovuto a un'area piana di densità superficiale uguale all'unità coincidente con l'estremità negativa; se infine il cilindro ha una magnetizzazione uniforme e longitudinale uguale all'unità: il potenziale nel punto (x, y, z) è

$$\Omega = V_1 - V_2 \quad (20.0.63)$$

Se, invece di essere magnetizzato, il cilindro è uniformemente ricoperto dal filo, in modo che si abbiano n avvolgimenti per unità di lunghezza, e se una corrente γ passa in questo filo, il potenziale magnetico esterno al solenoide è, come prima,

$$\Omega = n\gamma (V_1 - V_2) \quad (20.0.64)$$

ma, all'interno dello spazio limitato dal solenoide e dalle sue estremità piane,

$$\Omega = n\gamma (-4\pi z + V_1 - V_2) \quad (20.0.65)$$

Il potenziale magnetico è discontinuo alle estremità piane del solenoide, ma la forza magnetica è continua.

Supponiamo che le distanze r_1 e r_2 dal punto (x, y, z) ai centri d'inerzia delle due estremità piane del solenoide siano molto grandi, rispetto alle dimensioni trasversali di questo solenoide, possiamo scrivere

$$V_1 = \frac{A}{r_1} \quad V_2 = \frac{A}{r_2} \quad (20.0.66)$$

dove A è l'area di due sezioni.

La forza magnetica esterna al solenoide è quindi molto piccola, e, all'interno, la forza si avvicina a una forza parallela all'asse, diretta nel verso positivo e uguale a $4\pi n\gamma$.

Se la sezione del solenoide è un cerchio di raggio a , i valori di V_1 e V_2 si possono esprimere con le serie armoniche sferiche date da Thomson e Tait (*Natural Philosophy*, § 540, Ex. II).

$$V = 2\pi \left\{ -rP_1 + a + \frac{1}{2} \frac{r^2}{a} P_2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{r^4}{a^3} P_4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{r^6}{a^5} P_6 + \dots \right\} \quad r < a \quad (20.0.67)$$

$$V = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{a^4}{r^3} P_2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{a^6}{r^5} P_4 - \dots \right\} \quad r > a \quad (20.0.68)$$

In queste espressioni r è la distanza dal punto (x, y, z) al centro di una delle estremità circolari del solenoide, e le armoniche zonali P_1, P_2, \dots sono quelle che corrispondono all'angolo θ che r forma con l'asse del cilindro.

La prima di queste espressioni è discontinua quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, ma dobbiamo ricordare che all'interno del solenoide dobbiamo aggiungere alla forza magnetica dedotta da questa espressione una forza longitudinale $4\pi n\gamma$.

677. Consideriamo ora un solenoide di lunghezza tale che nella parte dello spazio considerata, si possano trascurare i termini che dipendono dalla distanza dalle estremità.

L'induzione magnetica attraverso una curva chiusa, tracciata all'interno del solenoide, è

$$4\pi n\gamma A'$$

dove A' è l'area della proiezione di questa curva su un piano normale all'asse del solenoide.

Se la curva chiusa è esterna al solenoide, e lo circonda, l'induzione magnetica attraverso di essa è

$$4\pi n\gamma A$$

dove A è l'area della sezione del solenoide. Se la curva chiusa non circonda il solenoide, l'induzione magnetica attraverso di essa è nulla.

Se un filo è avvolto n' volte attorno al solenoide, il coefficiente di induzione tra esso e il solenoide è

$$M = 4\pi n n' A \quad (20.0.69)$$

Supponendo che questi n' avvolgimenti coincidano con n avvolgimenti del solenoide, troviamo che il coefficiente di autoinduzione, per l'unità di lunghezza di un solenoide preso a una distanza sufficiente dalle estremità, è

$$L = 4\pi n^2 A \quad (20.0.70)$$

Vicino alle estremità del solenoide, dobbiamo tener conto dei termini che dipendono dalla distribuzione immaginaria del magnetismo sulle estremità piane del solenoide. L'effetto di questi termini è di ridurre il coefficiente di induzione tra un solenoide e un circuito a un valore minore di $4\pi n A$ che esso assume quando il circuito circonda un solenoide molto lungo, a una grande distanza dalle sue estremità.

Consideriamo il caso di due solenoidi circolari, dello stesso asse, e delle stessa lunghezza l . Sia c_1 il raggio del solenoide esterno; supponiamolo formato da un filo tale che abbia n_1 avvolgimenti per unità di lunghezza; sia c_2 il raggio del solenoide interno, e sia n_2 il numero dei suoi avvolgimenti per unità di lunghezza. Il coefficiente di induzione tra i due solenoidi sarà, trascurando l'effetto delle estremità

$$M = Gg \quad (20.0.71)$$

dove

$$G = 4\pi n_1 \quad (20.0.72)$$

e

$$g = \pi c_2^2 l n_2 \quad (20.0.73)$$

678. Per determinare l'effetto dell'estremità positiva dei solenoidi, dobbiamo calcolare il coefficiente di induzione sul solenoide esterno al disco circolare che forma l'estremità del solenoide interno.

A questo scopo, prendiamo la seconda espressione di V_1 , data dalla (20-68), e differenziamola rispetto a r . Ciò ci dà la forza magnetica nel direzione del raggio. Moltiplichiamo allora per $2\pi r^2 d\mu$, e integriamola, rispetto a μ , da $\mu = 1$ a $\mu = \frac{z}{\sqrt{z^2 + c_1^2}}$. Ciò fornisce il coefficiente di induzione per un solo avvolgimento del filo del solenoide esterno posto a una distanza z dall'estremità positiva. Moltiplichiamo quindi per $n_1 n_2$ e abbiamo così l'effetto che ha una delle estremità per diminuire il coefficiente di induzione.

Troviamo così, per valore del mutuo coefficiente di induzione di due cilindri,

$$M = 4\pi^2 n_1 n_2 c_2^2 (l - 2c_1\alpha) \quad (20.0.74)$$

dove

$$a = \frac{1}{2} \frac{c_1 + l - r}{c_1} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(1 - \frac{c_1^3}{r_1^3}\right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} \frac{c_2^4}{c_1^4} \left(-\frac{1}{2} - 2\frac{c_1^5}{r_1^5} + \frac{5}{2} \frac{c_1^7}{r_1^7}\right) + \dots \quad (20.0.75)$$

dove, per abbreviare, si è posto r per $\sqrt{l^2 + c_1^2}$.

Da ciò risulta che, quando si calcola l'induzione reciproca di due solenoidi dello stesso asse, si deve sostituire, nella (20-73), la vera lunghezza l con la lunghezza corretta $l - 2c_1\alpha$ come

si è supponeva togliere a ogni parte una lunghezza uguale a ac_1 . Se il solenoide è molto lungo rispetto al suo raggio esterno,

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{128} \frac{c_2^4}{c_1^4} + \dots \quad (20.076)$$

679. Quando un solenoide è formato da un certo numero di strati di un filo con n strati per unità di lunghezza, il numero degli strati compresi nello spessore dr è ndr , e abbiamo

$$G = 4\pi \int n^2 dr \quad g = \pi l \int n^2 r^2 dr \quad (20.077)$$

Se lo spessore del filo è costante, e se l'induzione si produce tra una bobina esterna, i cui raggi esterno e interno sono x e y , e una bobina interna, i cui raggi esterno e interno sono y e z , si ha, trascurando l'effetto alle estremità

$$Gg = \frac{4}{3} \pi^2 l n_1^2 n_2^2 (x - y) (y^3 - z^3) \quad (20.078)$$

Affinché questa espressione sia massima, dati x e z e con y variabile, bisogna che

$$x = \frac{4}{3}y - \frac{1}{3} \frac{z^3}{y^2} \quad (20.079)$$

Questa equazione dà la relazione più vantaggiosa tra gli spessori della bobina primaria e secondaria di una bobina di induzione senza nucleo di ferro.

Se vi è un nucleo di ferro di raggio z , G rimane quello precedente, ma

$$g = \pi l \int n^2 (r^2 + 4\pi\kappa z^2) dr = \quad (20.080)$$

$$= \pi l n^2 \left[\frac{y^3 - z^3}{3} + 4\pi\kappa z^2 (y - z) \right] \quad (20.081)$$

Se y è dato, il valore di z che dà il massimo valore di g è

$$z = \frac{2}{3}y \frac{18\pi\kappa}{18\pi\kappa + 1} \quad (20.082)$$

Quando, come nel caso del ferro, κ è grande, $z \cong \frac{2}{3}y$.

S, ora, facendo x costante, rendiamo y e z variabili, otteniamo il valore massimo di Gg quando

$$x : y : z = 4 : 3 : 2 \quad (20.083)$$

Il coefficiente di autoinduzione di un lungo solenoide, i cui raggi esterno e interno sono x e y e dotato di un lungo nucleo di ferro di raggio z , è, per unità di lunghezza,

$$4\pi \int_x^y \left\{ \pi l \int_\rho^x n^2 (\rho^2 + 4\pi\kappa z^2) dr + \pi l \int_y^\rho n^2 (r^2 + 4\pi\kappa z^2) dr \right\} n^2 d\rho = \quad (20.084)$$

$$= \frac{2}{3} \pi^2 l n^4 (x - y)^2 (x^2 + 2xy + 3y^2 + 24\pi\kappa z^2)$$

680. Finora abbiamo supposto che il filo avesse uno spessore uniforme. Determineremo ora la legge secondo la quale lo spessore deve variare nei diversi strati affinché, per una resistenza data della bobina primaria o di quella secondaria, il coefficiente di mutua induzione sia massimo.

Sia ρn^2 la resistenza dell'unità di lunghezza di un filo, tale che n dei suoi avvolgimenti occupino l'unità di lunghezza sul solenoide.

La resistenza dell'intero solenoide è

$$R = 2\pi l \int n^4 r dr \quad (20.0.85)$$

La condizione che dà il massimo di G per un valore dato di R è

$$\frac{dG}{dr} = C \frac{dR}{dr}$$

dove C è una costante.

Ciò che da n^2 proporzionale a $\frac{1}{r}$, ossia il diametro del filo della bobina esterna, deve essere proporzionale alla radice quadrata del raggio.

Affinché, per un valore dato di R , g sia massimo

$$n^2 = C \left(r + \frac{41\pi\kappa z^2}{r} \right) \quad (20.0.86)$$

Pertanto, in assenza del nucleo di ferro, il diametro del filo della bobina esterna deve essere in ragione inversa della radice quadrata del raggio; ma, in presenza di un nucleo di ferro avente una capacità di magnetizzazione considerevole, il diametro del filo deve essere più che direttamente proporzionale alla radice quadrata del raggio dello strato.

Solenoide senza fine

681. Il solido generato dalla rotazione di un'area piana attorno a un asse posto nel suo piano e che non si incontrano ha la forma di un anello. Se, attorno a questo anello, si avvolge del filo in modo che gli avvolgimenti siano in piani passanti per l'asse dell'anello, e che n sia il numero totale degli avvolgimenti, la funzione di corrente ϕ dello strato del filo è

$$\phi = \frac{1}{2\pi} n \gamma \theta$$

dove ϕ è l'azimut rispetto all'asse dell'anello.

Se Ω è il potenziale magnetico all'interno dell'anello, e Ω' il potenziale all'esterno,

$$\Omega - \Omega' = -4\pi\phi + C = -2n\gamma\theta + C$$

All'esterno dell'anello, Ω' deve soddisfare all'equazione di Laplace e annullarsi a una distanza infinita. D'altra parte, dalla natura del problema, questa deve essere una funzione di θ soltanto. Il solo valore di Ω' che soddisfa a queste condizioni è zero. Pertanto

$$\Omega' = 0 \quad \Omega = -2n\gamma\theta + C$$

La forza magnetica in ogni punto dentro l'anello è perpendicolare al piano che passa per l'asse e uguale a $2n\gamma\frac{1}{r}$ dove r è la distanza dall'asse. Esternamente all'anello, non vi è forza magnetica.

Se la forma di una curva chiusa è data dalle coordinate z, r, θ del punto che la descrive, espresse in funzione della lunghezza s dell'arco di curva contato a partire da un punto fisso, l'induzione magnetica attraverso questa curva chiusa si può ottenere integrando lungo la curva il potenziale vettore le cui componenti sono

$$F = \frac{xz}{r^2} \quad G = \frac{yz}{r^2} \quad H = 0$$

Troviamo allora

$$2n\gamma \int_0^s \frac{z}{r} \frac{dr}{ds} ds$$

preso lungo la curva, purché essa si trovi compresa interamente all'interno dell'anello.

Se la curva è tutta all'esterno dell'anello, ma lo circonda, l'induzione magnetica attraverso questa curva è

$$2\pi\gamma \int_0^{s'} \frac{z'}{r'} \frac{dr'}{ds'} ds' = 2n\gamma\alpha$$

dove le coordinate accentate non si riferiscono più alla curva chiusa, ma a un avvolgimento del filo del solenoide.

Pertanto, l'induzione magnetica attraverso una curva chiusa qualsiasi, che circonda l'anello, è costante e uguale a $2n\gamma\alpha$, dove α è la quantità lineare $\int_0^{s'} \frac{z'}{r'} \frac{dr'}{ds'} ds'$. Infine l'induzione magnetica attraverso una curva chiusa che non circonda l'anello è nulla.

Sia un secondo filo avvolto in un modo qualunque attorno all'anello, senza essere forzatamente a contatto con esso, e che lo circonda n' volte; l'induzione attraverso questo filo è $2nn'\gamma\alpha$ e, di conseguenza, il coefficiente di induzione di una delle bobine sull'altra è

$$M = 2nn'\alpha$$

Poiché è completamente indipendente dalla forma o dalla posizione particolare del secondo filo, se i fili fossero attraversati da una corrente elettrica, non sarebbero sottoposti ad alcuna forza meccanica agente su di essi. Facendo coincidere il secondo filo con il primo, otteniamo per coefficiente di auto-induzione della bobina anulare

$$L = 2n^2\alpha$$

21 Correnti parallele

Conduttori cilindrici

682. In una classe molto importante di strumenti elettrici, la corrente circola in fili di sezione circolare pressoché uniforme, che talvolta sono rettilinei e talvolta curvi in modo che il raggio di curvatura del loro asse è molto grande rispetto al raggio della loro sezione trasversale. Per permetterci di trattare con il calcolo simili sistemi, inizieremo con il caso di due conduttori paralleli molto lunghi collegati alle loro estremità, e porteremo la nostra attenzione solo su una parte del circuito molto lontana dalle estremità dei conduttori, purché non vi siano cambiamenti osservabili nella distribuzione della forza risultante per il fatto che i conduttori non sono infinitamente lunghi.

Assumiamo l'asse z parallelo alla direzione dei conduttori, e allora, grazie alla simmetria del sistema nella parte del campo considerata, tutto dipenderà dalla componente H del potenziale vettore parallelamente all'asse z .

Le componenti dell'induzione magnetica divengono, dalle equazioni (A),

$$a = \frac{dH}{dy} \quad (21.0.1)$$

$$b = -\frac{dH}{dx} \quad (21.0.2)$$
$$c = 0$$

Per maggiore generalità, supporremo che il coefficiente di induzione magnetica sia μ , di modo che $a = \mu\alpha$ e $b = \mu\beta$, dove α e β sono le componenti della forza magnetica.

Le equazioni delle correnti elettriche (E) (§ 607) danno

$$u = 0 \quad v = 0 \quad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \quad (21.0.3)$$

683. Se l'intensità è una funzione della distanza r dall'asse z e se poniamo

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (21.0.4)$$

indicando con β la forza magnetica nella direzione dove è misurato θ , perpendicolarmente al piano passante per l'asse z , abbiamo

$$4\pi w = \frac{d\beta}{dr} + \frac{1}{r}\beta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\beta r) \quad (21.0.5)$$

Se C è la corrente totale che passa per una sezione limitata nel piano xy da un cerchio di raggio r avente centro nell'origine

$$C = \int_0^r 2\pi r w dr = \frac{1}{2}\beta r \quad (21.0.6)$$

Si vede quindi che in un punto dato la forza magnetica, dovuta a una corrente disposta in strati cilindrici aventi l'asse z come asse comune, dipende solo dall'intensità totale della corrente

che passa negli strati compresi tra l'asse e il punto dato, e non dalla ripartizione della corrente tra i diversi strati cilindrici. (Si veda la Nota I al termine di questo Capitolo).

Per esempio, essendo il conduttore un filo uniforme di raggio a , e l'intensità totale di corrente che lo attraversa C , se la corrente è ripartita uniformemente tra tutte le parti della sezione, w sarà costante e

$$C = \pi w a^2 \quad (21.0.7)$$

La corrente che attraversa una sezione circolare di raggio r , con $r < a$, è $C' = \pi w r^2$. Pertanto, in un punto interno del filo,

$$\beta = \frac{2C'}{r} = 2C \frac{r}{a^2} \quad (21.0.8)$$

All'esterno del filo,

$$\beta = \frac{2C}{r} \quad (21.0.9)$$

Nella massa del filo, non vi è potenziale magnetico; poiché, all'interno di un conduttore attraversato da una corrente elettrica, la forza magnetica non soddisfa la condizione di derivare da un potenziale.

Al di fuori del filo, il potenziale magnetico è

$$\Omega = -2C\theta \quad (21.0.10)$$

Supponiamo che invece di essere un filo conduttore sia un tubo di metallo con raggi esterno e interno rispettivamente a_1 e a_2 ; allora, se C è la corrente che passa nel conduttore tubolare

$$C = \pi w (a_1^2 - a_2^2) \quad (21.0.11)$$

La forza magnetica dentro il tubo è nulla. Nel metallo del tubo, dove r è tra a_1 e a_2 ,

$$\beta = 2C \frac{1}{a_1^2 - a_2^2} \left(r - \frac{a_2^2}{r} \right) \quad (21.0.12)$$

e all'esterno del tubo

$$\beta = 2 \frac{C}{r} \quad (21.0.13)$$

come se la corrente passasse in un filo pieno.

684. L'induzione magnetica in un punto qualunque è $b = \mu\beta$ e poiché, dalla (21-2)

$$b = -\frac{dH}{dr} \quad (21.0.14)$$

$$H = -\int \mu\beta dr \quad (21.0.15)$$

Il valore di H fuori del tubo è

$$A - 2\mu_0 C \log r \quad (21.0.16)$$

dove μ_0 è il valore di μ nello spazio esterno al tubo e A è una costante, il cui valore dipende dalla posizione della corrente di ritorno.

Nella massa del tubo

$$H = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \frac{\mu C}{a_1^2 - a_2^2} \left(a_1^2 - r^2 + 2a_2^2 \log \frac{r}{a_1} \right) \quad (21.0.17)$$

Nello spazio dentro il tubo H è costante e

$$H = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \mu C \left(1 + \frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \log \frac{a_2}{a_1} \right) \quad (21.0.18)$$

685. Supponiamo il circuito completato da una corrente di ritorno circolante in un filo o in tubo parallelo al primo, essendo gli assi delle due correnti alla distanza b l'uno dall'altro. Per determinare l'energia cinetica del sistema, dobbiamo calcolare l'integrale

$$T = \frac{1}{2} \iiint H w dx dy dz \quad (21.0.19)$$

Se consideriamo soltanto la parte del sistema che è compresa tra due piani perpendicolari agli assi dei conduttori e distanti tra loro di l , l'espressione diviene

$$T = \frac{1}{2} l \iint H w dx dy \quad (21.0.20)$$

Se distinguiamo con un accento le quantità relative alla corrente di ritorno, possiamo scrivere

$$\frac{2T}{l} = \iint H w' dx' dy + \iint H' w dx dy + \iint H w dx dy + \iint H' w' dx' dy' \quad (21.0.21)$$

Poiché l'azione della corrente su un punto esterno al tubo è la stessa come se la corrente fosse concentrata sull'asse del tubo, il valore medio di H per la sezione di ritorno è $A - 2\mu_0 C \log b$, e il valore medio di H' per la sezione della corrente positiva è $A' - 2\mu_0 C' \log b$.

Pertanto, nell'espressione di T , i primi due termini si possono scrivere

$$AC' - 2\mu_0 CC' \log b \quad A'C - 2\mu_0 CC' \log b$$

Integriamo i due ultimi termini nel modo solito e sommiamo i risultati, ricordando che $C + C' = 0$: otteniamo il valore dell'energia cinetica T . Uguagliando a $\frac{1}{2}LC^2$, dove L è il coefficiente di autoinduzione del sistema di due conduttori, abbiamo per il valore di L , per unità di lunghezza del sistema

$$\begin{aligned} \frac{L}{l} = & 2\mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2} \mu \frac{a_1^2 - 3a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} + \frac{2a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \log \frac{a_1}{a_2} + \\ & + \frac{1}{2} \mu' \frac{a_1'^2 - 3a_2'^2}{a_1'^2 - a_2'^2} + \frac{2a_2'^4}{(a_1'^2 - a_2'^2)^2} \log \frac{a_1'}{a_2'} \end{aligned} \quad (21.0.22)$$

Se i conduttori sono fili solidi, a_2 e a_2' sono nulli, e

$$\frac{L}{l} = 2\mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2} (\mu + \mu') \quad (21.0.23)$$

È solo nel caso di fili di ferro che dobbiamo tener conto dell'induzione magnetica calcolando il coefficiente di autoinduzione. Negli altri casi, possiamo porre μ_0, μ_1 e μ' tutti uguali all'unità. (Si veda la Nota II alla fine del Capitolo). Più il raggio dei fili è piccolo e maggiore è la distanza che li separa; più è grande anche l'autoinduzione.

Trovare la repulsione X tra due parti del filo

686. Dal § 580. abbiamo per la forza che tende ad aumentare

$$X = \frac{1}{2} \frac{dL}{db} C^2 = 2\mu_0 \frac{l}{b} C^2 \quad (21.0.24)$$

che è in accordo con la formula di Ampère, quando $\mu = 1$, come nell'aria.

687. Se la lunghezza dei fili è grande rispetto alla loro distanza, ci si può servire del coefficiente di autoinduzione per determinare la tensione che risulta nei fili dall'azione della corrente.

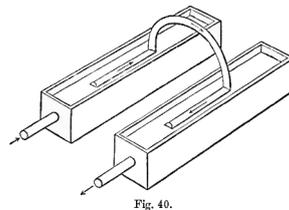
Se Z è questa tensione

$$Z = \frac{1}{2} \frac{dL}{db} C^2 = C^2 \left\{ \mu_0 \log \frac{c_2}{a_1 a'_1} + \frac{\mu}{2} \right\} \quad (21.0.25)$$

In uno degli esperimenti di Ampère, i conduttori paralleli sono formati da due vaschette di mercurio collegate da un arco metallico scorrente sul mercurio. Se si fa entrare dall'estremità di una delle vaschette una corrente che circola finché non incontra un'estremità del filo flottante per il quale passa nell'altra vaschetta e che ritorna lungo questa vaschetta, il galleggiante si muove lungo le vaschette in modo da accrescere la lunghezza del mercurio che è attraversato dalla corrente.

Il professor Tait ha semplificato le condizioni elettriche di questa esperienza, sostituendo il filo con un sifone flottante riempito di mercurio, in modo che la corrente attraversi solo del mercurio in tutto il suo percorso.

Si fa riferimento qualche volta a questa esperienza per provare che due elementi di corrente posti in linea retta si respingono, e per mostrare così che la formula di Ampère, che indica una tale repulsione tra elementi in linea retta, è più esatta della formula di Grassmann, la quale non indica alcuna azione tra elementi posti in linea retta (si veda § 526).



Ma è chiaro che, poiché la formula di Ampère e quella di Grassmann danno gli stessi risultati per i circuiti chiusi, e che in questa esperienza abbiamo solo un circuito chiuso, i suoi risultati non saprebbero confermare una di queste teoria piuttosto dell'altra.

Infatti, le due formule portano per questa repulsione allo stesso valore, che si è dato, e dal quale deriva che la distanza b tra i due conduttori paralleli è un elemento importante.

Se la lunghezza dei conduttori non è molto grande rispetto alla loro distanza, il valore di L si presenta sotto una forma un poco più complessa.

688. Quando la distanza dei conduttori diminuisce, il valore di L diminuisce. Il termine di questa diminuzione corrisponde al contatto dei fili, o a $b = a_1 + a'_1$. In questo caso

$$L = 2l \left[\log \frac{(a_1 + a'_1)^2}{a_1 a'_1} + \frac{1}{2} \right] \quad (21.0.26)$$

Ora questa espressione è minima per $a_1 = a'_1$ e allora

$$L = 2l \log \left(4 + \frac{1}{2} \right) = 2l (1,8863) = 3,7726l$$

Questo è il più piccolo valore dell'autoinduzione di un filo di lunghezza totale $2l$ ripiegato su se stesso.

Poiché le due parti del filo devono essere isolate tra loro, l'autoinduzione non può mai raggiungere questo valore limite. Si può diminuire indefinitamente l'autoinduzione sostituendo i fili tondi con bande di metalli larghe e piatte.

Forza elettromotrice necessaria per produrre una corrente di intensità variabile lungo un conduttore cilindrico

689. Quando la corrente che passa in un filo con una intensità variabile, la forza elettromotrice dovuta all'induzione del filo su se stesso è diverso nei diversi punti di una stessa sezione del filo, poiché è in generale funzione della distanza dall'asse del filo così come dal tempo. Se supponiamo che il conduttore cilindrico sia formato da un fascio di fili, facenti tutti parte dello stesso circuito, in modo che la corrente abbia forzatamente la stessa intensità in ognuna delle parti di una sezione del fascio, il metodo del calcolo che abbiamo finora impiegato è rigorosamente applicabile. Ma, se consideriamo il conduttore cilindrico come una massa solida nella quale le correnti circolano liberamente obbedendo alla forza elettromotrice, l'intensità di corrente non è più la stessa a diverse distanze dall'asse del cilindro, e le forze elettromotrici dipendono dalla distribuzione della corrente negli strati cilindrici del filo.

Il potenziale vettore H , la densità di corrente w e la forza elettromotrice in un punto qualunque devono essere considerate come funzioni del tempo e della distanza dall'asse del filo.

La corrente totale C che passa per la sezione del filo, e la forza elettromotrice E che agisce tra le estremità del circuito, devono essere considerate come le variabili di cui dobbiamo trovare la relazione.

Supponiamo che il valore di H sia

$$H = S + T_0 + T_1 r^2 + \dots + T_n r^{2n} \quad (21.0.27)$$

dove S, T_0, T_1, \dots sono funzioni del tempo.

Dall'equazione

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} = -4\pi w \quad (21.0.28)$$

abbiamo

$$-\pi w = T_1 + \dots + n^2 T_n r^{2n-2} \quad (21.0.29)$$

Se ρ rappresenta la resistenza specifica della sostanza per unità di volume, la forza elettromotrice in un punto qualunque è ρw e si può esprimere in funzione del potenziale elettrico e del potenziale vettore H con le equazioni (B), § 598,

$$\rho w = -\frac{d\Psi}{dz} - \frac{dH}{dt} \quad (21.0.30)$$

o

$$-\rho w = \frac{d\Psi}{dz} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt} + \frac{dT_1}{dt} r^2 + \dots + \frac{dT_n}{dt} r^{2n} \quad (21.0.31)$$

Confrontando i coefficienti di potenze simili di r nelle equazioni (21-29) e (221-31),

$$T_1 = \frac{\pi}{\rho} \left(\frac{d\Psi}{dz} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt} \right) \quad (21.0.32)$$

$$T_2 = \frac{\pi}{\rho} \frac{dT_1}{dt} \quad (21.0.33)$$

$$T_n = \frac{\pi}{\rho} \frac{1}{n^2} \frac{dT_{n-1}}{dt} \quad (21.0.34)$$

Pertanto possiamo scrivere

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{d\Psi}{dz} \quad (21.0.35)$$

$$T_0 = T \quad T_1 = \frac{\pi}{\rho} \frac{dT}{dt}, \dots \quad T_n = \frac{\pi^n}{\rho^n} \frac{1}{(n!)^2} \frac{d^n T}{dt^n} \quad (21.0.36)$$

690. Per trovare la corrente totale C , dobbiamo integrare w sulla sezione del filo il cui raggio è a ,

$$C = 2\pi \int_0^a wr dr \quad (21.0.37)$$

Sostituendo il valore di πw dalla (21-29), otteniamo

$$C = - (T_1 a^2 + \dots + n T_n a^{2n}) \quad (21.0.38)$$

Il valore di H in ogni punto esterno al filo dipende solo dal valore della corrente totale C , e non dal modo in cui questa corrente è distribuita nel filo. Possiamo quindi ammettere che il valore di H alla superficie del filo è AC , dove A è una costante da determinare per il calcolo, dalla forma generale del circuito. Ponendo $H = AC$ per $r = a$, abbiamo

$$AC = S + T_0 + T_1 a^2 + \dots + T_n a^{2n} \quad (21.0.39)$$

Se ora poniamo $\frac{\pi a^3}{\rho} = \alpha$ e α è il valore della conducibilità per unità di lunghezza del filo, e abbiamo

$$C = - \left[\alpha \frac{dT}{dt} + \frac{2\alpha^2}{1^2 2^2} \frac{d^2 T}{dt^2} + \dots + \frac{n\alpha^n}{(n!)^2} \frac{d^n T}{dt^n} + \dots \right] \quad (21.0.40)$$

$$AC - S = T + \frac{dT}{dt} + \frac{\alpha^2}{1^2 2^2} \frac{d^2 T}{dt^2} + \dots + \frac{\alpha^n}{(n!)^2} \frac{d^n T}{dt^n} + \dots \quad (21.0.41)$$

Per eliminare T da queste equazioni dobbiamo prima riversare le serie (21-40). Abbiamo allora

$$\alpha \frac{dT}{dt} = -C + \frac{1}{2}\alpha \frac{dC}{dt} - \frac{1}{6}\alpha^2 \frac{d^2 C}{dt^2} + \frac{1}{144}\alpha^3 \frac{d^3 C}{dt^3} - \frac{739}{2880}\alpha^4 \frac{d^4 C}{dt^4} + \dots$$

Abbiamo pertanto dalla (21-40) e (21-41)

$$\alpha \left(A \frac{dC}{dt} - \frac{dS}{dt} \right) + C = \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{1}{6}\alpha^3 \frac{d^3 T}{dt^3} - \frac{1}{48}\alpha^4 \frac{d^4 T}{dt^4} + \dots$$

Dalle ultime due equazioni troviamo

$$\left(A \frac{dC}{dt} - \frac{dS}{dt} \right) + C + \frac{1}{2}\alpha \frac{dC}{dt} - \frac{1}{12}\alpha^2 \frac{d^2 C}{dt^2} + \frac{1}{48}\alpha^4 \frac{d^3 C}{dt^3} - \frac{1}{180}\alpha^5 \frac{d^4 C}{dt^4} + \dots = 0 \quad (21.0.42)$$

Se l è lunghezza totale del circuito, R la sua resistenza ed E la forza elettromotrice dovuta a cause diverse dall'induzione di corrente su se stesso

$$\frac{dS}{dt} = \frac{E}{l} \quad \alpha = \frac{l}{R} \quad (21.0.43)$$

$$E = RC + l \left(A + \frac{1}{2} \right) \frac{dC}{dt} - \frac{1}{12} \frac{l^2}{R} \frac{d^2 C}{dt^2} + \frac{1}{48} \frac{l^3}{R^2} \frac{d^3 C}{dt^3} - \frac{1}{180} \frac{l^4}{R^3} \frac{d^4 C}{dt^4} + \dots \quad (21.0.44)$$

Il primo termine, RC , del secondo membro di questa equazione esprime la forza elettromotrice necessaria per vincere la resistenza, secondo la legge di Ohm.

Il secondo termine, $l \left(A + \frac{1}{2} \right) \frac{dC}{dt}$, esprime la forza elettromotrice che sarebbe impiegata ad aumentare la quantità di moto elettrocinetica del circuito, se la corrente avesse la stessa forza in tutti i punti della sezione del filo.

I termini seguenti rappresentano la correzione da applicare a questo valore, perché l'intensità non è la stessa a differenti distanze dall'asse del filo. Il sistema reale delle correnti ha un maggiore grado di libertà del sistema ipotetico, dove la corrente è costretta ad avere la stessa

intensità in tutti i punti della sezione. Pertanto la forza elettromotrice necessaria per produrre un cambiamento rapido nell'intensità di corrente reale è un poco minore di quella che deriverebbe da questa ipotesi.

La relazione tra l'integrale di tempo della forza elettromotrice e l'integrale del tempo dell'intensità è

$$\int E dt = R \int C dt + l \left(A + \frac{1}{2} \right) C - \frac{1}{12} \frac{l^2}{R} \frac{dC}{dt} + \dots \quad (21.0.45)$$

Se, prima dell'origine del tempo, la corrente ha un valore costante C_0 sale al valore C_1 nel tempo considerato, e rimane costante a questo limite, i termini che contengono le derivate di C si annullano ai due limiti, e

$$\int E dt = R \int C dt + l \left(A + \frac{1}{2} \right) (C_1 - C_0) \quad (21.0.46)$$

cioè l'impulso elettromotore ha lo stesso valore che se la corrente fosse uniforme in tutta la sezione del filo.

Sulla media distanza geometrica di due figure in un piano¹

691. Per calcolare l'azione elettromagnetica di una corrente che passa in un conduttore di sezione data qualunque su un conduttore parallelo di sezione pure data, dobbiamo trovare l'integrale

$$\iiint \log r dx dy dx' dy'$$

dove $dx dy$ sono un elemento di superficie della prima sezione, $dx' dy'$ un elemento della seconda, r la distanza tra questi due elementi, ed essendo l'integrazione estesa dapprima a tutti gli elementi della prima sezione e, poi, a tutti quelli della seconda.

Se determiniamo una linea R , tale che questa integrazione sia uguale a

$$A_1 A_2 \log R$$

dove A_1, A_2 sono le aree delle due sezioni, la lunghezza della linea R sarà la stessa, qualunque sia l'unità di lunghezza adottata e qualunque sia la base dei logaritmi. Se supponiamo le sezioni divise in elementi di uguale grandezza, il logaritmo di R moltiplicato per il numero di coppie di elementi sarà uguale alla somma dei logaritmi delle distanze di tutte le coppie di elementi; R può quindi essere considerato come la media geometrica delle distanze tra tutte le coppie di elementi. È evidente che il valore di R deve essere compreso tra il più grande e il più piccolo dei valori di r .

Se R_A e R_B sono le medie geometriche della distanza di due figure, A e B , da una terza C , e se R_{A+B} è la distanza geometrica media della somma di queste figure da C , si ha

$$(A + B) \log R_{A+B} = A \log R_A + B \log R_B$$

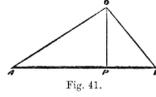
Questa relazione permette di determinare R per una figura complessa quando si conosce R per le parti di questa figura.

¹ *Trans, R. S. Edin.*, 1871, 1872.

692. Esempi

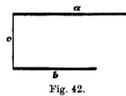
1. Sia R la distanza media dal punto O alla linea AB . Sia OP la perpendicolare ad AB .

$$AB (\log R + 1) = AP \log OA + PB \log OB + OP \hat{A}OB$$



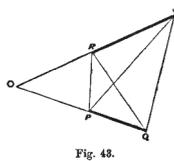
2. Siano due linee a e b , tracciate perpendicolarmente a una linea c , da uno stesso lato di questa linea (fig. 42), e R la distanza tra queste due linee:

$$ab (2 \log R + 3) = [c^2 - (a - b)^2] \log \sqrt{c^2 - (a - b)^2} + c^2 \log c + (a^2 - c^2) \log \sqrt{a^2 + c^2} + (b^2 - c^2) \log \sqrt{b^2 + c^2} - c(a - b) \tan^{-1} \frac{a-b}{c} + ac \tan^{-1} \frac{a}{c} + bc \tan^{-1} \frac{b}{c}$$



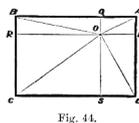
3. Per due linee, PQ e RS (fig. 43), le cui direzioni si intersecano in O .

$$PQ \cdot RS (2 \log R + 3) = \log PR (2OP \cdot OR \sin^2 O - PR^2 \cos O) + \log QS (2OQ \cdot OS \sin^2 O - QS^2 \cos O) + - \log PS (2OP \cdot OS \sin^2 O - PS^2 \cos O) + - \log QR (2OQ \cdot OR \sin^2 O - QR^2 \cos O) + - \sin O \{OP^2 \cdot S\hat{P}R - OQ^2 \cdot S\hat{Q}R + OR^2 \cdot P\hat{R}Q - OS^2 \cdot P\hat{S}Q\}$$



4. Siano una rettangolo $ABCD$, un punto O e le perpendicolari OP, OQ, OR, OS , abbassate da questo punto sui lati

$$AB \cdot AD (2 \log R + 3) = 2OP \cdot OQ \log OA + 2OQ \cdot OR \log OB + + 2OR \cdot OS \log OC + 2OS \cdot OS \log OD + + OP^2 \cdot D\hat{O}A + OQ^2 \cdot A\hat{O}B + OR^2 \cdot B\hat{O}C + OS^2 \cdot C\hat{O}D$$



5. Non è necessario che le due figure siano differenti, poiché si può trovare la media geometrica delle distanze tra tutte le coppie di punti di una stessa figura. Così per una linea retta di lunghezza a ,

$$\log R = \log a - \frac{3}{2}$$

o

$$R = ae^{-\frac{3}{2}}$$

$$R = 0,22313a$$

6. Per un rettangolo di lati a e b ,

$$\log R = \log \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{6} \frac{a^2}{b^2} \log \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} + \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{b}{a} + \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{a}{b} - \frac{25}{12}$$

Quando il rettangolo è un quadrato di lato a ,

$$\log R = \log a + \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{25}{12}$$

$$R = 0,44705a$$

7. La distanza geometrica media di un punto da una linea circolare è uguale alla maggiore di due quantità, alla sua distanza dal centro del cerchio, e al raggio del cerchio.

8. La distanza geometrica media di una figura qualsiasi da un anello limitato da due cerchi concentrici è uguale alla sua media geometrica della distanza dal centro, se essa è interamente esterna all'anello; e, se è interamente interna,

$$\log R = \frac{a_1^2 \log a_1 - a_2^2 \log a_2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{1}{2}$$

dove a_1 e a_2 sono i raggi esterno e interno dell'anello. R in questo caso è indipendente dalla forma della figura dentro l'anello.

9. La distanza geometrica media di tutte le coppie di punti dell'anello è data dall'equazione

$$\log R = \log a_1 - \frac{a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)} \log \frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{4} \frac{3a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 - a_2^2}$$

Per un'area circolare di raggio a , questa diviene

$$\log R = \log a - \frac{1}{4}$$

o

$$R = ae^{-\frac{1}{4}}$$

$$R = 0,7788a$$

Per una linea circolare diviene

$$R = a$$

693. Per calcolare il coefficiente di autoinduzione di una bobina di sezione uniforme, il cui raggio di curvatura è grande rispetto alle dimensioni della sezione trasversale, inizieremo col determinare la media geometrica delle distanze di tutte le coppie di punti della sezione, con il metodo che è verrà descritto, e calcoliamo poi il coefficiente di mutua induzione di due conduttori lineari della forma data, posti a questa distanza l'uno dall'altro.

Questo sarà il coefficiente di autoinduzione della bobina, quando la corrente totale che attraversa la bobina sarà uguale all'unità, e l'intensità sarà uniforme in tutti i punti della sezione.

Se vi sono n avvolgimenti nella bobina, dovremo moltiplicare per n^2 il coefficiente così ottenuto, e avremo il coefficiente di autoinduzione, nell'ipotesi che gli avvolgimenti del filo conduttore riempiano la totalità della sezione della bobina.

Ma il filo è cilindrico, e ricoperto da un materiale isolante, di modo che la corrente non è uniformemente distribuita sull'intera sezione, ma concentrata in certe parti, ciò che accresce il coefficiente di autoinduzione. Inoltre, le correnti che circolano nei fili vicini non hanno sulla corrente che passa che nel filo dato la stessa azione di una corrente uniformemente ripartita.

Le correzioni alle quali danno luogo queste osservazioni possono essere determinate con il metodo della media geometrica della distanza. Esse sono proporzionali alla lunghezza totale del filo della bobina, e si possono esprimere sotto forma di coefficienti numerici con i quali si moltiplica la lunghezza del filo per ottenere il coefficiente di autoinduzione corretto.

Sia d il diametro del filo; è ricoperto da una sostanza isolante e avvolto a bobina. Supporremo che le sezioni dei fili siano sovrapposte, come in fig. 45, e che la distanza tra gli assi di due filo consecutivi sia D , nel senso della larghezza così come in quello dell'altezza della bobina.

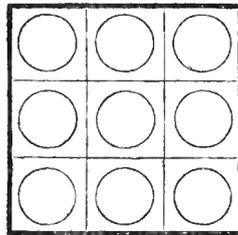


Fig. 45.

In primo luogo, bisogna determinare l'eccesso di autoinduzione dell'unità di lunghezza di un filo tondo di diametro d , sull'autoinduzione dell'unità di lunghezza del filo quadrato di lato D , sia

$$2 \log \frac{R_{\text{per il quadrato}}}{R_{\text{per il cerchio}}} = 2 \left(\log \frac{D}{d} + \frac{4}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{11}{6} \right) = 2 \left(\log \frac{D}{d} + 0,1380606 \right)$$

L'azione induttiva degli otto fili tondi più vicini al filo considerato è inferiore a quella degli otto fili quadrati, i più vicini sul filo quadrato posto nel mezzo del loro gruppo, di $2 \times 0,01971$.

Si possono trascurare le correzioni relative ai fili più lontani, e la correzione totale si può scrivere

$$2 \left(\ln \frac{D}{d} + 0,11835 \right)$$

Il valore finale dell'autoinduzione è pertanto

$$L = n^2 M + 2l \left(\ln \frac{D}{d} + 0,11835 \right)$$

dove n è il numero di avvolgimenti e l la lunghezza del filo; M il coefficiente di mutua induzione di due circuiti aventi la forma del filo medio della bobina, e distanti l'uno dall'altro di R , dove R è la media geometrica della distanza delle coppie di punti della sezione; e dove D è la distanza dei fili consecutivi e d il diametro del conduttore.

22 Correnti circolari

Potenziale magnetico dovuto a una corrente circolare

694. Il potenziale magnetico in un punto qualunque, dovuto a un circuito attraversato dall'unità di corrente, è numericamente uguale all'angolo solido sotteso dal circuito in questo punto (si veda § 409 e 485).

Quando il circuito è circolare, l'angolo solido è quello di un cono di secondo grado, che diviene un cono retto quando il punto dato è sull'asse del cerchio. Se il punto non è sull'asse, il cono è ellittico e il suo angolo solido è numericamente uguale all'area dell'ellisse sferico lungo il quale taglia una sfera di raggio unitario.

Quest'area può essere espressa in termini finiti per mezzo degli integrali ellittici di terza specie. Troveremo più comodo svilupparla in una serie infinita di armoniche sferiche; poiché la facilità con la quale le operazioni matematiche possono essere effettuate sul termine generale di una tale serie compensa largamente l'inconveniente di dover calcolare un numero di termini molto grande per ottenere una sufficiente precisione nelle applicazioni.

Per maggiore generalità, supporremo l'origine posta in un punto qualunque dell'asse del cerchio, cioè della perpendicolare tracciata al piano del cerchio dal suo centro.

Siano O (fig. 46) il centro del cerchio; C il punto dell'asse dove supponiamo sia posta l'origine; H un punto del cerchio.

Descriviamo una sfera con C come centro e CH come raggio. Il cerchio sarà su questa sfera, e ne sarà un piccolo cerchio di raggio angolare α .

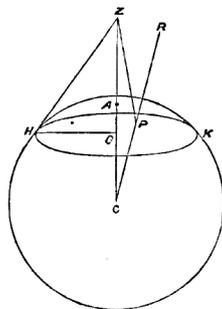


Fig. 46.

Si ha

$$\begin{aligned} CH &= c \\ OC &= b = c \cos \alpha \\ ON &= a = c \sin \alpha \end{aligned}$$

Siano A il polo della sfera, Z un punto qualunque dell'asse, e sia $CZ = z$.

Siano R un punto dello spazio, $CR = r$ e $ACR = \theta$.

Il potenziale magnetico dovuto alla corrente circolare è uguale a quello che sarebbe dovuto a un foglio magnetico di potenza uguale all'unità limitata dalla corrente. Siccome la forma della superficie del foglio è indifferente, purché sia delimitata dal cerchio, possiamo supporre che essa coincida con la superficie della sfera.

Abbiamo mostrato al § 670 che se V è il potenziale dovuto a uno strato di materia di densità superficiale unitario, distribuita sulla superficie della sfera interna al piccolo cerchio, il potenziale

magnetico dovuto a un foglio magnetico di potenza unitaria, limitato allo stesso piccolo cerchio, è

$$\omega = -\frac{1}{c} \frac{d}{dr} (rV)$$

Dobbiamo quindi, in primo luogo, trovare V . Sia il punto dato in Z sull'asse del cerchio; la parte del potenziale in Z , che è dovuta a un elemento di superficie sferica dS , posto in P , è

$$\frac{dS}{ZP}$$

ciò che si può sviluppare nell'una o nell'altra delle due serie armoniche sferiche

$$\frac{dS}{c} \left\{ P_0 + P_1 \frac{z}{c} + \dots + P_i \frac{z^i}{c^i} + \dots \right\}$$

o

$$\frac{dS}{z} \left\{ P_0 + P_1 \frac{c}{z} + \dots + P_i \frac{c^i}{z^i} + \dots \right\}$$

essendo la prima serie convergente quando z è minore di c e la seconda quando z è maggiore di c .

Ponendo $dS = -c^2 d\mu d\phi$ e integrando rispetto a ϕ tra i limiti 0 e 2π , e rispetto a μ tra i limiti $\cos \alpha$ e 1, troviamo

$$V = 2\pi c \left\{ \int_{\mu}^1 P_0 d\mu + \dots + \frac{z^i}{c^i} \int_{\mu}^1 P_1 d\mu + \dots \right\} \quad (22.0.1)$$

o

$$V = 2\pi \frac{c^2}{z} \left\{ \int_{\mu}^1 P_0 d\mu + \dots + \frac{c^i}{z^i} \int_{\mu}^1 P_1 d\mu + \dots \right\} \quad (22.0.2)$$

Dall'equazione caratteristica si P_i ,

$$i(i+1) P_i \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{dP_i}{d\mu} \right] = 0$$

Pertanto

$$\int_{\mu}^1 P_1 d\mu = \frac{1-\mu^2}{i(i+1)} \frac{dP_i}{d\mu} \quad (22.0.3)$$

Questa espressione non vale quando $i = 0$, ma poiché $P_0 = 1$

$$\int_{\mu}^1 P_1 d\mu = 1 - \mu \quad (22.0.4)$$

Siccome la funzione $\frac{dP}{d\mu}$ si presenta in tutte le parti di questo studio, la indicheremo con il simbolo abbreviato P'_i . Si sono dati, al § 608, i valori di P'_i corrispondenti a diversi valori di i .

Siamo ora in grado di esprimere il valore di V per un punto qualsiasi, posto o non sull'asse, sostituendo r a z e moltiplicando ogni termine per l'armonica zonale dello stesso ordine di θ . Infatti, V deve poter essere sviluppato in una serie di armoniche zonali di θ , con opportuni coefficienti. Quando $\theta = 0$, ognuna delle armoniche zonale diviene uguale all'unità, e il punto è sull'asse. Pertanto i coefficienti sono i termini dello sviluppo di V , per un punto preso sull'asse. Otteniamo così le due serie

$$V = 2\pi c \left\{ 1 - \mu + \dots + \frac{1-\mu^2}{i(i+1)} \frac{r^i}{c^i} P'_i(\alpha) P_i(\theta) \right\} \quad (22.0.5)$$

o

$$V' = 2\pi \frac{c^2}{r} \left\{ 1 - \mu + \dots + \frac{1 - \mu^2}{i(i+1)} \frac{c^i}{r^i} P_i'(\alpha) P_i(\theta) \right\} \quad (22.0.6)$$

695. Possiamo ora trovare il potenziale magnetico ω del circuito, con il metodo del § 670, per mezzo dell'equazione

$$\omega = -\frac{1}{c} \frac{d}{dr} (Vr) \quad (22.0.7)$$

Otteniamo così le due serie

$$\omega = -2\pi \left\{ 1 - \cos \alpha + \dots + \frac{\sin^2 \alpha}{i} \frac{r^i}{c^i} P_i'(\alpha) P_i(\theta) + \dots \right\} \quad (22.0.8)$$

o

$$\omega' = 2\pi \sin^2 \alpha \left\{ \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} P_1'(\alpha) P_1(\theta) + \dots + \frac{1}{i+1} \frac{c^{i+1}}{r^{i+1}} P_i'(\alpha) P_i(\theta) \right\} \quad (22.0.9)$$

La serie (6) è convergente per tutti i valori di r inferiori a c , la serie (6') per tutti i valori superiori a c . Alla superficie della sfera, dove $r = c$, le due serie danno lo stesso valore di ω , quando θ è più grande di α , cioè per i punti che non fanno parte del foglio magnetico; ma, se θ è più piccolo di α , cioè per i punti del foglio magnetico

$$\omega' = \omega + 4\pi \quad (22.0.10)$$

Se prendiamo il centro O del cerchio come origine delle coordinate, dobbiamo porre $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e le serie divengono

$$\omega = -2\pi \left\{ 1 + \frac{r}{c} P_1(\theta) + \dots + (-)^s \frac{1 \cdot 3 \cdot (2s-1)}{2 \cdot 4 \cdot 2s} \frac{r^{2s+1}}{c^{2s+1}} P_{2s+1}(\theta) \right\} \quad (22.0.11)$$

$$\omega = +2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{c^2}{r^2} P_1(\theta) + \dots + (-)^s \frac{1 \cdot 3 \cdot (2s+1)}{2 \cdot 4 \cdot (2s+2)} \frac{c^{2s+2}}{r^{2s+2}} P_{2s+1}(\theta) \right\} \quad (22.0.12)$$

dove gli ordini di tutte le armoniche sono dispari¹.

Energia potenziale di due correnti circolari

696. Supponiamo dapprima che i due fogli magnetici equivalenti alle due correnti siano porzioni di due sfere concentriche di raggio c_1 e c_2 , con c_1 maggiore (fig. 49). Supponiamo anche che gli assi dei due fogli coincidano e che α_1 e α_2 siano gli angoli sottesi dal centro C con i raggi del primo e del secondo foglio.

¹Il valore dell'angolo solido sotteso da un cerchio si può ottenere più direttamente nel modo seguente:

È facile mostrare che l'angolo solido sotteso dal cerchio nel punto Z dell'asse è

$$\omega = 2\pi \left(1 - \frac{z - c \cos \alpha}{HZ} \right)$$

sviluppando questa espressione in armoniche sferiche, troviamo

$$\omega = 2\pi \left\{ (\cos \alpha + 1) + [P_1(\alpha) \cos \alpha - P_0(\alpha)] \frac{z}{c} + \dots + [P_i(\alpha) \cos \alpha - P_{i-1}(\alpha)] \frac{z^i}{c^i} + \dots \right\}$$

$$\omega' = 2\pi \left\{ [P_0(\alpha) \cos \alpha - P_i(\alpha)] \frac{c}{z} + \dots + [P_1(\alpha) \cos \alpha - P_{i+1}(\alpha)] \frac{c^{i+1}}{z^{i+1}} + \dots \right\}$$

che sono gli sviluppi di ω per i punti dell'asse di cui z è inferiore o superiore a c . È facile mostrare che questi risultati sono in accordo con quelli del testo.

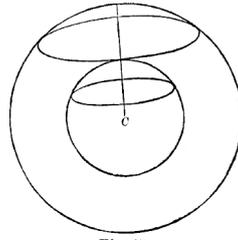


Fig. 47.

Sia ω_1 il potenziale del primo foglio in un punto qualunque che gli è interno: il lavoro necessario per allontanare il secondo foglio fino a una distanza infinita è dato dal valore dell'integrale

$$M = - \iint \frac{d\omega_1}{dr} dS$$

esteso sulla superficie del secondo foglio. Pertanto

$$\begin{aligned} &= \int_{\mu_1}^1 \frac{d\omega_1}{dr} 2\pi c_2^2 d\mu_2 = \\ &= 4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 c_2^2 \left\{ \frac{1}{c_1 c_1} \frac{c_2}{c_1} P_1'(\alpha_1) P_1'(\alpha_2) + \dots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) \int_{\mu_1}^1 P_i(\theta) d\mu_2 \right\} \end{aligned}$$

o, sostituendo il valore degli integrali dalla (22-2), § 694,

$$M = 4\pi^2 \sin^2 \alpha_2 c_2^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P_1'(\alpha_1) P_1'(\alpha_2) + \dots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) P_i'(\alpha_2) \right\}$$

697. Supponiamo ora che l'asse di uno dei fogli ruoti attorno a C come centro, in modo da formare un angolo θ con l'asse dell'altro foglio (fig. 48): ci basta introdurre le armoniche zonali di θ in questa espressione di M , e troviamo per valore più generale di M

$$M = 4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 c_2^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P_1'(\alpha_1) P_1'(\alpha_2) P_1(\theta) + \dots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) P_i'(\alpha_2) P_i(\theta) \right\}$$

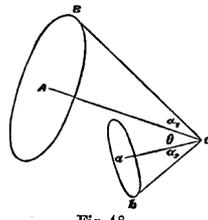


Fig. 48.

Questo è il valore dell'energia potenziale dovuta all'azione reciproca di due correnti circolari di intensità uguale all'unità, poste in modo che le normali tracciate dai centri dei cerchi si incontrino in un punto C sotto un angolo θ , essendo le distanze delle circonferenze dal punto C , c_1 e c_2 , con c_1 la maggiore delle due.

Se uno spostamento dx cambia il valore di M , la forza che agisce nel verso dello spostamento è $X = \frac{dM}{dx}$.

Per esempio, se l'asse di uno dei fogli è libero di ruotare attorno al punto C in modo da far variare θ , il momento della forza che tende ad aumentare θ è Θ , dove

$$\Theta = \frac{dM}{d\theta}$$

Effettuando la differenziazione e ricordandoci che

$$\frac{dP_i(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta P'_i(\theta)$$

dove P'_i ha lo stesso significato come nelle equazioni precedenti

$$\Theta = -4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 c_2^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P'_1(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) + \dots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P'_i(\alpha_1) P'_i(\alpha_2) P_i(\theta) \right\}$$

698. Siccome i valori di P'_i si incontrano spesso nei calcoli, la tabella seguente dei valori dei primi sei gradi può essere utile. In questa tabella, si è posto μ per $\cos\theta$, e ν per $\sin\theta$,

$$\begin{aligned} P'_1 &= 1 \\ P'_2 &= 3\mu \\ P'_3 &= \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1) = 6\left(\mu^2 - \frac{3}{4}\nu^2\right) \\ P'_4 &= \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3) = 10\left(\mu^2 - \frac{3}{4}\nu^2\right) \\ P'_5 &= \frac{15}{8}(21\mu^4 - 14\mu^2 + 1) = 15\left(\mu^4 - \frac{3}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{1}{8}\nu^4\right) \\ P'_6 &= \frac{21}{8}(33\mu^4 - 30\mu^2 + 5) = 21\left(\mu^4 - \frac{5}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{5}{8}\nu^4\right) \end{aligned}$$

699. Talvolta è comodo esprimere la serie che rappresenta M in funzione di quantità lineari, nel modo seguente:

Siano a il raggio del piccolo circuito; b la distanza dal suo piano all'origine; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Siano A, B, C le quantità corrispondenti per il circuito grande. La serie che rappresenta M si può scrivere

$$\begin{aligned} M &= 1 \cdot 2 \cdot \pi^2 \frac{A^2}{C^3} a^2 \cos\theta + 2 \cdot 3 \cdot \pi^2 \frac{A^2 B}{C^5} a^2 b \left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) + \\ &+ 3 \cdot 4 \cdot \pi^2 \frac{A^2(B^2 - \frac{1}{4}A^2)}{C^7} a^2 \left(b^2 - \frac{1}{4}a^2\right) \left(\cos^3\theta - \frac{3}{2}\sin^2\theta \cos\theta\right) + \dots \end{aligned}$$

Se poniamo $\theta = 0$, i due cerchi diventano paralleli e hanno lo stesso asse. Per determinare l'attrazione che si esercita tra di essi, differenziamo M rispetto a b ; troviamo così

$$\frac{dM}{db} = \pi^2 \frac{A^2 a^2}{C^4} \left\{ 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{B^2 - \frac{1}{4}A^2}{C^3} b + \dots \right\}$$

700. Per calcolare l'effetto di una bobina a sezione rettangolare, dobbiamo integrare le espressioni trovate, rispetto al raggio A della bobina e alla distanza B del suo piano dall'origine, essendo le integrazioni estese alla larghezza e allo spessore della bobina.

In qualche caso, è più comodo integrare direttamente; in altri, il metodo di approssimazione seguente porta a migliori risultati.

Sia P una funzione qualunque di x e y , e ci si proponga di trovare il valore di \bar{P} , tale che

$$\bar{P}xy = \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} \int_{-\frac{y}{2}}^{+\frac{y}{2}} P dx dy$$

In questa espressione \bar{P} è il valore medio di P entro i limiti di integrazione.

Sia P_0 il valore di P quando $x = 0$ e $y = 0$, allora, espandendo P con il teorema di Taylor,

$$P = P_0 + x \frac{dP_0}{dx} + y \frac{dP_0}{dy} + \frac{1}{2} x^2 \frac{d^2 P_0}{dx^2} + \dots$$

Integrando questa espressione tra i limiti, e dividenti il risultato per xy , si ottiene il valore di \bar{P} ,

$$\bar{P} = P_0 + \frac{1}{24} \left(x^2 \frac{d^2 P_0}{dx^2} + y^2 \frac{d^2 P_0}{dy^2} \right) + \frac{1}{960} \left(x^4 \frac{d^4 P_0}{dx^4} + y^4 \frac{d^4 P_0}{dy^4} \right) + \frac{1}{576} \frac{d^4 P_0}{dx^2 dy^2} + \dots$$

Nel caso della bobina, siano rispettivamente $A + \frac{1}{2}\xi$ e $A - \frac{1}{2}\xi$ i raggi esterno e interno; supponiamo che le distanze dei piano degli avvolgimenti del filo dall'origine siano comprese tra $B + \frac{1}{2}\eta$ e $B - \frac{1}{2}\eta$: allora la larghezza della bobina è η e il suo spessore è ξ , essendo queste quantità piccole rispetto ad A o a C .

Per calcolare l'effetto magnetico di una tale bobina, possiamo scrivere come segue i termini successivi della serie

$$\begin{aligned} G_0 &= \pi \frac{B}{C} \left(1 + \frac{1}{24} \frac{2A^2 - B^2}{C^4} \xi^2 - \frac{1}{8} \frac{A^2}{C^4} \eta^2 \right) \\ G_1 &= 2\pi \frac{A^2}{C^3} \left[1 + \frac{1}{24} \left(\frac{2}{A^2} - 15 \frac{B^2}{C^4} \right) \xi^2 + \frac{1}{8} \frac{4B^2 - A^2}{C^4} \eta^2 \right] \\ G_2 &= 3\pi \frac{A^2 B}{C^5} \left[1 + \frac{1}{24} \left(\frac{2}{A^2} - \frac{25}{C^2} + 35 \frac{A^2}{C^4} \right) \xi^2 + \frac{5}{24} \frac{4B^2 - 3A^2}{C^4} \eta^2 \right] \\ G_3 &= 4\pi \frac{A^2 (B^2 - \frac{1}{4}A^2)}{C^5} + \frac{\pi}{24} \frac{\xi^2}{C^{11}} [C^4 (8B^2 - 12A^2) + 35A^2 B^2 (5A^2 - 4B^2)] + \\ &\quad + \frac{\pi}{24} \frac{\eta^2}{C^{11}} [3A^2 C^2 B^2 (5A^2 - 44B^2) + 63A^2 B^2 (4B^2 - A^2)] \end{aligned}$$

ecc., ecc.;

$$\begin{aligned} g_1 &= \pi a^2 + \frac{1}{12} \pi \xi^2 \\ g_2 &= 2\pi a^2 b + \frac{1}{6} \pi b \xi^2 \\ g_3 &= 3\pi a^2 \left(b^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) + \frac{\pi}{8} \xi^2 (2b^2 - 3a^2) + \frac{\pi}{4} \eta^2 a^2 \end{aligned}$$

ecc., ecc..

Le quantità G_0, G_1, G_2, \dots sono relative alla bobina grande. Il valore di ω nel punto in cui r è più piccolo di C , è

$$\omega = -2\pi + 2G_0 - G_1 r P_1(\theta) - G_2 r^2 P_2(\theta) - \dots$$

Le quantità g_1, g_2, \dots appartengono alla bobina piccola. Il valore di ω' nel punto in cui r è maggiore di c è

$$\omega' = g_1 \frac{1}{r^2} P_1(\theta) + g_2 \frac{1}{r^3} P_2(\theta) + \dots$$

Il potenziale di una bobina rispetto all'altra quando la corrente totale attraverso la sezione di ogni bobina è unitaria è

$$M = G_1 g_1 P_1(\theta) - G_2 g_2 P_2(\theta) + \dots$$

Trovare M con gli integrali ellittici

701. Quando la distanza delle circonferenze dei due cerchi non è molto grande rispetto al raggio della più piccola delle due, la serie data non converge molto rapidamente. Ma, in tutti i casi, possiamo trovare il valore di M per due cerchi paralleli per mezzo degli integrali ellittici.

Sia, infatti b la lunghezza della linea che unisce i centri dei cerchi; supponiamo questa linea perpendicolare ai piano di due cerchi e siano A e a i raggi dei cerchi; allora

$$M = \iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds'$$

essendo l'integrazione estesa attorno ad entrambe le curve. In questo caso

$$r^2 = A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa \cos(\phi - \phi')$$

$$\epsilon = \phi - \phi' \quad ds = ad\phi \quad ds' = Ad\phi'$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Aa \cos(\phi - \phi') d\phi d\phi'}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa \cos(\phi - \phi')}} = 4\pi\sqrt{Aa} \left[\left(c - \frac{2}{c} \right) F + \frac{2}{c} E \right]$$

dove

$$c = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + b^2}}$$

e F e E sono integrali ellittici completi di modulo e .

Da questo, ricordando che

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dc} &= \frac{1}{c(1-c^2)} [E - (1-c^2)F] \\ \frac{dE}{dc} &= \frac{1}{c} (E - F) \end{aligned}$$

e che c è una funzione di b , troviamo

$$\frac{dM}{db} = \frac{\pi}{\sqrt{Aa}} \frac{bc}{1-c^2} \left[(2-c)^2 E - (2-2c^2) F \right]$$

Se r_1 e r_2 denotano il maggiore e il minore valore di r

$$r_1^2 = (A+a)^2 b^2 \quad r_2^2 = (A-a)^2 + b^2$$

e se si prende un angolo γ tale che $\cos \gamma = \frac{r_2}{r_1}$

$$\frac{dM}{db} = -\pi \frac{b \sin \gamma}{\sqrt{Aa}} \left[2F_\gamma - (1 + \sec^2 \gamma) E_\gamma \right]$$

dove F_γ e E_γ indicano gli integrali ellittici completi del primo e secondo tipo il cui modulo è $\sin \gamma$.

Se $A = a$, $\cot \gamma = \frac{b}{2a}$ e

$$\frac{dM}{db} = -2\pi \cos \gamma \left[2F_\gamma - (1 + \sec^2 \gamma) E_\gamma \right]$$

La quantità $\frac{dM}{db}$ rappresenta l'attrazione tra due circuiti circolari paralleli essendo la corrente in ognuno unitaria.

In virtù dell'importanza della quantità M nei calcoli di elettromagnetismo, si predispone una tabella di valori di $\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$, che è una funzione di c , e di conseguenza soltanto di γ , per valori tabulati ogni $6'$ dell'angolo γ . Si troverà questa tabella in Appendice alla fine del Capitolo.

Seconda espressione di M

Un'espressione di M , che è talvolta più comoda, si ottiene ponendo

$$C_1 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$$

in questo caso²

$$M = 8\pi\sqrt{Aa} \frac{1}{\sqrt{c_1}} (F_{c_1} - E_{c_1})$$

Tracciare le linee di forza magnetica per una corrente circolare

702. Le linee di forza magnetica sono evidentemente in piano passanti per l'asse del cerchio; e, su ciascuna di esse, il valore di M è costante.

Calcoliamo il valore di $K_0 = \frac{\sin \theta}{(F_{\sin \theta} - E_{\sin \theta})}$ dalle tabelle di Legendre per un sufficiente numero di valori di θ .

Tracciamo degli assi rettangolari di x e z , e, prendendo per centro il punto $x = \frac{1}{2}a(\sin \theta + \csc \theta)$, tracciamo un cerchio di raggio $\frac{1}{2}a(\csc \theta - \sin \theta)$. Per tutti i punti di questo cerchio, il valore di c_1 sarà $\sin \theta$. Pertanto, per tutti i punti di questo cerchio

$$M = 8\pi\sqrt{Aa} \frac{1}{\sqrt{K_\theta}} \quad A = \frac{1}{64\pi^2} \frac{M^2 K_\theta}{a}$$

Ora A è il valore di a per il quale si è trovato il valore di M : se quindi tracciamo una linea per la quale $x = a$, essa taglia il cerchio in due punti dove M ha il valore dato.

Se si assegna a M una serie di valori in progressione aritmetica, i valori di A formano una serie di quadrati. Pertanto, se tracciamo parallelamente a z una serie di linee per le quali x ha i valori trovati di A , i punti dove queste linee tagliano il cerchio sono quelli dove le linee di forza corrispondenti tagliano i cerchi.

Se poniamo $m = 8\pi a$ e $M = nm$

$$A = x = n^2 K_\theta a$$

Possiamo chiamare n l'indice della linea di forza. Le forme di queste linee sono date dalla tavola XVIII: esse sono copiate da un disegno fatto da Sir W. Thomson, nella sua Memoria sui moti vorticosi³.

$$M = 4\pi^2 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 c_2^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P'_1(\alpha_1) P'_1(\alpha_2) P_1(\theta) + \dots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P'_i(\alpha_1) P'_i(\alpha_2) P_i(\theta) \right\}$$

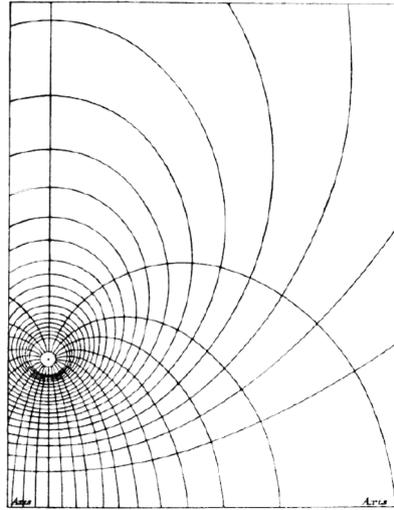
²La seconda espressione di M si può dedurre dalla prima con la trasformazione seguente degli integrali ellittici.
Se

$$\sqrt{1-c^2} = \frac{1-c_1}{1+c_1} \quad c = \frac{2\sqrt{c}}{1+c_1}$$

$$F(c) = (1+c_1) F(c_1)$$

$$E(c) = \frac{2}{1+c_1} E(c_1) - (1-c_1) F(c_1)$$

³*Trans. R. S. Edin.*, vol. XXV, p. 217; 1869.



Circular Current.

703. Se si considera la posizione di un cerchio avente un asse dato come definito dalla distanza b dal suo centro a un punto fisso dell'asse, e per il raggio a di questo cerchio, il coefficiente di induzione M di questo cerchio rispetto a un sistema qualunque di magneti o di correnti sarà soggetto alla seguente equazione

$$\frac{d^2M}{da^2} + \frac{d^2M}{db^2} - \frac{1}{a} \frac{dM}{da} = 0 \quad (22.0.13)$$

Per dimostrarlo consideriamo il numero di linee di forza magnetica tagliate dal cerchio, quando si fa variare a o b :

1° supponiamo che a diviene $a + \delta a$, rimanendo b costante. Durante questa variazione, il cerchio, allargandosi, descrive, nel suo piano, una superficie anulare di larghezza δa .

Se V è il potenziale magnetico in un punto qualunque e se l'asse y è parallelo all'asse del cerchio, la forza magnetica, perpendicolarmente al piano dell'anello, è $\frac{dV}{dy}$.

Per trovare l'induzione magnetica attraverso la superficie anulare, dobbiamo integrare

$$\int_0^{2\pi} a \delta a \frac{dV}{dy} d\theta$$

dove θ è la posizione angolare di un punto dell'anello.

Ma questa quantità rappresenta la variazione di M dovuta alla variazione di a o $\frac{dM}{da}$. Pertanto

$$\frac{dM}{da} = \int_0^{2\pi} a \frac{dV}{dy} d\theta \quad (22.0.14)$$

2° supponiamo che b diviene $b + \delta b$, con a costante; durante questa variazione, il cerchio descrive una superficie cilindrica di raggio a di lunghezza δb .

La forza magnetica perpendicolare a questa superficie, in un punto qualunque, è $\frac{dV}{dr}$, con r la distanza dall'asse. Pertanto

$$\frac{dM}{db} = - \int_0^{2\pi} a \frac{dV}{dr} d\theta \quad (22.0.15)$$

Differenziando la (22-10) rispetto ad a e la (22-11) rispetto a b , si ha

$$\frac{d^2 M}{da^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dV}{dy} d\theta + \int_0^{2\pi} a \frac{d^2 V}{dr dy} d\theta \quad (22.0.16)$$

$$\frac{d^2 M}{db^2} = - \int_0^{2\pi} a \frac{d^2 V}{dr dy} d\theta \quad (22.0.17)$$

Pertanto

$$\frac{d^2 M}{da^2} + \frac{d^2 M}{db^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dV}{dy} d\theta = \frac{1}{a} \frac{dM}{da}$$

per la (22-10).

Trasportando tutto al primo membro, otteniamo la (22-9).

Coefficiente di induzione di due cerchi paralleli quando la distanza degli archi è piccola rispetto al raggio di entrambi i cerchi

704. Possiamo dedurre il valore di M in questo caso dallo sviluppo degli integrali ellittici dati prima quando il loro modulo è vicino all'unità. Ma il metodo seguente costituisce un'applicazione più diretta dei principi elettrici:

Prima approssimazione

Siano a e $a + c$ i raggi dei cerchi, b la distanza dei loro piano: la distanza più breve tra le loro circonferenze è

$$r = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Dobbiamo trovare l'induzione magnetica che si produce attraverso uno dei cerchi, quando l'unità di corrente circola nell'altra.

Supponiamo dapprima i due cerchi in uno stesso piano. In un punto del piano del cerchio, posto a una distanza ρ dal centro di δs su una direzione formante con quella di δs l'angolo θ , la forza magnetica è perpendicolare al piano e uguale a

$$\frac{1}{\rho^2} \sin \theta \delta s$$

Per calcolare l'integrale di questa forza sulla superficie compresa all'interno del cerchio di raggio a , dobbiamo trovare il valore dell'integrale

$$2\delta s \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r_2}^{r-1} \frac{\sin \theta}{\rho} d\theta d\rho$$

dove $r_{1,2}$ sono le radici dell'equazione

$$r^2 - 2(a + c) \sin \theta r + c^2 + 2ac = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} r_1 &= (a + c) \sin \theta + \sqrt{(a + c)^2 \sin^2 \theta - c^2 - 2ac} \\ r - 2 &= (a + c) \sin \theta - \sqrt{(a + c)^2 \sin^2 \theta - c^2 - 2ac} \end{aligned}$$

e

$$\sin^2 \theta_1 = \frac{c^2 + 2ac}{(c + a)^2}$$

Se c è piccolo rispetto ad a , possiamo porre

$$r_1 = 2a \sin \theta \quad r_2 = \frac{c}{\sin \theta}$$

Integrando rispetto a ρ abbiamo

$$2\delta s \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{2a}{c} \sin^2 \theta \right) \cdot \sin \theta d\theta \simeq 2\delta s \log \left(\frac{8a}{c} - 2 \right)$$

Troviamo così, per l'induzione totale,

$$M_{ac} = 4\pi a \log \left(\frac{8a}{c} - 2 \right)$$

Poiché in un punto la cui distanza da un filo curvo è piccola rispetto al raggio di curvatura, la forza magnetica è circa la stessa per un filo dritto, possiamo calcolare la differenza dell'induzione attraverso il cerchio di raggio $a - c$ e dell'induzione attraverso il cerchio A , per mezzo della formula

$$M_{aA} - M_{ac} = 4\pi a (\log c - \log r)$$

Troviamo così che il valore dell'induzione magnetica tra A e a è circa

$$M_{Aa} = 4\pi a (\log 8a - \log r - 2)$$

purché r sia piccolo rispetto ad a .

705. Poiché la mutua induzione tra due avvolgimenti di una stessa bobina è una quantità molto importante per il calcolo dei risultati delle esperienze, indicherò ora un metodo con il quale il valore di M , per questo caso, può essere ottenuto con un grado di precisione a piacere. Ammetteremo che questo valore di M sia della forma

$$M = 4\pi \left(A \log \frac{8a}{r} + B \right)$$

dove

$$A = a + A_1 x + A_2 \frac{x^2}{a} + A_2' \frac{y^2}{a} + A_3 \frac{x^3}{a^2} + A_3' \frac{xy^2}{a^2} + \dots$$

e

$$B = -2a + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{a} + B_2' \frac{y^2}{a} + B_3 \frac{x^3}{a^2} + B_3' \frac{xy^2}{a^2} + \dots$$

dove a e $a + x$ sono i raggi dei cerchi e y la distanza tra i loro piani.

Dobbiamo determinare i valori dei coefficienti A e B .

È chiaro che si ritrovano, in queste quantità, solo potenze pari di y , poiché il valore di M deve restare lo stesso, cambiando il segno di y .

Ricaviamo un'altra serie di condizioni dalla proprietà di reciprocità del coefficiente di induzione, il quale rimane lo stesso, qualunque sia il cerchio preso per circuito primario. Il valore di M deve quindi rimanere lo stesso quando si sostituisce $a + x$ ad a , e $-x$ a x nell'espressione precedente.

Troviamo così le condizioni di reciprocità seguenti, uguagliando i coefficienti delle combinazioni simili di x e y ,

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - A_1 & B_1 &= 1 - 2 - B_1 \\ A_3 &= -A_2 - A_3 & B - 3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}A_1 + A_2 - B_2 - B_3 \\ A_3' &= -A_2' - A_3' & B_3' &= A_2' - B_2' - B_3' \end{aligned}$$

$$(-)^n A_n = A_2 + (n-2) A_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} A_4 + \dots + A_n$$

$$(-)^n B_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} A_1 - \frac{1}{n-2} A_2 + \dots + (-)^n A_{n-1} + B_2 + (n-2) B_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} B_4 + \dots + B_n$$

Dall'equazione generale di M , § 703,

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d^2 M}{dy^2} - \frac{1}{a+x} \frac{dM}{dx} = 0$$

otteniamo un'altra serie di condizioni

$$2A_2 + 2A'_2 = A_1$$

$$2A_2 + 2A'_2 + 6A_3 + 2A'_3 = 2A_2$$

$$n(n-1) A_n + n(n+1) A_{n+1} + 1 \cdot 2A'_n + 1 \cdot 2A'_{n+1} = nA_n$$

$$(n-1)(n-2) A'_n + n(n+1) A'_{n+1} + 2 \cdot 3A''_n + 2 \cdot 3A''_{n+1} = (n-2) A'_n$$

.....

$$4A_2 + A_1 = 2B_2 + 2B'_2 - B_1 = 4A'_2$$

$$6A_3 + 3A_2 = 2B'_2 + 6B_3 + 2B'_3 = 6A'_3 + 3A'_2$$

$$(2n-1) A_n + (2n+2) A_{n+1} = n(n-2) B_n + n(n+1) B_{n+1} + 1 \cdot 2B'_n + 1 \cdot 2B'_{n+1}$$

Risolvendo queste equazioni e sostituendo i valori dei coefficienti, le serie di M diventano⁴

$$M = 4\pi a \log \frac{8a}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{x^2 + 3y^2}{16a^2} - \frac{x^3 + 3xy^2}{32a^2} + \dots \right\} + 4\pi a \left\{ -2 - \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{3x^2 - y^2}{16a^2} - \frac{x^3 - 6xy^2}{48a^2} + \dots \right\}$$

Dati lunghezza e dimensioni del filo, trovare la forma della bobina per la quale il coefficiente di autoinduzione è massimo

706. Trascurando le correzioni del § 705, troviamo, dal § 693,

$$L = 4\pi n^2 a \log \left(\frac{8a}{R} - 2 \right)$$

dove n è il numero di avvolgimenti del filo, a il raggio medio della bobina, e R la distanza geometrica media della sezione trasversale della bobina a questa stessa sezione (si veda § 691). Se questa sezione è sempre simile a se stessa, R è proporzionale alle sue dimensioni lineari, e n è proporzionale a R^2 .

Poiché la lunghezza del filo è $2\pi an$, a varia in ragione inversa di n ; pertanto

$$\frac{dn}{n} = 2 \frac{dR}{R} \quad \frac{da}{a} = -2 \frac{dR}{R}$$

e la condizione affinché L sia massimo è

$$\log \frac{8a}{R} = \frac{7}{2}$$

Se la sezione trasversale della bobina è un cerchio di raggio c , dal § 692,

$$\log \frac{R}{c} = -\frac{1}{4}$$

⁴Questo risultato può essere ottenuto direttamente con il metodo suggerito nel § 704, cioè con l'espansione degli integrali ellittici nell'espressione per M nel § 701. Si veda Cayley, *Elliptic Functions*, § 75.

e

$$\log \frac{8a}{c} = \frac{13}{4}$$

da cui

$$a = 3,22c$$

cioè il raggio medio della bobina deve essere 3,22 volte quello della sezione trasversale della bobina, affinché essa abbia il coefficiente di autoinduzione più grande possibile. Questo risultato è stato ottenuto da Gauss⁵.

Se la scanalatura nella quale è avvolta la bobina ha una sezione trasversale quadrata, il diametro medio della bobina deve essere 3,7 volte il lato del quadrato.

Appendice I

Tabella dei valori di $\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$ (§ 701)

	$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$
60° 0'	1.4994783	63° 30'	1.5963782	67° 0'	1.6927081
6'	1.5022651	36'	1.5991329	6'	1.6954642
12'	1.5050505	42'	1.6018871	12'	1.6982209
18'	1.5078345	48'	1.6046408	18'	1.7009782
24'	1.5106173	54'	1.6073942	24'	1.7037362
30'	1.5133989	64° 0'	1.6101472	30'	1.7064949
36'	1.5161791	6'	1.6128998	36'	1.7092544
42'	1.5189582	12'	1.6156522	42'	1.7120146
48'	1.5217361	18'	1.6184042	48'	1.7147756
54'	1.5245128	24'	1.6211560	54'	1.7175375
61° 0'	1.5272883	30'	1.6239076	68° 0'	1.7203003
6'	1.5300628	36'	1.6266589	6'	1.7230640
12'	1.5328361	42'	1.6294101	12'	1.7258286
18'	1.5356084	48'	1.6321612	18'	1.7285942
24'	1.5383796	54'	1.6349121	24'	1.7313609
30'	1.5411498	65° 0'	1.6376629	30'	1.7341287
36'	1.5439190	6'	1.6404137	36'	1.7368975
42'	1.5466872	12'	1.6431645	42'	1.7396675
48'	1.5494545	18'	1.6459153	48'	1.7424387
54'	1.5522209	24'	1.6486660	54'	1.7452111
62° 0'	1.5549864	30'	1.6514169	69° 0'	1.7479848
6'	1.5577510	36'	1.6541678	6'	1.7507597
12'	1.5605147	42'	1.6569189	12'	1.7535361
18'	1.5632776	48'	1.6596701	18'	1.7563138
24'	1.5660398	54'	1.6624215	24'	1.7590929
30'	1.5688011	66° 0'	1.6651732	30'	1.7618735
36'	1.5715618	6'	1.6679250	36'	1.7646556
42'	1.5743217	12'	1.6706772	42'	1.7674392
48'	1.5770809	18'	1.6734296	48'	1.7702245
54'	1.5798394	24'	1.6761824	54'	1.7730114
63° 0'	1.5825973	30'	1.6789356	70° 0'	1.7758000
6'	1.5853546	36'	1.6816891	6'	1.7785903
12'	1.5881113	42'	1.6844431	12'	1.7813823
18'	1.5908675	48'	1.6871976	18'	1.7841762
24'	1.5936231	54'	1.6899526	24'	1.7869720

⁵ Werke, Ediz. Gottinga, 1867, vol. V. p. 622.

	$\text{Log} \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\text{Log} \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\text{Log} \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$
70° 30'	1.7897696	75° 0'	1.9185141	79° 30'	-0.576136
36'	1.7925692	6'	1.9214613	36'	-0.609037
42'	1.7953709	12'	1.9244135	42'	-0.642054
48'	1.7981745	18'	1.9273707	48'	-0.675187
54'	1.8009803	24'	1.9303330	54'	-0.708441
71° 0'	1.8037882	30'	1.9333005	80° 0'	-0.741816
6'	1.8065983	36'	1.9362733	6'	-0.775316
12'	1.8094107	42'	1.9392515	12'	-0.808944
18'	1.8122253	48'	1.9422352	18'	-0.842702
24'	1.8150423	54'	1.9452246	24'	-0.876592
30'	1.8178617	76° 0'	1.9482196	30'	-0.910619
36'	1.8206836	6'	1.9512205	36'	-0.944784
42'	1.8235080	12'	1.9542272	42'	-0.979091
48'	1.8263349	18'	1.9572400	48'	-1.013542
54'	1.8291645	24'	1.9602590	54'	-1.048142
72° 0'	1.8319967	30'	1.9632841	81° 0'	-1.082893
6'	1.8348316	36'	1.9663157	6'	-1.117799
12'	1.8376693	42'	1.9693537	12'	-1.152863
18'	1.8405099	48'	1.9723983	18'	-1.188089
24'	1.8433534	54'	1.9754497	24'	-1.223481
30'	1.8461998	77° 0'	1.9785079	30'	-1.259043
36'	1.8490493	6'	1.9815731	36'	-1.294778
42'	1.8519018	12'	1.9846454	42'	-1.330691
48'	1.8547575	18'	1.9877249	48'	-1.366786
54'	1.8576164	24'	1.9908118	54'	-1.403067
73° 0'	1.8604785	30'	1.9939062	82° 0'	-1.439539
6'	1.8633440	36'	1.9970082	6'	-1.476207
12'	1.8662129	42'	-0.001181	12'	-1.513075
18'	1.8690852	48'	-0.032359	18'	-1.550149
24'	1.8719611	54'	-0.063618	24'	-1.587434
30'	1.8748406	78° 0'	-0.094959	30'	-1.624935
36'	1.8777237	6'	-0.126385	36'	-1.662658
42'	1.8806106	12'	-0.157896	42'	-1.700609
48'	1.8835013	18'	-0.189494	48'	-1.738794
54'	1.8863958	24'	-0.221181	54'	-1.777219
74° 0'	1.8892943	30'	-0.252959	83° 0'	-1.815890
6'	1.8921969	36'	-0.284830	6'	-1.854813
12'	1.8951036	42'	-0.316794	12'	-1.894001
18'	1.8980144	48'	-0.348855	18'	-1.933455
24'	1.9009295	54'	-0.381014	24'	-1.973184
30'	1.9038489	79° 0'	-0.413273	30'	-2.013197
36'	1.9067728	6'	-0.445633	36'	-2.053502
42'	1.9097012	12'	-0.478098	42'	-2.094108
48'	1.9126341	18'	-0.510668	48'	-2.135026
54'	1.9155717	24'	-0.543347	54'	-2.176259

	$\text{Log} \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\text{Log} \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$		$\text{Log} \frac{M}{4\pi\sqrt{Aa}}$
84° 0'	-2.217823	86° 0'	-3.139097	88° 0'	-4.385420
6'	-2.259728	6'	-3.191092	6'	-4.465341
12'	-2.301983	12'	-3.243843	12'	-4.548064
18'	-2.344600	18'	-3.297387	18'	-4.633880
24'	-2.387591	24'	-3.351762	24'	-4.723127
30'	-2.430970	30'	-3.407012	30'	-4.816206
36'	-2.474748	36'	-3.463184	36'	-4.913595
42'	-2.518940	42'	-3.520327	42'	-5.015870
48'	-2.563561	48'	-3.578495	48'	-5.123738
54'	-2.608626	54'	-3.637749	54'	-5.238079
85° 0'	-2.654132	87° 0'	-3.698153	89° 0'	-5.360607
6'	-2.700156	6'	-3.759777	6'	-5.490969
12'	-2.746655	12'	-3.822700	12'	-5.632886
18'	-2.793670	18'	-3.887006	18'	-5.788406
24'	-2.841221	24'	-3.952792	24'	-5.961320
30'	-2.889329	30'	-4.020162	30'	-6.157370
36'	-2.938018	36'	-4.089234	36'	-6.385907
42'	-2.987312	42'	-4.160138	42'	-6.663883
48'	-3.037238	48'	-4.233022	48'	-7.027765
54'	-3.087823	54'	-4.308053	54'	-7.586941

Appendice II

Nel caso molto importante di due bobine circolari dello stesso asse, lord Rayleigh ha proposto, per l'impiego della tavola precedente, una formula di approssimazione molto comoda. La formula, che si applica a un numero qualunque di variabili, si trova nel Rapporto presentato all'Associazione britannica, nel 1880, da M. Merrifield, sulle Quadrature e l'Interpolazione; esso è attribuito al defunto M.H.J Purkiss. Nel caso attuale, il numero di variabili è pari a quattro.

Siano

n, n' il numero degli avvolgimenti del filo delle due bobine; a, a' i raggi degli avvolgimenti centrali; b la distanza tra i centri; $2h, 2h'$ gli spessori delle bobine lungo i raggi; $2k, 2k'$ le loro altezze lungo l'asse.

Sia pure $f(a, a', b)$ il coefficiente di mutua induzione per gli avvolgimenti centrali. Il coefficiente di mutua induzione delle due bobine è

$$\frac{1}{6}nn' \begin{cases} f(a+h, a', b) + f(a-h, a', b) + f(a, a'+h, b) + f(a, a'-h', b) + \\ + f(a, a', b+k) + f(a, a', b-k) + f(a, a', b+k') + f(a, a', b-k') + \\ - 2f(a, a', b) \end{cases}$$

Appendice III

Autoinduzione di una bobina circolare di sezione rettangolare

Se a indica il raggio medio di una bobina di n avvolgimenti, la cui altezza lungo l'asse è b , e lo spessore lungo il raggio c , l'autoinduzione, calcolata tramite la serie del § 705, si può mettere sotto la forma

$$L = 4\pi n^2 \left(\lambda a + \frac{\mu}{a} + \dots \right)$$

dove

$$\lambda = \ln 8a - 2 - \frac{1}{6} \left(\ln c - \frac{25}{12} \right) - \frac{1}{6} \frac{b^2}{c^2} \left(\ln b - \frac{25}{12} \right) + \\ + \frac{1}{6} \left(\frac{b^2}{c^2} - 6 + \frac{c^2}{b^2} \right) \left(\ln \sqrt{b^2 + c^2} - \frac{25}{12} \right) - \frac{2}{3} \frac{c}{b} \tan^{-1} \frac{b}{c} - \frac{2}{3} \frac{b}{c} \tan^{-1} \frac{c}{b}$$

$$\mu = \left(\frac{1}{32} b^2 + \frac{1}{96} c^2 \right) \ln 8a - \frac{1}{96} b^2 + \frac{1}{32} c^2 - \frac{1}{96} \frac{c^4}{b^2} \left(\ln c - \frac{25}{12} \right) + \\ - \frac{1}{32} \frac{b^4}{c^2} \left(\ln b - \frac{25}{12} \right) + \frac{1}{96} (3b^2 + c^2) \left(\frac{b^2}{c^2} - 6 + \frac{c^2}{b^2} \right) \left(\ln \sqrt{b^2 + c^2} - \frac{25}{12} \right) + \\ - \frac{1}{24} (3b^2 + c^2) \left(\frac{c}{b} \tan^{-1} \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \frac{1}{120} \frac{c^4}{b^2} \left(\ln c - \frac{137}{60} \right) + \frac{1}{40} \frac{b^4}{c^2} \left(\ln b - \frac{137}{60} \right) + \\ - \frac{1}{120} \left(\frac{c^4}{b^2} + 5c^2 - 25b^2 + 3\frac{b^4}{c^2} \right) \left(\ln \sqrt{b^2 + c^2} - \frac{137}{60} \right) + \frac{1}{420} \frac{c^4}{b^2} \left(\ln c - \frac{147}{60} \right) + \\ - \frac{1}{240} \left(\frac{c^4}{b^2} - 15c^2 + 15b^2 + \frac{b^4}{c^2} \right) \left(\ln \sqrt{b^2 + c^2} - \frac{147}{60} \right) + \frac{1}{24} \frac{c^2}{b} \tan^{-1} \frac{b}{c} \\ + \frac{1}{12} \left(\tan^{-1} \frac{b}{c} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{11}{120} \frac{b^2}{c} \tan^{-1} \frac{c}{b}$$

23 Strumenti elettromagnetici

Galvanometri

707. Un galvanometro è uno strumento per mezzo del quale una corrente elettrica si rivela o si misura per la sua azione magnetica. Se lo strumento è disposto per rivelare l'esistenza di deboli correnti, si chiama galvanometro sensibile.

Se è predisposto per misurare una corrente con massima esattezza possibile in funzione delle unità adottate, è detto galvanometro campione.

Tutti i galvanometri sono basati sul principio del moltiplicatore di Schweigger: la corrente circola in un filo avvolto in modo da circondare parecchie volte uno spazio vuoto, all'interno del quale è sospeso un magnete, producendo così, in questo spazio, una forza elettromagnetica la cui intensità è indicata dal magnete.

Nei galvanometri sensibili, la bobina è fatta in modo che gli avvolgimenti occupino la posizione, dove hanno la maggiore azione sul magnete. Sono quindi raggruppati gli uni sugli altri e vicini al magnete.

I galvanometri campioni sono costruiti in modo che le dimensioni e le posizioni relative di tutte le loro parti fisse possano essere conosciute con precisione e che le leggere incertezze che possono portare sulla posizione delle parti mobili, introducano nei calcoli il minor errore possibile.

Quando si costruisce un galvanometro sensibile, ci si sforza di rendere il più intenso possibile il campo di forza elettromagnetica per mezzo del quale è sospeso il magnete. Quando si dispone un galvanometro campione, si cerca di rendere il campo di forza elettromagnetica il più uniforme possibile vicino al magnete e di conoscere esattamente la sua intensità in funzione dell'intensità della corrente.

Galvanometro campione

708. In un galvanometro campione, l'intensità di corrente si determina dalla forza che esso sviluppa sul magnete sospeso. Ora, né la distribuzione del magnetismo nel magnete, né la posizione del suo centro quando è sospeso, sono suscettibili di essere determinati con un alto grado di precisione. È quindi necessario che la bobina sia disposta in modo da produrre un campo di forza quasi uniforme in tutto lo spazio che potrà occupare il magnete nei suoi spostamenti. Di conseguenza, le dimensioni della bobina devono in generale essere assai superiori a quelle del magnete.

Disponendo opportunamente numerose bobine, si può ottenere, nel campo di forza che esse comprendono, una uniformità assai maggiore che nel caso di una sola bobina; e si può a sua volta ridurre le dimensioni e aumentare la sensibilità dello strumento. Tuttavia, gli errori sulle misure lineari introducono nella determinazione delle costanti elettriche maggiori incertezze con piccoli strumenti che con grandi. È pure preferibile determinare le costanti elettriche di piccoli strumenti, non da misura diretta delle loro dimensioni, ma per confronto elettrico con uno strumento campione di grande taglia, le cui dimensioni sono più esattamente conosciute (si veda § 752).

In tutti i galvanometri campioni, le bobine sono circolari. Il telaio sul quale deve essere avvolto il filo è tornito con cura. Gli si assegna una larghezza uguale a un certo multiplo n del diametro del filo ricoperto. Si produce un foro nel quale deve entrare il filo, e si fa passare per questo foro

una delle estremità del filo ricoperto, per formare la comunicazione interna della bobina. Poi si mette il telaio su una ruota, gli si adatta un asse di legno (fig. 53), sul quale, nel punto della sua circonferenza che corrisponde all'entrata del filo nella bobina, si inchioda l'estremità di un lungo spago.

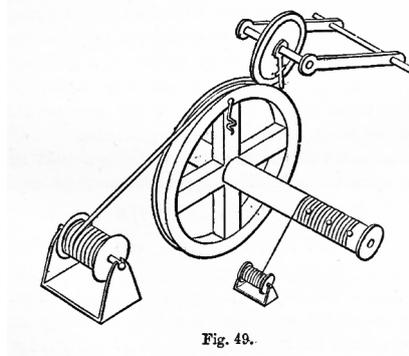


Fig. 49.

Si fa allora ruotare il tutto, e il filo si deposita lentamente e regolarmente sul fondo del telaio, finché, dopo n giri, lo abbia interamente ricoperto. Durante questa operazione, lo spago si è arrotolato n volte attorno all'asse di legno, e alla fine dell'ennesimo giro, lo si fissa piantando un chiodo. Si ha cura che gli avvolgimenti dello spago siano ben stabiliti, perché si possa contarsi facilmente. Si misura allora la circonferenza esterna del primo strato del filo, e si comincia un secondo strato; e così di seguito, finché si sia avvolto il numero di strati voluto. Lo spago serve a contare il numero delle spire. Se, per qualche ragione, si deve srotolare una parte della bobina, si srotola pure lo spago in modo da non perdere il conto già fatto del numero di spire appartenenti a ogni strato.

La misura della circonferenza di ogni strato permette di verificare la regolarità dell'avvolgimento, e offre il modo di calcolare le costanti elettriche della bobina. Infatti, prendendo la media aritmetica delle circonferenze del telaio e dello strato esterno e sommando le circonferenze di tutti gli strati, otteniamo la circonferenza media, da cui possiamo dedurre il raggio medio della bobina. La circonferenza di ogni strato si può misurare per mezzo di un nastro d'acciaio, o, meglio, mediante una ruota graduata che rotola sulla bobina assieme a questa durante l'avvolgimento del filo. Si determina poi il valore delle divisioni del nastro o della ruota, confrontandole con un regolo graduato rettilineo.

709. Quando l'unità di corrente attraverso la bobina, il momento della forza che agisce sul sistema sospeso può essere espresso dalla serie

$$G_1 g_1 \sin \theta + G_2 g_2 \sin \theta P_2'(\theta) + \dots$$

essendo i coefficienti G relativi alla bobina, i coefficienti g al sistema sospeso, e θ l'angolo compreso tra l'asse della bobina e quello del sistema sospeso (si veda § 700).

Quando il sistema sospeso consiste in una barra magnetizzata sottile, presentante una magnetizzazione uniforme e longitudinale, di lunghezza $2l$, e di potenza uguale all'unità, sospesa per il suo punto di mezzo,

$$g_1 = 2l \quad g_2 = 0 \quad g_3 = 2l^3 \quad \dots$$

Per un magnete di lunghezza $2l$ magnetizzato in un modo qualsiasi, i coefficienti sono minori di quando la magnetizzazione è uniforme.

710. Quando lo strumento serve come galvanometro delle tangenti, la bobina è fissa; il suo piano è verticale e parallelo alla direzione della forza magnetica terrestre. In questo caso, l'equazione d'equilibrio del magnete è

$$mg_1 H \cos \theta = m\gamma \sin \theta \left(G_1 g_1 + G_2 g_2 \cdot P_2'(\theta) + \dots \right)$$

dove mg_1 è il momento magnetico del magnete, H la componente orizzontale della forza magnetica terrestre, e γ la forza della corrente che attraversa la bobina.

Se la lunghezza del magnete è piccola in confronto al raggio della bobina, si possono trascurare i termini in G e g che seguono il primo, e si trova

$$\gamma = \frac{H}{G_1} \cot \theta$$

Generalmente, l'angolo che si misura è la deviazione δ del magnete, la quale è il complemento di θ di modo che $\cot \theta = \tan \delta$.

Così la corrente è proporzionale alla tangente della deviazione ed è per questo che lo strumento è detto un galvanometro delle tangenti.

Un altro metodo consiste nel rendere tutto lo strumento mobile attorno ad un asse verticale e a farlo ruotare finché non raggiunge una posizione in cui il magnete si trova in equilibrio, essendo il suo asse parallelo al piano della bobina. Se δ è l'angolo compreso tra il piano della bobina e il meridiano magnetico, l'equazione di equilibrio è

$$mg_1 H \sin \theta = m\gamma \left(G_1 g_1 - \frac{3}{2} G_3 g_3 + \dots \right)$$

da cui

$$\gamma = \frac{H}{(G_1 - \dots)} \sin \delta$$

Poiché la corrente è misurata dal seno della deviazione, lo strumento impiegato in questo modo, prende il nome di galvanometro dei seni.

Il metodo dei seni non è applicabile se la corrente varia molto lentamente perché la si possa considerare come costante durante il tempo necessario per manovrare lo strumento e riportare il magnete all'equilibrio.

711. Esaminiamo ora la disposizione delle bobine in un galvanometro campione.

La forma più semplice è quella dove vi è una sola bobina, al centro della quale il magnete si trova sospeso.

Siano A il raggio medio della bobina, ξ la sua altezza, η il suo spessore, n il numero delle spire.

I valori dei coefficienti sono

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{2\pi n}{A} \left(1 + \frac{1}{12} \frac{\xi^2}{A^2} - \frac{1}{8} \frac{\eta^2}{A^2} \right) \\ G_2 &= 0 \\ G_3 &= -\frac{\pi n}{A^3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{A^2} - \frac{5}{8} \frac{\eta^2}{A^2} \right) \\ G_4 &= 0, \dots \end{aligned}$$

La correzione principale è quella derivante da G_3 . La serie

$$G_1 g_1 + G_3 g_3 P_3'(\theta)$$

diviene

$$G_1 g_1 \left[1 - 3 \frac{1}{A^2} \frac{g_3}{g_1} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) \right]$$

Lo scarto tra il fattore di correzione e l'unità è maggiore, quando il magnete ha una magnetizzazione uniforme, e quando $\theta = 0$. Diviene allora $1 - 3 \frac{l^2}{A^2}$. Si annulla quando $\tan \theta = 2$, cioè quando la deviazione è $\tan^{-1} \frac{1}{2}$ o $26^\circ 34'$. Alcuni osservatori predispongono le loro esperienze in modo da rendere la deviazione osservata la più vicina possibile a questo angolo. Ma il metodo migliore consiste ancora nel prendere un magnete molto corto, rispetto al raggio della bobina, affinché si possa trascurare la correzione.

Si regola con cura il magnete sospeso, in modo che il suo centro coincida il più esattamente possibile con il centro della bobina. Se tuttavia la regolazione non è perfetta, e che x, y, z siano le coordinate del centro del magnete rispetto al centro della bobina, essendo z contato parallelamente all'asse della bobina, il fattore di correzione è

$$1 + \frac{3x^2 + y^2 - 2z^2}{2A^2}$$

Quando il raggio della bobina è considerevole e la regolazione del magnete è stata fatta con cura, si può ammettere che questa correzione è insensibile.

Dispositivo di Gaugain

712. Per evitare la correzione che dipende da G_3 , Gaugain ha costruito un galvanometro, nel quale questo termine è reso uguale a zero con il seguente artificio: il magnete non è più sospeso al centro della bobina, ma in un punto del suo asse posto a una distanza dal centro uguale alla metà del raggio della bobina, essendo G_3 della forma

$$G_3 = 4\pi \frac{A^2 \left(B^2 - \frac{1}{4} A^2 \right)}{C^7}$$

e nel dispositivo $B = \frac{1}{2}A$, $G_3 = 0$.

Questa disposizione costituirebbe quindi un progresso sulla prima forma, se si potesse essere sicuri che il centro del magnete sospeso è proprio nel punto così definito. Ma la posizione del centro del magnete è sempre incerta, e questa incertezza introduce un fattore di correzione di grandezza sconosciuta, che dipende da G_2 e che è della forma $\left(1 - \frac{6z}{5A} \right)$ dove z è l'eccesso della distanza del centro del magnete dal piano della bobina, eccesso che è incognito. Questa correzione dipende dalla prima potenza di $\frac{z}{A}$, e, di conseguenza, la bobina di Gaugain a magnete sospeso eccentricamente è soggetta a un errore assai più grande dell'antica forma.

Dispositivo di Helmholtz

713. Helmholtz ha trasformato questo galvanometro di Gaugain in uno strumento del tutto degno di fiducia, aggiungendo dall'altro lato del magnete, e a una distanza uguale, una seconda bobina simile alla prima.

Essendo le bobine poste simmetricamente da una parte e dall'altra del magnete, si fanno sparire di colpo tutti i termini di ordine pari.

Sia A il raggio medio delle due bobine: si prende uguale ad A la distanza tra i loro piani medi, e si sospende il magnete nel mezzo del loro asse comune. I coefficienti sono

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{16\pi n}{5\sqrt{5}} \frac{1}{A} \left(1 - \frac{1}{60} \frac{\xi^2}{A^2} \right) \\ G_2 &= 0 \\ G_3 &= 0,0512 \frac{\pi n}{3\sqrt{5}A^5} (31\xi^2 - 36\eta^2) \\ G_4 &= 0 \\ G_5 &= -0,73728 \frac{\pi n}{\sqrt{5}A^5} \end{aligned}$$

dove n rappresenta il numero di avvolgimenti nell'insieme delle due bobine.

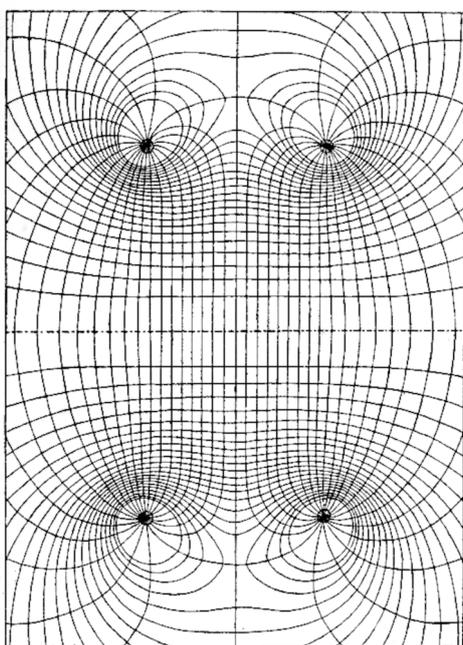
Da questi risultati, si vede che, se la sezione delle bobine è rettangolare, con ξ l'altezza e η lo spessore, il valore di G_3 , corretto per le dimensioni finite della sezione, sarà piccolo, e si annullerà se ξ^2 sta a η^2 nel rapporto di 36 a 31.

È quindi inutile accanirsi ad avvolgere le bobine su superfici coniche, così come hanno fatto alcuni costruttori; poiché si può soddisfare a tutte le condizioni con bobine a sezione rettangolare, che possono essere costruite con maggiore perfezione delle bobine il cui nucleo è un cono ottuso.

La disposizione delle bobine nel galvanometro doppio di Helmholtz è rappresentata in fig. 53, § 725.

La tavola XIX rappresenta la sezione del campo di forza dovuto alla doppia bobina.

FIG. XIX.
Art. 713.



Two Circular Currents.

Galvanometro a quattro bobine

714. Combinando quattro bobine, ci si può sbarazzare dei coefficienti $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$. Infatti, ogni combinazione simmetrica fa sparire i coefficienti di ordine pari. Supponiamo che le quattro bobine siano cerchi paralleli, presi su una stessa sfera, e corrispondenti agli angoli $\theta, \phi, \pi - \phi, \pi - \theta$. Siano n il numero di spire della prima e della quarta bobina, e pn quello della seconda e della terza bobina. La condizione che il coefficiente G_2 , relativo alla combinazione, sia uguale a zero, dà

$$n \sin^2 \theta P'_3(\theta) + pn \sin^2 \phi P'_3(\phi) = 0 \quad (23.0.1)$$

e la condizione $G_5 = 0$ dà

$$n \sin^2 \theta P'_5(\theta) + pn \sin^2 \phi P'_5(\phi) = 0 \quad (23.0.2)$$

Ponendo

$$\sin^2 \theta = xe \sin^2 \phi = y \quad (23.0.3)$$

ed esprimendo P'_3 e P'_5 (§ 698) in termini di queste quantità, le due equazioni divengono

$$4x - 5x^2 + 4py - 5py^2 = 0 \quad (23.0.4)$$

$$8x - 28x^2 + 21x^3 + 8py - 28py^2 + 21py^3 = 0 \quad (23.0.5)$$

Sottraendo dalla (23-5) il doppio della (23-4) e dividendo per 3, si ha

$$6x^2 - 7x^3 + 6py^2 - 7py^3 = 0 \quad (23.0.6)$$

Pertanto dalla (23-4) e (23-6),

$$p = \frac{x \ 5x - 4}{y \ 4 - 5y} = \frac{x^2 \ 7x - 6}{y^2 \ 6 - 7y}$$

e otteniamo

$$y = \frac{4 \ 7x - 6}{7 \ 5x - 4} \quad p = \frac{32}{49x} \frac{7x - 6}{(5x - 4)^2}$$

x e y sono i quadrati del seno e, di conseguenza, devono essere compresi tra 0 e 1. Quindi, oppure x è compreso tra 0 e $\frac{4}{7}$, nel qual caso y sta tra $\frac{4}{7}$ e 1, e p tra ∞ e $\frac{4}{3} \frac{9}{2}$; oppure x sta tra $\frac{4}{7}$ e 1, e allora y sta tra 0 e $\frac{4}{7}$ e p tra zero e $\frac{3}{4} \frac{2}{9}$.

Galvanometro a tre bobine

715. La disposizione più comoda è quella che corrisponde a $x = 1$. Allora due delle bobine coincidono, e formano un grande cerchio della sfera di raggio C . Il numero di spire di questa bobina composta è 64. Le altre due bobine sono formate da piccoli cerchi della sfera aventi un raggio uguale a $\sqrt{\frac{4}{7}}C$. La distanza del piano di ciascuna di esse al piano della prima è $\sqrt{\frac{3}{7}}C$; il numero di spire su ognuna di esse è 49.

Il valore di G_1 è $\frac{120}{C}$.

La fig. 50 rappresenta questa disposizione di bobine.

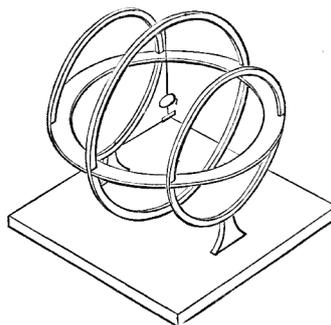


Fig. 50.

Poiché, in questo galvanometro a tre bobine, G_7 è il primo termine che abbia un valore finito, dopo G_γ , una grande parte della sfera sulla superficie della quale si trovano poste le bobine forma un campo di forza pressoché uniforme.

Se si potesse avvolgere del filo sulla totalità di una superficie sferica, nel modo descritto al § 672, si otterrebbe un campo di forza perfettamente uniforme. Ma sarebbe praticamente impossibile distribuire le spire su una superficie sferica con grande precisione, anche quando non

vi fossero queste altre obiezioni, che una tale bobina forma una superficie chiusa il cui interno non è accessibile.

Se si mette fuori circuito la bobina del mezzo e si fa passare la corrente in senso inverso nelle due bobine laterali, si ottiene un campo di forza che esercita un'azione pressoché uniforme nella direzione dell'asse su un magnete o una bobina sospesa all'interno di questo campo e il cui asse coincide con quello delle bobine (si veda § 673); poiché, in questo caso, tutti i coefficienti di ordine dispari scompaiono; e, poiché

$$\mu = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad P_4' = \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3) = 0$$

dove l'espressione del potenziale magnetico, nelle vicinanze del centro della bobina, diviene

$$\mu = \frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\pi n\gamma \left[3\frac{r^2}{C^2}P_2(\theta) + \frac{11}{7}\frac{r^6}{C^6}P_6(\theta) + \dots \right]$$

Grossezza che conviene dare al filo di un galvanometro data la resistenza esterna

716. Sia data la forma del telaio sul quale si deve avvolgere il filo del galvanometro; si chiede di determinare se questo telaio deve essere contornato da un filo lungo e sottile, o da un filo più corto e grosso.

Siano l la lunghezza del filo; y il suo raggio; $y + b$ il raggio del filo ricoperto; ρ la sua resistenza specifica; g il valore di G per l'unità di lunghezza del filo; r la parte della resistenza che non dipende dal galvanometro.

La resistenza del filo del galvanometro è

$$R = \frac{\rho}{\pi} \frac{l}{y^2}$$

Il volume della bobina è

$$V = 4l(y + b)^2$$

La forza elettromagnetica è γG , dove γ è l'intensità della corrente e

$$G = gl$$

Se E è la forza elettromotrice agente nel circuito la cui resistenza è $R + r$

$$E = \gamma(R + r)$$

La forza elettromagnetica dovuta a questa forza elettromotrice è

$$E \frac{G}{R + r}$$

che dobbiamo rendere massima con la variazione di y e l .

Invertendo la frazione, dobbiamo rendere minimo

$$\frac{\rho}{\pi g} \frac{1}{y^2} + \frac{r}{gl}$$

da cui

$$2\frac{\rho}{\pi} \frac{dy}{y^3} + \frac{rdl}{l^2} = 0$$

Se il volume della bobina rimane costante

$$\frac{dl}{l} + 2 \frac{dy}{y+b} = 0$$

Eliminando dl e dy , otteniamo

$$\frac{\rho y + b}{\pi y^3} = \frac{r}{l}$$

o

$$\frac{r}{R} = \frac{y+b}{y}$$

cioè che la dimensione del filo del galvanometro deve essere tale che la resistenza esterna stia alla resistenza del galvanometro come il diametro del filo ricoperto sta al diametro del filo nudo.

Galvanometri sensibili

717. Nella costruzione di un galvanometro sensibile, ogni dettaglio dell'insieme è combinato per ottenere la massima deviazione possibile del magnete per una forza elettromotrice debole agente tra gli elettrodi della bobina.

Ora, la corrente che attraversa il filo produce un effetto maggiore quando è posta il più vicino possibile al magnete sospeso. Ma il magnete deve rimanere libero di oscillare: bisogna quindi lasciare uno spazio vuoto all'interno della bobina. Essa si trova così delimitata all'interno.

Esternamente a questo spazio, ogni spira deve essere posta in modo da esercitare sul magnete l'azione più grande possibile. Al crescere del numero delle spire, le posizioni più vantaggiose si trovano occupate, e, infine, l'effetto della corrente nelle prime spire può essere ridotto dall'aumento della resistenza dovuto a un nuovo giro, più di quanto è aumentato dall'effetto di questo nuovo giro. Otterremo pertanto, per una forza elettromotrice data, il più grande effetto magnetico, utilizzando per le spire esterne un filo più grosso di quello delle spire interne.

718. Supponiamo le spire del galvanometro circolari, l'asse del galvanometro passante per i centri di questi cerchi, perpendicolarmente al loro piano.

Siano $r \sin \theta$ il raggio di uno di questi cerchi, $r \cos \theta$ la distanza del suo centro dal centro del galvanometro.

Se l è la lunghezza di un pezzo di filo posto lungo questo cerchio, e se γ è la corrente che circola in questo filo, la forza magnetica che si esercita al centro del galvanometro ha per componente lungo l'asse

$$\gamma l \frac{\sin \theta}{r^2}$$

Se poniamo

$$r^2 = x^2 \sin \theta \tag{23.0.7}$$

questa espressione diviene $\frac{\gamma l}{x^2}$.

Se pertanto si costruisce una superficie simile a quelle della fig. 51 rappresenta la sezione, e la cui equazione polare è

$$r^2 = x_1^2 \sin \theta$$

dove x_1 è una costante qualunque, una lunghezza data del filo curvato a forma di arco di cerchio produrrà un effetto magnetico più grande se è posto all'interno della superficie che all'esterno.

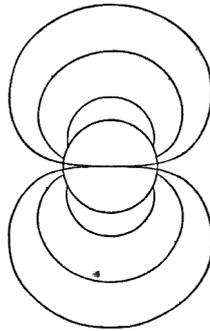


Fig. 51.

Da ciò segue che il valore di x deve essere costante per tutti i punti della superficie esterna di uno strato del filo; poiché, se x fosse più grande in un punto che in un altro, si potrebbe, trasportando una parte del filo dalla prima posizione alla seconda, aumentare la forza che agisce al centro del galvanometro.

La forza totale dovuta alla bobina è γG , dove

$$G = \int \frac{dl}{x^2}$$

dove l'integrazione è estesa a tutta la lunghezza di l e x è considerato come una funzione di l .

719. Sia γ il raggio del filo: la sua sezione sarà πy^2 ; sia ρ la resistenza specifica, per unità di volume, della sostanza di cui è composto il filo: la resistenza di una lunghezza l sarà $\frac{l\rho}{\pi y^2}$ e la resistenza totale della bobina sarà

$$R = \frac{\rho}{\pi} \int \frac{dl}{y^2} \quad (23.0.8)$$

dove y è considerato come funzione di l .

Sia Y^2 l'area del quadrilatero determinato dall'intersezione degli assi di quattro fili uniti della bobina con un piano passante per l'asse di questa bobina; $Y^2 l$ sarà il volume occupato nella bobina da una lunghezza l del filo ricoperto dal suo avvolgimento isolante, y compreso nello spazio vuoto che rimane necessariamente compreso tra le spire della bobina. Il volume totale della bobina è quindi

$$V = \int Y^2 dl \quad (23.0.9)$$

essendo Y considerato come una funzione di l . Ma, poiché la bobina è una figura di rivoluzione,

$$V = 2\pi \iint r^2 \sin^2 \theta dr d\theta \quad (23.0.10)$$

o, esprimendo r in termini di x , dalla (23-6)

$$V = 2\pi \iint x^2 (\sin \theta)^{\frac{5}{2}} dx d\theta \quad (23.0.11)$$

Ora $2\pi \int_0^\pi (\sin \theta)^{\frac{5}{2}} d\theta$ è una quantità numerica, detta N , allora

$$V = \frac{1}{3} N x^3 - V_0 \quad (23.0.12)$$

dove V_0 è il volume dello spazio interno lasciato libero del magnete.

Consideriamo ora uno strato della bobina compreso tra le superfici x e $x + dx$.

Il volume di questo strato è

$$dV = Nx^2 dx = Y^2 dl \quad (23.0.13)$$

dove dl è la lunghezza del filo in questo strato.

Abbiamo così dl in funzione di dx . Sostituendo nelle (23-7) e (23-8), troviamo

$$dG = N \frac{dx}{Y^2} \quad (23.0.14)$$

$$dR = N \frac{\rho x^2 dx}{\pi Y^2 y^2} \quad (23.0.15)$$

dove dG e dR rappresentano le parti del valore di G e di R che sono dovuti a questo strato della bobina.

Ora, se E è la forza elettromotrice data

$$E = \gamma (R + r)$$

dove r è la resistenza della parte esterna del circuito, che è indipendente dal galvanometro, e la forza agente al centro è

$$\gamma G = E \frac{G}{R + r}$$

Dobbiamo quindi rendere $\frac{G}{R+r}$ massimo, scegliendo opportunamente la sezione del filo di ogni strato: ciò che implica necessariamente una variazione di Y , poiché Y dipende da y .

Siano G_0 e R_0 i valori di G e di $R + r$, quando non si fa intervenire nel calcolo lo strato considerato. Abbiamo allora

$$\frac{G}{R + r} = \frac{G_0 + dG}{R_0 + dR} \quad (23.0.16)$$

e affinché divenga massimo per la variazione del valore di y che corrisponde allo strato considerato, dobbiamo avere

$$\frac{\frac{d}{dy} \cdot dG}{\frac{d}{dy} \cdot dR} = \frac{G}{R + r} \quad (23.0.17)$$

Poiché dx è molto piccolo e nullo, al limite, $\frac{G_0}{R_0}$ sarà all'incirca e, al limite, esattamente lo stesso, qualunque sia lo strato che non si fa intervenire nel calcolo; possiamo quindi considerarlo come costante. Abbiamo quindi, dalla (23-14) e (23-15)

$$\frac{\rho x^2}{\pi y^2} \left(1 + \frac{Y}{y} \frac{dy}{dY} \right) = \frac{R + r}{G} = \text{cost} \quad (23.0.18)$$

Se, ricoprendo il filo e avvolgendolo, si è fatto in modo che vi sia sempre lo stesso rapporto tra lo spazio occupato dal metallo del filo e quello occupato dall'intero filo, sia che il filo sia grosso o sottile, si ha

$$\frac{Y}{y} \frac{dY}{dy} = 1$$

e dobbiamo fare y e Y proporzionali a x , cioè in modo che il diametro del filo che forma uno strato sia proporzionale alla dimensione lineare di questo strato.

Se lo spessore dell'avvolgimento isolante è costante e uguale a b , e se i fili sono disposti in quadrati

$$V = 2(y + b) \quad (23.0.19)$$

e la condizione è

$$\frac{x^2(2y+b)}{y^3} = \text{cost} \quad (23.0.20)$$

In questo caso, il diametro del filo cresce contemporaneamente al diametro dello strato di cui fa parte, ma non così velocemente.

Se adottiamo la prima di queste ipotesi, che è all'incirca esatta se lo stesso filo riempie quasi interamente tutto lo spazio, possiamo porre

$$y = \alpha x \quad Y = \beta y$$

dove α e β sono quantità costanti numeriche e

$$G = N \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right)$$

$$R = N \frac{\rho}{\pi \alpha^4 \beta^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right)$$

dove a è una costante dipendente dalla grandezza e dalla forma dello spazio lasciato libero all'interno della bobina.

Pertanto, se facciamo variare la grossezza del filo nello stesso rapporti per x , vi assai poco vantaggio nell'aumentare le dimensioni esterne della bobina, una volta che queste dimensioni hanno raggiunto un multiplo elevato delle dimensioni interne.

720. Se non è un inconveniente l'incremento della resistenza, quando per esempio la resistenza esterna è assai più grande di quella del galvanometro, o quando ci si propone unicamente di produrre un campo di forza intenso, si fare porre y e Y costanti. Allora si ha

$$G = \frac{N}{Y^2} (x - a)$$

$$R = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\pi} \frac{N}{Y^2 y^2} (x^3 - a^3)$$

dove a è una costante dipendente dallo spazio lasciato libero all'interno della bobina. Allora il valore di G cresce uniformemente con l'aumentare delle dimensioni della bobina, e non vi è limite al valore di G se non nelle difficoltà costruttive e nel costo della bobina.

Bobine sospese

721. Nel comune galvanometro, un magnete sospeso è soggetto all'azione di una bobina fissa. Ma, se si riesce a sospendere la bobina con molta premura, si potrà determinare l'azione di un magnete o di una bobina fissa su quella sospesa, dalla deviazione che subisce questa bobina dalla sua posizione di equilibrio.

Si può far passare corrente elettrica nella bobina, senza che vi sia contatto metallico tra gli elettrodi della pila e quelli della bobina. Questo contatto può essere realizzato in due modi: con una sospensione bifilare o con fili che vanno in direzioni opposte.

Si è già descritta la sospensione bifilare al § 459, a proposito della sua applicazione ai magneti. La fig. 52 mostra il modo di disporre la parte superiore di questa sospensione. Quando la si applica alle bobine, i due fili non più di seta, ma in metallo; e, siccome la torsione di un filo di metallo capace di sostenere la bobina e di trasmetterle corrente è più considerevole di quella di un filo di seta, bisogna tenerne conto in modo particolare. Questo tipo di sospensione è stato portato ad un alto grado di perfezione negli strumenti costruiti da M. Weber.

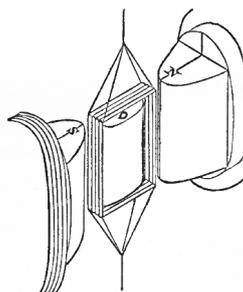


Fig. 52.

Nell'altro modo di sospensione, un solo filo è attaccato a una delle estremità della bobina; un altro filo, attaccato all'altra estremità e pendente verticalmente sul prolungamento del primo, pesca in una ciotola di mercurio, così come si vede nella fig. 56, § 726. In alcuni casi, conviene fissare le estremità dei due fili a delle parti che possano tenerli fortemente tesi, avendo cura che la linea dei fili passi per il centro di gravità della bobina. In questa forma, lo strumento può essere impiegato, anche quando l'asse non è verticale (si veda la fig. 52).

722. Una bobina sospesa può costituire un galvanometro estremamente sensibile; basta aumentare l'intensità magnetica del campo nel quale è sospesa, per accrescere di molto la forza sviluppata al passaggio di una debole corrente, senza che di debba aggiungere nulla alla massa della bobina. A tale scopo, si può produrre la forza magnetica per mezzo di un magnete permanente o di elettromagneti eccitati da una corrente ausiliaria, e la si può concentrare energicamente sulla bobina sospesa, per mezzo di armature di ferro dolce. -Così, nello strumento registratore di sir W. Thomson (fig. 52), la bobina è sospesa tra i poli opposti degli elettromagneti *N* e *S*. Per concentrare le linee di forza magnetiche sui lati verticali della bobina, un pezzo di ferro dolce *D* è posto tra i poli della bobina; questo ferro, magnetizzandosi, produce un campo di forza molto intenso nello spazio che lo separa dagli elettromagneti, spazio nel quale si muovono liberamente i lati verticali della bobina; di conseguenza, anche quando passa solo una debole corrente, la bobina è sottoposta all'azione di una forza molto intensa, tendente a farla ruotare attorno al suo asse verticale.

723. Si può pure impiegare una bobina sospesa per determinare, per confronto con una bussola delle tangenti, la componente orizzontale del magnetismo terrestre.

La bobina è sospesa in modo da trovarsi in equilibrio stabile quando il suo piano è parallelo al meridiano magnetico. Si fa passare una corrente γ che devia la bobina fino a una nuova posizione di equilibrio formante un angolo θ con il meridiano magnetico. Se la sospensione è bifilare, il momento della coppia che produce questa deviazione è $F \sin \theta$ e deve essere uguale a $H\gamma g \cos \theta$, dove H è la componente orizzontale del magnetismo terrestre; γ l'intensità nella bobina e g la somma delle aree di tutte le spire della bobina. Da cui

$$H\gamma = \frac{F}{g} \tan \theta$$

Se A è il momento d'inerzia della bobina, rispetto all'asse di sospensione, e se T è la durata di una oscillazione semplice

$$FT^2 = \pi^2 A$$

da cui ricaviamo

$$H\gamma = \frac{\pi^2 A}{T^2 g} \tan \theta$$

Se la stessa corrente, attraversante la bobina di un galvanometro delle tangenti, devia il magnete di un angolo ϕ ,

$$\frac{\gamma}{H} = \frac{1}{G} \tan \phi$$

dove G è la costante principale del galvanometro delle tangenti, § 710.

Da queste due equazioni otteniamo

$$H = \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{AG \tan \theta}{g \tan \phi}} \quad \gamma = \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{A \tan \theta \tan \phi}{Gg}}$$

Questo metodo è stato indicato da F. Kohltrausch¹.

724. Sir W. Thomson ha costruito uno strumento unico, per mezzo del quale un solo osservatore può fare insieme le osservazioni necessarie per determinare H e γ .

La bobina è sospesa in modo da essere in equilibrio quando il suo piano è nel meridiano magnetico; essa è deviata da questa posizione quando è attraversata da una corrente. Un magnete molto piccolo, sospeso al centro della bobina, è deviato dalla corrente in senso contrario alla deviazione della bobina. Siano θ la deviazione della bobina e ϕ quella del magnete: la parte variabile dell'energia del sistema è

$$H\gamma g \sin \theta + m\gamma G \sin(\theta - \phi) - Hm \cos \phi - F \cos \theta$$

Differenziando rispetto a θ e ϕ , otteniamo l'equazione di equilibrio rispettivamente della bobina e del magnete

$$\begin{aligned} H\gamma g \cos \theta + m\gamma G \cos(\theta - \phi) + F \sin \theta &= 0 \\ -m\gamma G \cos(\theta - \phi) + Hm \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

Da queste equazioni troviamo, eliminando H o γ , un'equazione quadratica da cui possiamo ricavare γ o H . Se m , il momento magnetico del magnete sospeso, è molto piccolo, otteniamo i seguenti valori approssimati

$$\begin{aligned} H &= \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{-AG \sin \theta \cos(\theta - \phi)}{g \cos \theta \sin \phi}} - \frac{1}{2} \frac{mG \cos(\theta - \phi)}{g \cos \theta} \\ \gamma &= \frac{\pi}{T} \sqrt{\frac{-A \sin \theta \sin \phi}{Gg \cos \theta \cos(\theta - \phi)}} - \frac{1}{2} \frac{m \sin \phi}{g \cos \theta} \end{aligned}$$

In queste espressioni G e g sono le principali costanti elettriche della bobina, A il momento di inerzia, T il tempo di vibrazione, m il momento magnetico del magnete, H l'intensità della componente orizzontale della forza magnetica, γ l'intensità di corrente, θ la deviazione della bobina e ϕ quella del magnete.

Poiché la deviazione della bobina è in verso contrario a quella del magnete, questi valori di H e di γ saranno sempre reali.

¹Pogg. Ann., vol. CXXXVIII, febbraio 1869.

Elettrodinamometro di Weber

725. In questo strumento, una piccola bobina è sospesa all'interno di una bobina fissa più grande mediante due fili metallici. Quando una corrente attraversa le due bobine, quella sospesa tende a disporsi parallelamente a quella fissa. Questa tendenza è contrastata dal momento delle forze sviluppate nella sospensione bifilare, e dipende pure dal magnetismo terrestre, che agisce sulla bobina sospesa.

Abitualmente, quando si impiega questo strumento, i piani delle due bobine sono circa ad angolo retto, in modo che l'azione reciproca delle correnti che le attraversano sia la più grande possibile: e il piano della bobina sospesa è pressoché perpendicolare al meridiano magnetico, in modo che l'azione del magnetismo terrestre sia il più piccolo possibile.

Sia α l'azimut magnetico del piano della bobina fissa, e sia $\theta + \beta$ l'angolo che l'asse della bobina mobile forma con il piano di quella fissa, essendo β il valore di questo angolo quando la bobina non è attraversata da alcuna corrente, e si trova nella sua posizione di equilibrio, dove θ è la deviazione dovuta alla corrente. L'equazione di equilibrio è

$$Gg\gamma_1\gamma_2 \cos(\theta + \beta) - Hg\gamma_2 \sin(\theta + \beta + \alpha) - F \sin \theta = 0$$

Supponiamo lo strumento regolato in modo che α e β siano entrambi molto piccoli, e che $Hg\gamma_2$ sia piccolo rispetto a F . Abbiamo allora approssimativamente

$$\tan \theta = \frac{Gg\gamma_1\gamma_2 \cos \beta}{F} - \frac{Hg\gamma_2 \sin(\alpha + \beta)}{F} - \frac{HGg^2\gamma_1\gamma_2}{F^2} - \frac{G^2g^2\gamma_1\gamma_2 \sin \beta}{F^2}$$

Se, cambiando i segni di γ_1 e γ_2 , le deviazioni sono le seguenti

$$\begin{array}{ll} \theta_1 & \text{quando } \gamma_1 \text{ è } + \text{ e } \gamma_2 \text{ } + \\ \theta_2 & \text{quando } \gamma_1 \text{ è } - \text{ e } \gamma_2 \text{ } - \\ \theta_3 & \text{quando } \gamma_1 \text{ è } + \text{ e } \gamma_2 \text{ } - \\ \theta_4 & \text{quando } \gamma_1 \text{ è } - \text{ e } \gamma_2 \text{ } + \end{array}$$

allora troviamo

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{1}{4} \frac{F}{Gg \cos \beta} (\tan \theta_1 + \tan \theta_2 - \tan \theta_3 - \tan \theta_4)$$

e, se è la stessa corrente ad attraversare le due bobine, si può porre $\gamma_1\gamma_2 = \gamma^2$ e ottenere così il valore di γ .

Se le correnti non sono molto costanti, è preferibile servirsi di questo metodo, che è detto metodo delle tangenti.

Se le correnti sono assai costanti affinché si possa regolare l'angolo β della testa di torsione dello strumento, il metodo dei seni permette di eliminare completamente la correzione relativa al magnetismo terrestre. Questo metodo consiste nel regolare β in modo che la deviazione sia nulla, cioè che $\theta = -\beta$.

Se i segni di γ_1 e γ_2 sono indicati da indici applicati a β , come in precedenza,

$$\begin{array}{l} F \sin \beta_1 = -F \sin \beta_3 = -Gg\gamma_1\gamma_2 + Hg\gamma_2 \sin \alpha \\ F \sin \beta_2 = -F \sin \beta_4 = -Gg\gamma_1\gamma_2 - Hg\gamma_2 \sin \alpha \end{array}$$

e

$$\gamma_1\gamma_2 = -\frac{F}{4Gg} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2 - \sin \beta_3 - \sin \beta_4)$$

Di questo metodo si è servito M. Latimer Clark, con lo strumento costruito dal Comitato per l'Elettricità dell'Associazione Britannica. Dobbiamo a M. Latimer Clark il disegno dell'elettrodinamometro (fig. 53) nel quale si è adottato il dispositivo a due bobine di Helmholtz per la bobina fissa e per la bobina sospesa².

²In realtà, nello strumento, i fili di andata e ritorno della corrente alle bobine non sono lontani, così come sono rappresentati in figura, di modo che loro azioni elettromagnetiche si neutralizzano l'una con l'altra.

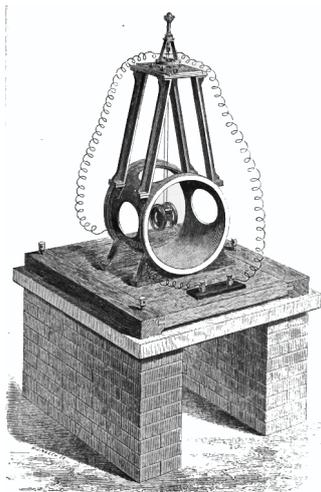


Fig. 53.

La fig. 54 rappresenta la testa di torsione, per mezzo della quale si regola la sospensione bifilare. I fili di sospensione deve essere ugualmente tesi: ci si assicura di questo attaccando le loro estremità a un filo di seta che passa su un rullo; la distanza tra i fili è regolata per mezzo di due ruote scanalate, che si possono collocare alla distanza voluta. La bobina sospesa può essere spostata verticalmente mediante una vite che agisce sul rullo di sospensione; essa può essere spostata orizzontalmente, nelle due direzioni, per mezzo di guide scorrevoli rappresentate alla base della fig. 54. Essa è regolata in azimut con la vite tangente che fa ruotare la testa di torsione attorno ad un asse verticale (si veda § 459). Si determina il suo azimut osservando una scala per riflessione in uno specchio che si vede proprio al di sotto dell'asse della bobina sospesa.

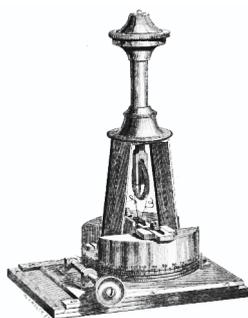


Fig. 54.

Lo strumento inizialmente costruito da Weber, e che si trova descritto nelle *Electrodynamische Maasbestimmungen*, era destinato alla misura di correnti deboli; così le bobine fissa e mobile sospese erano entrambe dotate di un gran numero di spire, e la bobina mobile occupava all'interno della bobina fissa uno spazio ben più grande che nello strumento dell'Associazione Britannica, il quale doveva essere, in origine, uno strumento campione, al quale si potrebbero paragonare altri strumenti più sensibili. Le esperienze che Weber ha fatto con il suo strumento costituiscono la dimostrazione sperimentale più completa dell'esattezza della formula di Ampère, per quanto riguarda le correnti chiuse; esse formano pure una parte importante delle ricerche con le quali

Weber ha portato a un così alto livello di precisione la determinazione numerica delle quantità elettriche.

La forma dell'elettrometro di Weber, dove una bobina, sospesa all'interno dell'altra, è soggetta all'azione di una coppia che tende a farla ruotare attorno ad un asse verticale, è probabilmente quella che conviene maggiormente per le misure assolute. Si espone al § 697 un metodo per calcolare le costanti in un simile sistema.

726. Ma, se si vuole produrre, per mezzo di una debole corrente, una forza elettromagnetica considerevole, è preferibile porre la bobina mobile parallelamente a quella fissa, permettendole di avvicinarsi ed allontanarsi da essa.

Nell'elettrodinometro a peso del Dr. Joule (fig. 55), la bobina sospesa è orizzontale e può assumere un movimento verticale; la forza che agisce tra essa e la bobina fissa si valuta con il peso che bisogna aggiungere o togliere dalla bobina, per riportarla alla posizione che essa occupa rispetto alla bobina fissa, quando non passa corrente.

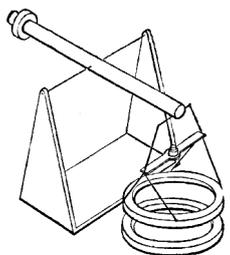


Fig. 55.

La bobina sospesa può pure essere fissata all'estremità dell'asta orizzontale di una bilancia di torsione: la si pone allora tra due bobine fisse, di cui una l'attira e l'altra la respinge (fig. 60).

Disponendo le bobine come si spiega al § 729, si può rendere la forza che agisce sulla bobina sospesa pressoché uniforme, fintanto che non si allontani molto dalla posizione di equilibrio.

Si può fissare all'altro capo dell'asta della bilancia di torsione una seconda bobina e porla tra due bobine fisse. Se le due bobine sospese sono simili, ma attraversate in verso contrario della corrente, l'effetto del magnetismo terrestre sulla posizione dei bracci della bilancia di torsione si trova completamente eliminato.

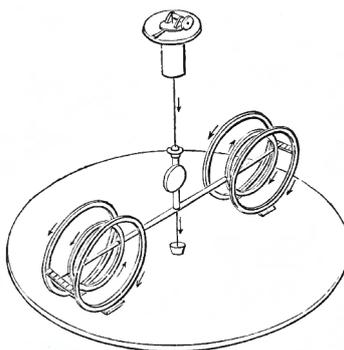


Fig. 56.

727. Se la bobine mobile ha la forma di un solenoide allungato capace di muoversi parallelamente al suo asse, in modo da passare all'interno del solenoide fisso, più grande e avente lo stesso asse, e se la corrente attraversa i due solenoidi nello stesso verso, il solenoide sospeso è attirato all'interno di quello fisso con una forza che rimane pressoché uniforme fintanto che le estremità dei solenoidi non divengono vicine.

728. Per produrre una forza longitudinale uniforme su una piccola bobina posta tra due bobine uguali tra loro e di dimensioni molto maggiori, si dovrà fare in modo che il rapporto del diametro delle grandi bobine con la distanza tra i loro piani sia di 2 a $\sqrt{3}$. Se si fa passare la stessa corrente in versi contrari in queste due bobine, i termini contenenti potenze dispari di r scompaiono dall'espressione di ω , e, poiché $\sin^2 \alpha = \frac{4}{7}$ e $\cos^2 \alpha = \frac{3}{7}$, il termine in r^4 svanisce pure, e la parte variabile di ω si riduce a

$$\frac{8}{7} \sqrt{\frac{3}{7}} \pi n \gamma \left\{ 3 \frac{r^2}{c^2} P_2(\theta) - \frac{11}{7} \frac{r^6}{c^6} P_6(\theta) + \dots \right\}$$

e ciò indica che la forza che agisce sulla piccola bobina sospesa è quasi uniforme. In questo caso, la disposizione delle bobine è quella di due bobine esterne del galvanometro a tre bobine, descritto al § 715 (si veda la fig. 50).

729. Se si vuole sospendere una bobina tra altre due sufficientemente ravvicinate affinché la distanza dei fili che agiscono l'uno sull'altro sia piccola rispetto al raggio delle bobine, si otterrà l'azione più uniforme prendendo il raggio delle bobine esterne superiore a quello della bobina intermedia a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ della distanza compresa tra il piano della bobina mediana e quella di una delle bobine esterne. Ciò risulta dall'espressione stabilita al § 704, relativamente alla mutua induzione di due correnti circolari.

24 Osservazioni elettromagnetiche

730. Tra le misure di quantità elettriche, ve ne sono parecchie che dipendono dall'osservazione di movimenti di un corpo oscillante, tanto che dobbiamo avere qualche attenzione allo studio di questo movimento e dei metodi più opportuni per una migliore osservazione.

Generalmente, le piccole oscillazioni di un corpo attorno alla sua posizione di equilibrio stabile sono simili a quelle di un punto sottoposto all'azione di una forza variante proporzionalmente alla sua distanza da un punto fisso. Nel caso di corpi oscillanti che intervengono nelle nostre esperienze, vi è anche una resistenza al moto che dipende da un certo numero di cause, come la viscosità dell'aria e quella del filo di sospensione. In un gran numero di strumenti elettrici, vi è un'altra causa di resistenza, cioè l'azione di riflesso delle correnti indotte nei circuiti conduttori vicini a magneti in movimento. Essendo queste correnti indotte dal movimento del magnete, seconda la legge di Lenza, la loro azione sul magnete è invariabilmente opposta al moto. In molti casi, è da ciò che viene la maggior parte della resistenza.

Talvolta, si pone vicino al magnete un circuito metallico detto ammortizzatore, che ha precisamente lo scopo di spegnere e ammortizzare le oscillazioni. Per questo indichiamo questo tipo di resistenza con il nome di estinzione.

Nel caso di oscillazioni lente, che si possono facilmente osservare, l'intera resistenza, qualunque siano le cause che la originano, sembra essere proporzionale alla velocità. È solo nel caso di velocità molto maggiori di quelle delle oscillazioni abituali degli strumenti elettromagnetici, che si constata una resistenza proporzionale al quadrato della velocità.

Dobbiamo pertanto studiare il movimento di un corpo sottoposto a un'attrazione proporzionale alla velocità.

731. L'applicazione seguente del principio dell'odografia, dovuto al professor Tait ci permette di studiare questo tipo di moto in un modo molto semplice mediante una spirale equiangolo.

Proponiamoci di trovare l'accelerazione di un punto materiale che descrive una spirale logaritmica o equiangola, ruotando attorno al polo con una velocità angolare uniforme ω .

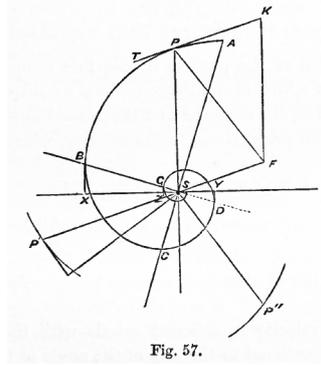
È la proprietà di questa spirale, che la tangente PT forma con il raggio vettore PS un angolo costante α .

Se v è la velocità nel punto P ,

$$v \cdot \sin \alpha = \omega \cdot SP$$

Se quindi tracciamo SP' parallela a PT e uguale a SP , la velocità nel punto P ci sarà data in modulo e direzione da

$$v = \frac{\omega}{\sin \alpha} SP'$$



P' è quindi un punto dell'odografia; ma SP' non che altro che SP ruotato dell'angolo $\pi - \alpha$, cioè l'odografia descritta da P non è altro che la spirale iniziale che ha ruotato attorno al suo polo dell'angolo $\pi - \alpha$.

L'accelerazione di P è rappresentata in modulo e direzione dalla velocità di P' , moltiplicata per lo stesso fattore $\frac{\omega}{\sin \alpha}$.

Se quindi si fa subire a SP' la stessa rotazione di un angolo $\pi - \alpha$, fino alla posizione SP'' , l'accelerazione di P sarà uguale, in modulo e direzione,

$$\frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} SP''$$

dove SP'' è uguale a SP ruotato di un angolo $2\pi - 2\alpha$.

Se tracciamo PF uguale e parallelo a SP'' , l'accelerazione sarà $\frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} PF$, che si può risolvere in

$$\frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} PS \quad \frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} PK$$

La prima di queste componenti è una forza centrale, diretta verso S , e proporzionale alla distanza.

La seconda è diretta in verso contrario alla velocità, e poiché

$$PK = 2 \cos \alpha P'S = -2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\omega} v$$

questa forza può essere scritta

$$-2 \frac{\omega \cos \alpha}{\sin \alpha} v$$

L'accelerazione del punto materiale si compone di due parti: una è la forza attrattiva, l'altra è una resistenza al movimento $-2kv$, proporzionale alla velocità, con

$$\mu = \frac{\omega^2}{\sin^2 \alpha} \quad k = \omega \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Se, in queste espressioni, poniamo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la traiettoria diviene un cerchio, e abbiamo $\mu_0 = \omega_0^2$ e $k = 0$.

Pertanto, se la legge dell'attrazione rimane la stessa,

$$\mu = \mu_0 \quad \omega = \omega_0 \sin \alpha$$

cioè che per la stessa legge di attrazione la velocità angolare sulle diverse spirali è proporzionale al seno dell'angolo della spirale.

732. Se, ora, consideriamo il movimento di un punto che è la proiezione del punto P sulla linea orizzontale XY , vediamo che la sua distanza dal punto S e la sua velocità sono le componenti orizzontali degli stessi elementi per il punto P . Pertanto, l'accelerazione di questo punto si compone: di una accelerazione verso S uguale a μ volte la distanza da S e da un ritardo uguale a $2k$ volte la velocità.

Possiamo quindi costruire interamente il movimento rettilineo di un punto che è soggetto a un'attrazione proporzionale alla sua distanza da un punto fisso e a una resistenza proporzionale alla velocità. Il movimento di un simile punto non è altro che la componente orizzontale del movimento di un altro punto che descrive una spirale logaritmica con una velocità angolare costante.

733. L'equazione della spirale è

$$r = Ce^{-\phi \cot \alpha}$$

Per determinare il moto orizzontale, poniamo

$$\phi = \omega t \quad x = a + r \sin \phi$$

dove a è il valore di x per il punto di equilibrio.

Se tracciamo BSD , formante con la verticale un angolo α , le tangenti BX, DY, GZ, \dots , saranno verticali, e X, Y, Z saranno le estremità delle oscillazioni successive.

734. Nei corpi oscillanti, si devono osservare gli elementi seguenti:

1° Lettura della scala corrispondente ai punti in cui la velocità cambia di segno: è ciò che si chiama elongazione;

2° Momento del passaggio a una data divisione della scala, nel verso positivo o negativo:

3° Letture della scala in certi momenti stabiliti. Si fanno raramente osservazioni di questa natura, salvo nel caso di oscillazioni a lungo periodo¹.

Le quantità che si devono determinare sono:

1° La lettura della scala per la posizione di equilibrio;

2° Il decremento logaritmico delle oscillazioni;

3° Il periodo di oscillazione.

Da tre elongazioni successive, determinare la lettura che corrisponde alla posizione di equilibrio

735. Siano x_1, x_2, x_3 le letture della scala corrispondenti alle elongazioni X, Y, Z ; sia a la lettura corrispondente alla posizione di equilibrio S , e sia r_1 il valore di SB ,

$$\begin{aligned} x_1 - a &= r_1 \sin \alpha \\ x_2 - a &= -r_1 \sin \alpha e^{-\pi \cot \alpha} \\ x_3 - a &= r_1 \sin \alpha e^{-2\pi \cot \alpha} \end{aligned}$$

Da questi valori troviamo

$$(x_1 - a)(x_3 - a) = (x_2 - a)^2$$

da cui

$$a = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 + x_2 - 2x_3}$$

Quando x_3 non differisce molto da x_1 possiamo usare una formula approssimata

$$a = \frac{1}{4}(x_1 + 2x_2 + x_3)$$

¹Si veda Gauss, *Resultate des Magnetischen Vereins*, 1836, II.

Determinare il decremento logaritmico

736. Si chiama decremento logaritmico il logaritmo del rapporto tra l'ampiezza di una oscillazione e l'ampiezza dell'oscillazione successiva. Se indichiamo questo rapporto con ρ ,

$$\rho = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} \quad L = \log_{10} \rho \quad \lambda = \ln \rho$$

L è detto il decremento logaritmico comune, e λ il decremento logaritmico Neperiano. È evidente che

$$\lambda = L \ln 10 = \pi \cot \alpha$$

Pertanto

$$\alpha = \cot^{-1} \frac{\lambda}{\pi}$$

che determina l'angolo della spirale logaritmica.

Quando ci si propone in particolare di determinare λ , si lascia che il corpo esegua un numero considerevole di oscillazioni. Se c_1 è l'ampiezza della prima e c_n quella della n -esima oscillazione,

$$\lambda = \frac{1}{n-1} \ln \left(\frac{c_1}{c_n} \right)$$

Se supponiamo che le osservazioni di piccole oscillazioni siano più precisa di quelle di grandi, si dovrà, per ottenere il miglior valore di λ , lasciare smorzare le oscillazioni finché il rapporto tra c_1 e c_n diviene, all'incirca, uguale alla base e del sistema dei logaritmi neperiani. È quanto avviene quando n è il numero intero più vicino a $\frac{1}{\lambda} + 1$.

Ma siccome, nella maggior parte dei casi, il tempo è prezioso, vale meglio fare la seconda serie di osservazioni prima che l'ampiezza sia diminuita a tal punto.

737. In certi casi, si può dover determinare la posizione dopo due oscillazioni consecutive, il decremento logaritmico noto da una speciale esperienza. Si ha allora

$$a = \frac{x_1 + e^\lambda x_2}{1 + e^\lambda}$$

Tempo di oscillazione

738. Avendo determinato la lettura della scala che corrisponde alla posizione di equilibrio, si mette un segno ben visibile in questo punto della scala o, almeno, il più vicino possibile; e, durante numerosi oscillazioni successive, si annota il momento del passaggio davanti a questo segno.

Supponiamo che il segno sia dalla parte positiva del punto di equilibrio, a una distanza x incognita, ma molto piccola, e sia t_1 il momento osservato al primo passaggio davanti al segno, andando il mobile nel verso positivo, e siano t_2, t_3, \dots i momenti dei passaggi successivi.

Se T è il periodo di oscillazione e se P_1, P_2, P_3, \dots sono i momenti del passaggio alla vera posizione di equilibrio,

$$t_1 = P_1 + \frac{x}{v_1} \quad t_2 = P_2 + \frac{x}{v_2} \quad \dots$$

dove v_1, v_2, \dots sono le velocità nel momento dei passaggi successivi, velocità che si possono considerare come uniformi sul percorso molto piccolo x .

Se ρ è il rapporto dell'ampiezza di una oscillazione con l'ampiezza dell'oscillazione seguente:

$$v_1 = -\frac{v_1}{\rho} \quad \frac{x}{v_2} = -\rho \frac{x}{v_1}$$

Se si sono osservati tre passaggi nei momenti t_1, t_2, t_3 , si trova

$$\frac{x}{v_1} = \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{(\rho + 1)^2}$$

Il periodo di oscillazione è quindi

$$T = \frac{1}{3}(t_3 - t_1) - \frac{1}{2} \frac{\rho - 1}{\rho + 1} (t_1 - 2t_2 + t_3)$$

Il tempo del secondo passaggio nel vero punto di equilibrio è

$$P_2 = \frac{1}{4}(t_1 + 2t_2 + t_3) - \frac{1}{4} \frac{(\rho - 1)^2}{(\rho + 1)^2} (t_1 - 2t_2 + t_3)$$

Tre transiti bastano a determinare queste tre quantità, ma se ne può combinare un numero maggiore con il metodo dei minimi quadrati. Così per cinque passaggi

$$T = \frac{1}{10}(2t_5 + t_4 - t_2 - 2t_1) - \frac{1}{10}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5) \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \left(2 \frac{\rho}{1 + \rho^2} \right)$$

Il momento del terzo transito è

$$P_3 = \frac{1}{8}(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2t_4 + t_5) - \frac{1}{8}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5) \frac{(\rho - 1)^2}{(\rho + 1)^2}$$

739. Si può estendere lo stesso metodo a una serie di un numero qualunque di oscillazioni. Se la rapidità delle oscillazioni non permette di annotare tutti i passaggi, si possono annotare tutti i terzi o i quinti passaggi, avendo cura che i passaggi successivi siano nel verso contrario. Se le oscillazioni continuano regolarmente per lungo tempo, non si ha bisogno di osservarle tutto questo tempo. Si può cominciare con l'osservare un numero di passaggi sufficienti per determinare approssimativamente il periodo di oscillazione T e il momento del passaggio medio P , e si annota se questo passaggio avviene nella direzione positivo o negativa. Poi si può continuare a contare le oscillazioni, senza annotare il momento del passaggio, o anche si può abbandonare lo strumento a se stesso senza sorvegliarlo. Si osserva poi una seconda serie di passaggi; se ne deduce il periodo di oscillazione T' e il momento del passaggio medio P' , e se ne annota la direzione.

Se T e T' , i periodi di oscillazione dedotti dalle due serie di osservazioni, sono circa uguali, si può passare a una misura più esatta del periodo ottenuto combinando le due serie di osservazioni.

Dividendo $P' - P$ per T , il quoziente deve essere molto vicino a un numero intero, pari o dispari, a seconda che i passaggi P e P' avvengono nella stessa direzione o in direzioni opposte. Se così non è, la serie di osservazioni non vale; se, al contrario, il risultato è molto vicino a un numero intero n , si divide $P' - P$ per n , e si trova così il valore medio di P per la durata intera delle oscillazioni.

740. Il periodo di oscillazione T , così ottenuto, è la durata media delle oscillazioni effettive, e si devono applicargli correzioni se si vuole dedurre il periodo di oscillazioni infinitamente piccole, senza smorzamento.

Per dedurre dal periodo osservato il periodo relativo agli archi infinitamente piccoli, si osserva che il periodo di una oscillazione di ampiezza c è generalmente della forma

$$T = T_1 (1 + \kappa c^2)$$

dove κ è un coefficiente che, nel caso del pendolo ordinario, è uguale a $\frac{1}{64}$. Le ampiezze delle oscillazioni successive sono $c, c\rho^{-1}, c\rho^{-2}, c\rho^{-3}, \dots, c\rho^{1-n}$, di modo che la durata totale di n oscillazioni è

$$nT = T_1 \left(n + \kappa \frac{\rho^2 c_1^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1} \right)$$

dove T è il tempo dedotto dalle osservazioni.

Pertanto, per trovare il tempo T_1 per archi infinitamente piccoli, abbiamo approssimativamente

$$T_1 = T \left\{ 1 - \frac{\kappa}{n} \frac{\rho^2 c_1^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1} \right\}$$

Per trovare il tempo T_0 quando non vi è smorzamento, abbiamo

$$T_0 = T_1 \sin \alpha = T_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$$

741. L'equazione del moto rettilineo di un corpo, attratto verso un punto fisso e soggetto a una resistenza proporzionale alla velocità, è

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + \omega^2 (x - a) = 0 \quad (24.0.1)$$

dove x è la coordinata del corpo al tempo t , e a è la coordinata del punto di equilibrio.

Per risolvere l'equazione, sia

$$x - a = e^{-kt} y \quad (24.0.2)$$

allora

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 - k^2) y = 0 \quad (24.0.3)$$

la soluzione è

$$y = C \cos (\sqrt{\omega^2 - k^2} t + \alpha) \quad (24.0.4)$$

per $k < \omega$

$$y = A + Bt \quad (24.0.5)$$

per $k = \omega$, e

$$y = C' \cos h (\sqrt{k^2 - \omega^2} t + \alpha') \quad (24.0.6)$$

per $k > \omega$ -

Il valore di x si deduce da quello di y dalla (24-2). Se k è più piccolo di ω , il moto consiste in una serie infinita di oscillazioni di periodo costante e di ampiezza costantemente decrescente; aumentando k , il periodo diviene più lungo e l'ampiezza decresce più rapidamente.

Se k , metà del coefficiente di resistenza, diviene uguale o superiore a ω , radice quadrata dell'accelerazione all'unità di distanza dalla posizione di equilibrio, il moto cessa di essere oscillatorio: il punto passa solo una volta dalla posizione di equilibrio, poi raggiunge una posizione di elongazione massima e ritorna poi verso la posizione di equilibrio, avvicinandosi sempre senza mai raggiungerla.

I galvanometri, dove la resistenza è molto grande affinché il moto sia di questa natura, sono detti galvanometri aperiodici. Essi sono molto utili in numerose esperienze, ma soprattutto per le trasmissioni telegrafiche, nelle quali oscillazioni si producono liberamente, mascherando interamente i movimenti che ci si propone di osservare.

Qualunque siano i valori di k e di ω , il valore della lettura a della scala, che corrisponde alla posizione di equilibrio, si può dedurre da cinque letture, p, q, r, s, t prese a intervalli di tempo uguali, per mezzo della formula

$$a = \frac{q(rs - qt) + r(pt - r^2) + s(qr - ps)}{(p - 2q + r)(r - 2s + t) - (q - 2r + s)^2}$$

Osservazioni al galvanometro

742. Per misurare una corrente costante con un galvanometro delle tangenti, si regola lo strumento in modo che il piano delle bobine sia parallelo al meridiano magnetico e si determina lo zero. Si fa allora passare la corrente nelle bobine, e si osserva la deviazione del magnete nella sua nuova posizione di equilibrio. Indichiamola con ϕ .

Allora se H è la forza magnetica orizzontale; G il coefficiente del galvanometro; γ l'intensità di corrente,

$$\gamma = \frac{H}{G} \tan \phi \quad (24.0.7)$$

Se il coefficiente di torsione del filo di sospensione è τMH (si veda § 452), dobbiamo impiegare la formula corretta

$$\gamma = \frac{H}{G} (\tan \phi + \tau \phi \sec \phi) \quad (24.0.8)$$

Valore più vantaggioso della deviazione

743. In alcuni galvanometri, si può far variare a piacere il numero di spire della bobina attraverso la quale passa la corrente. In altri, si può deviare una frazione nota della corrente in un conduttore detto derivazione. Nei due casi, si fa variare il valore di G , cioè l'effetto prodotto sul magnete da una corrente unitaria.

Determiniamo il valore di G per il quale un errore determinato, fatto nell'osservazione della deviazione, produce il più piccolo errore possibile sul valore dell'intensità di corrente che si deduce da questa osservazione.

Differenziando la (24-7), troviamo

$$\frac{d\gamma}{d\phi} = \frac{H}{G} \sec^2 \phi \quad (24.0.9)$$

Eliminando G ,

$$\frac{d\gamma}{d\phi} = \frac{1}{2\gamma} \sin 2\phi \quad (24.0.10)$$

Questa espressione diviene massima per un valore dato di γ , quando la deviazione è di 45° . Si regolerà quindi il valore di G finché $G\gamma$ sia il più vicino possibile ad H ; così, per correnti intense, è preferibile non impiegare un galvanometro troppo sensibile.

Miglior modo di mandare corrente

744. Quando l'osservatore può, mediante una chiave, stabilire o interrompere, in ogni istante, i collegamenti del circuito, è bene manovrare la chiave in modo che il magnete arrivi alla sua posizione di equilibrio con la minor velocità possibile. Il metodo seguente è stato indicato da Gauss.

Supponiamo il magnete nella sua posizione di equilibrio, senza corrente. L'osservatore dà un contatto di breve durata; il magnete si mette in movimento verso la nuova posizione di equilibrio. Si interrompe il contatto: la forza che agisce allora è diretta verso la posizione iniziale di equilibrio e rallenta il movimento. Se questa operazione è stata fatta in modo che il magnete arrivi a riposo esattamente nella sua nuova posizione di equilibrio, l'osservatore può dare un nuovo contatto e mantenerlo: il magnete rimane immobile nella sua nuova posizione.

Trascuriamo l'effetto delle resistenze, così come delle ineguaglianze delle forze totali che agiscono nella nuova e precedente posizione: vogliamo che, durante la tempo della sua prima azione, la nuova forza generi tanta energia cinetica quanto la forza iniziale ne distruggerà quando il circuito verrà interrotto; dobbiamo quindi prolungare la prima azione della corrente finché il

magnete abbia percorso la metà della distanza che separa la vecchia dalla nuova posizione di equilibrio. Allora, la forza iniziale, agente mentre il magnete percorre l'altra metà della sua corsa, dovrà fermarlo esattamente. Il tempo necessario per passare da una posizione di elongazione massima a un punto posto a metà cammino dalla posizione di equilibrio è di $\frac{1}{4}$ di periodo o di $\frac{1}{2}$ di oscillazione semplice.

Da allora, l'osservatore, avendo preliminarmente determinato la durata di una oscillazione semplice, stabilisce il contatto durante un terzo di questo tempo, rompe il contatto per un altro terzo, e, allora, ristabilisce il contatto per il resto della durata dell'esperienza. In questo modo, il magnete resta subito a riposo, ossia con oscillazioni così piccole da poter effettuare la lettura immediatamente, senza attendere che i movimenti si estinguano. A questo scopo, si regola un metronomo in modo che dia tre battute durante una oscillazione semplice del magnete.

La regola è un poco più complicata, se le resistenze sono molto grandi e tali da doverne tener conto; ma allora le oscillazioni si spegnono così rapidamente, che non è necessario correggere la regola precedente.

Per riportare il magnete alla sua posizione di riposo, si rompe il circuito per un terzo di oscillazione, lo si ristabilisce per un altro terzo, e lo si interrompe definitivamente. Si lascia così il magnete fisso nella sua posizione iniziale. Se, immediatamente dopo la lettura diretta, si deve prendere la lettura inversa, si interrompe il circuito per la durata di una oscillazione semplice, poi lo si inverte: il magnete si trova così riportato a riposo nella posizione inversa.

Misura dopo la prima elongazione

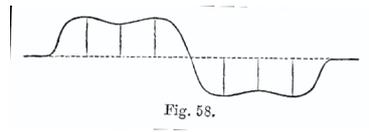
745. Quando manca il tempo di fare più di una osservazione, la corrente può essere misurata dall'elongazione estrema osservata, al momento del primo impulso ricevuto dal magnete. Se non vi è resistenza, la deviazione permanente ϕ è la metà dell'elongazione. Se la resistenza è tale che il rapporto di una oscillazione con la seguente sia uguale a ρ , e se θ_0 è la lettura corrispondente allo zero, θ_1 l'elongazione estrema raggiunta nel primo impulso, la deviazione ϕ che corrisponde alla posizione di equilibrio, è

$$\phi = \frac{\theta_0 + \rho\theta_1}{1 + \rho}$$

In questo modo, si può calcolare la deviazione senza attendere che il magnete si fermi nella sua posizione di equilibrio.

Come si deve fare una serie di osservazioni

746. Se si deve eseguire un numero considerevole di misure su una corrente costante, il modo migliore di procedere è il seguente: si osservano tre elongazioni con la corrente positiva, si interrompe il circuito per la durata di circa una oscillazione semplice, in modo che il magnete vada a porsi oscillando nella posizione di equilibrio dal lato negativo: si inverte allora la corrente, e si osservano tre elongazioni dalla parte positiva, e così di seguito, finché non si abbia ottenuto un numero sufficiente di osservazioni. In questo modo si trovano eliminati gli errori che potrebbero essere dovuti a un cambiamento nella direzione della forza magnetica terrestre sopraggiunti lungo la durata delle osservazioni. Regolando con cura la durata dei collegamenti e delle interruzioni, l'operatore può facilmente regolare l'estensione delle oscillazioni e renderle sufficientemente piccole, senza che cessino di essere distinte. Il movimento del magnete è raffigurata nella fig. 58, dove le ascisse rappresentano i tempi e le ordinate le deviazioni del magnete.



Se $\theta_1, \dots, \theta_6$ sono le elongazioni osservate, la deviazione è data dalla formula

$$8\phi = \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - 2\theta_5 - \theta_6$$

Metodo della moltiplicazione

747. In certi casi, la deviazione del magnete del galvanometro è molto piccola, e può essere utile moltiplicare l'effetto visibile, invertendo il verso della corrente in istanti opportunamente scelti, per imprimere al magnete un moto oscillatorio. A tale scopo, si determina dapprima la durata T di una oscillazione semplice del magnete; allora si invia la corrente nel verso positivo per un tempo T , poi nel verso negativo per la stessa durata, e così di seguito. Quando il movimento del magnete è divenuto visibile, si possono fare le inversioni di corrente negli istanti in cui si osservano le elongazioni più grandi.

Supponiamo che il magnete produca l'elongazione positiva θ_0 , e inviamo la corrente nella bobina nel verso positivo. La posizione di equilibrio è allora $-\phi$, e il magnete si allontano fino a un'elongazione negativa θ_1 , tale che

$$-\rho(\phi + \theta_1) = (\theta_0 + \phi)$$

o

$$-\rho\theta_1 = \theta_0 + (\rho + 1)\phi$$

Analogamente, se, ristabilendo la corrente positiva, si dà al magnete un impulso che lo riporta all'elongazione θ_2

$$\rho\theta_2 = -\theta_1 + (\rho + 1)\phi$$

o

$$\rho^2\theta_2 = \theta_0 + (\rho + 1)^2\phi$$

e se la corrente è invertita n volte di seguito, troviamo

$$(-1)^n \theta_n = \rho^{-n}\theta_0 + \frac{\rho + 1}{\rho - 1} (1 - \rho^{-n}) \phi$$

da cui possiamo trovare ϕ nella forma

$$\phi = (\theta_n - \rho^{-n}\theta_0) \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \frac{1}{1 - \rho^{-n}}$$

Se n è un numero così grande che ρ^{-n} può essere trascurato, l'espressione diviene

$$\phi = \theta_n \frac{\rho - 1}{\rho + 1}$$

L'applicazione di questo metodo per misure esatte richiede un'accurata conoscenza di ρ , il rapporto di una oscillazione del magnete con la successiva sotto l'azione delle resistenze che subisce. Siccome è difficile evitare irregolarità nel valore di ρ , le incertezze che risultano da queste irregolarità controbilanciano in genere il vantaggio di una forte deviazione; e, in realtà, è soltanto quando si vuole mettere in evidenza l'esistenza di una debole corrente, facendogli produrre un movimento visibile dell'ago, che questo metodo presenta qualche valore.

Misura di correnti istantanee

748. Quando la durata di una corrente è solo una frazione molto piccola del periodo di oscillazione del magnete del galvanometro, la quantità totale di elettricità trasmessa dalla corrente si può misurare con la velocità angolare impressa al magnete durante il passaggio della corrente, e questa velocità si può dedurre dall'elongazione raggiunta dal magnete nella sua prima oscillazione.

Se si trascurano le resistenze che spengono il movimento del magnete, questo studio è molto facile.

Siano, in un istante qualunque, γ l'intensità di corrente e Q la quantità di elettricità trasmessa; si ha

$$Q = \int \gamma dt \quad (24.0.11)$$

Siano M il momento magnetico e A il momento di inerzia del magnete e del sistema sospeso

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + MH \sin \theta = MG\gamma \cos \theta \quad (24.0.12)$$

Se la durata del passaggio della corrente è molto breve, possiamo integrare, rispetto a t questa durata, senza tener conto della variazione di θ ; troviamo

$$A \frac{d\theta}{dt} = MH \cos \theta_0 \int \gamma dt + C = MGQ \cos \theta_0 + C \quad (24.0.13)$$

Si vede che il passaggio della quantità di elettricità Q comunica al magnete una quantità di moto angolare $MGQ \cos \theta_0$, dove θ_0 è il valore di θ nel momento del passaggio della corrente. Se, inizialmente, il magnete fosse in equilibrio, si può porre $\theta_0 = 0$.

Poi il magnete, oscillando liberamente, raggiunge una elongazione θ_1 . Se non c'è resistenza, il lavoro effettuato in questa oscillazione contro la forza magnetica è

$$MH (1 - \cos \theta_1)$$

L'energia ceduta al magnete dal passaggio di corrente è

$$\frac{1}{2} A \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Eguagliando queste quantità, troviamo

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2 \frac{MH}{A} (1 - \cos \theta_1) \quad (24.0.14)$$

da cui, dalla (24-13)

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \sqrt{\frac{MH}{A}} \sin \frac{1}{2} \theta_1 = \frac{MG}{A} Q \quad (24.0.15)$$

Ma se T è il tempo di una singola oscillazione del magnete,

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{MH}} \quad (24.0.16)$$

e troviamo

$$Q = \frac{HT}{G\pi} \sin \frac{1}{2} \theta_1 \quad (24.0.17)$$

dove H è la forza magnetica orizzontale, G il coefficiente del galvanometro, T il tempo di una singola oscillazione, e θ_1 la prima elongazione del magnete.

749. Nella maggior parte delle esperienze, l'elongazione è un piccolo angolo, ed è allora facile tener conto delle resistenze, poiché si può trattare l'equazione del movimento come un'equazione lineare.

Supponiamo il magnete a riposo nella sua posizione di equilibrio; gli si comunica una velocità angolare istantanea v , e sia θ_1 la prima elongazione.

L'equazione del moto è

$$\theta = Ce^{-\omega_1 t \tan \beta} \sin \omega_1 t \quad (24.0.18)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = C\omega_1 \sec \beta e^{-\omega_1 t \tan \beta} \cos(\omega_1 t + \beta) \quad (24.0.19)$$

Quando $t = 0$,

$$\theta = 0 \quad \frac{d\theta}{dt} = C\omega_1 = v$$

Quando $\omega_1 t + \beta = \frac{\pi}{2}$

$$\theta = Ce^{-(\frac{\pi}{2}-\beta) \tan \beta} \cos \beta = \theta_1 \quad (24.0.20)$$

da cui

$$\theta_1 = \frac{v}{\omega_1} e^{-(\frac{\pi}{2}-\beta) \tan \beta} \cos \beta \quad (24.0.21)$$

Ora

$$\frac{MH}{A} = \omega^2 = \omega_1^2 \sec^2 \beta \quad (24.0.22)$$

$$\tan \beta = \frac{\lambda}{\pi} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T_1} \quad (24.0.23)$$

$$v = \frac{MG}{A} Q \quad (24.0.24)$$

Pertanto

$$\theta_1 = \frac{QG}{H} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T_1} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \tan^{-1} \frac{\pi}{\lambda}} \quad (24.0.25)$$

e

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T_1}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{\frac{\lambda}{\pi} \tan^{-1} \frac{\pi}{\lambda}} \theta_1 \quad (24.0.26)$$

che dà la prima elongazione in funzione della quantità di elettricità di corrente istantanea, e reciprocamente, essendo T_1 la durata osservata di una oscillazione semplice sotto l'azione della resistenza che produce l'estinzione. Se λ è piccolo, si può impiegare la formula approssimata

$$Q = \frac{HT}{G\pi} \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right) \theta_1 \quad (24.0.27)$$

Metodo di riduzione

750. Il metodo precedente presuppone che il magnete fosse a riposo, nella sua posizione di equilibrio, nel momento in cui la corrente istantanea attraversa la bobina. Se si vuole ripetere l'esperienza, si deve quindi attendere che il magnete sia ritornato a riposo; ma, in certi casi dove si ha il modo produrre, non importa in quale istante, correnti istantanee di uguale intensità, il metodo seguente, dovuto a Weber², convien di più per dare serie prolungate di osservazioni.

Supponiamo che il magnete sia stato messo in oscillazione da una corrente istantanea, il cui valore è Q_0 . Poniamo, per abbreviare,

$$K = \frac{G\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{HT_1} e^{\arctan \frac{\pi}{\lambda}} \quad (24.0.28)$$

²Resultate des Magnetischen Vereins, 1838, p. 98.

la prima elongazione sarà

$$\theta_1 = KQ_0 = a_1 \quad (24.0.29)$$

La velocità istantanea impressa al magnete alla partenza è

$$v_0 = \frac{MG}{A}Q_0 \quad (24.0.30)$$

Quando ripassa dalla sua posizione di equilibrio, muovendosi nella direzione negativa, la sua velocità è

$$v_1 = -v_0e^{-\lambda} \quad (24.0.31)$$

L'elongazione negativa successiva

$$\theta_2 = -\theta_1e^{-\lambda} = b_1 \quad (24.0.32)$$

Quando il magnete ritorna alla sua posizione di equilibrio, la sua velocità è

$$v_1 = v_0e^{-2\lambda} \quad (24.0.33)$$

Facciamo ora passare attraverso la bobina una corrente istantanea, nella quale la quantità totale di elettricità è $-Q$, nel momento in cui il magnete è al suo zero. La velocità v_2 si cambia in $v_2 - v_1$, dove

$$v = \frac{MG}{A}Q \quad (24.0.34)$$

Se Q è più grande di $Q_0e^{-2\lambda}$, la nuova velocità è negativa e uguale a

$$-\frac{MG}{A}(Q - Q_0e^{-2\lambda})$$

Il movimento del magnete si trova così invertito, e l'elongazione successiva diviene negativa:

$$\theta_3 = -K(Q - Q_0e^{-2\lambda}) = c_1 = -KQ + \theta_1e^{-2\lambda} \quad (24.0.35)$$

Lasciamo allora il magnete ritornare alla sua elongazione positiva,

$$\theta_4 = -\theta_3e^{-\lambda} = d_1 = e^{-\lambda}(KQ - a_1e^{-2\lambda}) \quad (24.0.36)$$

e quando raggiunge di nuovo la sua posizione di equilibrio, inviamo una corrente positiva di quantità Q che lancia il magnete nel suo verso positivo, finché l'elongazione positiva

$$\theta_5 = KQ - \theta_3e^{-2\lambda} \quad (24.0.37)$$

o, prendendo questa elongazione per la prima di una nuova serie di quattro, la chiamiamo a_2

$$a_2 = KQ(1 - e^{-2\lambda}) + a_1e^{-4\lambda} \quad (24.0.38)$$

Procedendo in questo modo: osservando due elongazioni, una $+$ e l'altra $-$, inviando allora una corrente negativa e osservando due elongazioni $-$ e $+$, inviando una nuova corrente positiva, ecc., si forma una serie formata da gruppi di quattro elongazioni; in ogni gruppo

$$\frac{d - b}{a - c} = e^{-\lambda} \quad (24.0.39)$$

e

$$KQ = \frac{(a - b)e^{-2\lambda} + d - c}{1 + e^{-\lambda}} \quad (24.0.40)$$

Se sono state osservate n serie di elongazioni, si ottiene il decremento logaritmico dall'equazione

$$\frac{\sum(d) - \sum(b)}{\sum(a) - \sum(c)} = e^{-\lambda} \quad (24.0.41)$$

e Q dall'equazione

$$KQ(1 - e^{-\lambda})(2n - 1) = \sum_n (a - b - c + d)(1 + e^{-2\lambda}) - (a_1 - b_1) - (d_n - c_n)e^{-2\lambda} \quad (24.0.42)$$

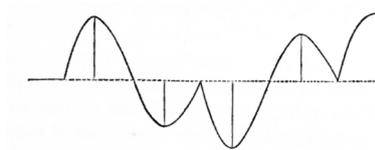


Fig. 59.

I movimenti del magnete con questo metodo sono rappresentati graficamente dalla fig. 59, le cui ascisse rappresentano il tempo, e le ordinate le deviazioni del magnete (si veda § 700).

Metodo di moltiplicazione

751. Se inviamo la corrente istantanea ogni volta che il magnete passa per il punto zero e se aumentiamo così ogni volta la velocità del magnete, essendo $\theta_1, \theta_2, \dots$ le elongazioni successive, si avrà

$$\theta_2 = -KQe^{-\lambda}\theta_1 \quad (24.0.43)$$

$$\theta_3 = -KQe^{-\lambda}\theta_2 \quad (24.0.44)$$

Il valore limite verso il quale tende l'elongazione, dopo un grande numero di oscillazioni, si ottiene ponendo $\theta_n = -\theta_{n-1}$ da cui ricaviamo

$$\theta = \pm \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} KQ \quad (24.0.45)$$

Se λ è piccolo, il valore dell'elongazione finale può divenire grande; ma ciò presuppone un'esperienza prolungata per lungo tempo e una determinazione esatta di λ , poiché un piccolo errore su λ introduce un errore notevole sulla determinazione di Q . Così questo metodo è raramente impiegato per determinazioni numeriche: lo si riserva per far risaltare l'esistenza o la non esistenza di correnti troppo deboli per essere osservate direttamente.

In tutte le esperienze in cui si opera con correnti istantanee sull'ago di un galvanometro, è essenziale che la totalità della corrente passi mentre la distanza del magnete dal suo zero è ancora una frazione minima dell'elongazione totale. La durata dell'oscillazione deve quindi essere grande rispetto al tempo necessario per produrre la corrente, e l'operatore deve seguire con l'occhio il movimento del magnete, in modo da cogliere, per inviare la corrente, il momento in cui il magnete passa per la sua posizione di equilibrio.

Se l'operatore manca di inviare la corrente nel momento opportuno, si introduce un errore. Per valutare tale errore, osserviamo che l'effetto di una forza per aumentare l'elongazione varia proporzionalmente a

$$e^{\phi \tan \beta} \cos(\phi + \beta)$$

e questo effetto è quindi massimo per $\phi = 0$. Pertanto, se non si invia la corrente nel momento voluto, questo errore porterà sempre a una valutazione troppo piccola, e il valore dell'errore commesso si può valutare confrontando all'unità il coseno della fase dell'oscillazione nel momento del passaggio di corrente.

25 Confronto tra bobine

Determinazione sperimentale delle costanti elettriche di una bobina

752. Abbiamo visto, al § 717, che in un galvanometro sensibile, le bobine devono avere un piccolo raggio e contenere un gran numero di spire. Sarebbe troppo difficile determinare le costanti elettriche di una simile bobina dalla misura diretta della sua forma e delle sue dimensioni, e ciò, anche quando si potesse raggiungere ogni spira per misurarla; ma, infatti, non solo il più grande numero di spire è completamente nascosto dalle spire esterne, ma non sappiamo se la pressione delle spire esterne non ha modificato la forme di quelle interne dopo l'avvolgimento.

Pertanto, è meglio determinare le costanti elettriche della bobina, con un confronto elettrico diretto con una bobina campione le cui costanti sono note.

Le dimensioni della bobina campione dovendo essere determinate da misure dirette, richiede che essa abbia una dimensione notevole, affinché l'errore inevitabile sulla misura della circonferenza o del diametro sia il più piccolo possibile rispetto alla quantità misurata. Il telaio sul quale è avvolto il filo deve avere una sezione rettangolare, e le dimensioni di questa sezione devono essere piccole rispetto al diametro della bobina: è la condizione necessaria, non tanto per ridurre la correzione relativa alle dimensioni della sezione, quanto per rimuovere ogni incertezza sulla posizione delle spire che sono nascoste da quelle esterne¹.

Le principali costanti che dobbiamo determinare sono:

1° la forza magnetica sviluppata al centro della bobina dall'unità di corrente: è la quantità che si è indicata con G_1 al § 700;

2° il momento magnetico della bobina per l'unità di corrente: è la quantità g_1 .

Determinazione di G_1

753. Poiché le bobine del galvanometro utilizzate sono ben più piccole della bobine campione, poniamo il galvanometro nella bobina campione, in modo che i centri coincidano e che i piano delle due bobine siano verticali e paralleli alla forza magnetica terrestre: formiamo così un galvanometro differenziale, di cui una delle bobine è quella campione, per la quale il valore di G_1 è noto, mentre ciò che dobbiamo determinare è precisamente il valore di G'_1 relativo all'altra bobina.

Il magnete sospeso al centro del galvanometro è sottoposto all'azione delle correnti che attraversano le due bobine. Se le intensità sono γ nella bobina campione e γ' in quella del

¹Si usano qualche volta grandi galvanometri delle tangenti con un solo anello conduttore, di forma circolare, molto spesso, e molto rigido per mantenere la sua forma senza che sia sostenuto da alcun supporto. È una buona disposizione per uno strumento campione. La distribuzione di corrente nel conduttore dipende dalla conducibilità relativa delle diverse parti. Così, un soffiatore nascosto nella massa del metallo può fare sì che la maggior parte della corrente sia riportata verso il bordo interno o quello esterno dell'anello circolare. Di conseguenza, il reale cammino seguito dall'elettricità diviene incerto. Inoltre, se la corrente circola una sola volta attorno al cerchio, serve un'attenzione del tutto particolare per ottenere che il magnete sospeso non subisca alcuna azione della corrente, nel suo tragitto di andata o di ritorno verso il cerchio: poiché la corrente che attraversa gli elettrodi è la stessa che attraversa il cerchio. Nella costruzione di buoni strumenti sembra si sia completamente persa di vista l'azione di questa parte di corrente. La migliore disposizione consiste nel fare uno degli elettrodi a forma di tubo metallico; l'altro, a forma di filo metallico ricoperto da una materia isolante e posto interiormente e concentricamente al tubo. L'azione degli elettrodi così disposti su punti esterni è nulla, dal § 683.

galvanometro, e se queste correnti, circolanti in verso opposto, producono la deviazione δ del magnete,

$$H \tan \delta = G'_1 \gamma' - G_1 \gamma \quad (25.0.1)$$

dove H è la componente orizzontale della forza magnetica terrestre.

Se si regolano le correnti in modo che non avvengano deviazioni, troveremo G'_1 dall'equazione

$$G'_1 = \frac{\gamma}{\gamma'} G_1 \quad (25.0.2)$$

Si possono usare diversi modi per determinare il rapporto tra γ e γ' . Poiché il valore di G_1 è in genere meno grande per la bobina campione che per il galvanometro, si può disporre il circuito in modo che la corrente totale γ attraversi la bobina campione, poi che si divida; che una parte soltanto γ' attraversi il galvanometro e bobine di resistenza, formanti una resistenza totale R_1 , mentre l'altra parte $\gamma - \gamma'$ attraversa un'altra serie di bobine di resistenza totale R_2 .

Abbiamo allora, dal § 276,

$$\gamma' R_1 = (\gamma - \gamma') R_2 \quad (25.0.3)$$

o

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad (25.0.4)$$

e

$$G'_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} G_1 \quad (25.0.5)$$

Se vi è qualche incertezza sulla resistenza del galvanometro (per esempio, in ragione di qualche incertezza sulla sua temperatura), si possono aggiungergli bobine di resistenza, in modo che la resistenza del galvanometro stesso formi solo una piccola parte di R_1 , e così introduca solo una piccola incertezza nel risultato definitivo.

Determinazione di g_1

754. g_1 è il momento magnetico della piccola bobina quando è attraversata dall'unità di corrente. Si sospende ancora il magnete al centro della bobina campione, poi si sposta la piccola bobina parallelamente a se stessa lungo l'asse comune alle due bobine, finché la stessa corrente, circolante in senso contrario nelle due bobine, non agisce più sul magnete. Se r è la distanza dei centri delle bobine, si ha allora

$$G_1 = 2 \frac{g_1}{r^3} + 3 \frac{g_2}{r^4} + 4 \frac{g_3}{r^5} + \dots \quad (25.0.6)$$

Ripetendo l'esperienza, essendo la piccola bobina posta dall'altro lato della bobina campione, e misurando la distanza che separa le due posizioni occupate della piccola bobina, si elimina l'errore dipendente dall'incertezza sulla posizione dei centri del magnete e della piccola bobina, e si eliminano i termini G_2, g_4, \dots

Se la bobina campione è disposta in modo che si possa inviare la corrente solo nella metà delle spire, in modo da dare a G_1 un valore differente, si può determinare un nuovo valore di r ed eliminare così, come al § 454, il termine contenente g_2 .

Ma, spesso, misure dirette sulla piccola bobina permettono di determinare il valore di g_2 con buona precisione per poter impiegare nel calcolo la correzione da applicare a g_1 dall'equazione

$$g_1 = \frac{1}{2} G_1 r^3 - 2 \frac{g_2}{r^2} \quad (25.0.7)$$

dove, dal § 700.

$$g_3 = -\frac{1}{8} \pi a^2 (6a^2 + 3\xi^2 - 2\eta^2)$$

Confronto tra i coefficienti di induzione

755. Soltanto in un piccolo numero di casi si può, senza troppe difficoltà, calcolare direttamente i coefficienti di induzione, dalla forma e posizione dei circuiti. Infatti, affinché si ottenga un sufficiente grado di precisione, bisogna che si possa misurare esattamente la distanza tra i circuiti. Ma, se la distanza tra i circuiti è molto grande affinché gli errori di misura non introducano gravi errori nei risultati, la grandezza del coefficiente di induzione è fortemente molto ridotta. In un grande numero di esperienze, è necessario rendere il coefficiente di induzione considerevole, e ciò si può ottenere avvicinando i circuiti, e, di conseguenza, ciò rende inapplicabile il metodo di misura diretta. Allora, per determinare il coefficiente di induzione, bisogna confrontarlo con quello di una coppia di bobine disposte in modo che il loro coefficiente possa essere ottenuto da misure dirette e mediante il calcolo.

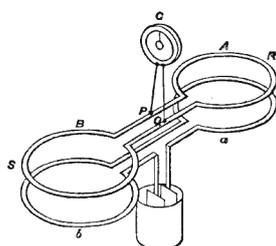


Fig. 60.

Questo lo si può realizzare nel modo seguente:

Siano A e a le bobine campione; B e b quelle da confrontare. Colleghiamo A e B in un solo circuito e mettiamo gli elettrodi di un galvanometro G in P e Q , di modo che la resistenza di PAQ sia R , e quella di QBP sia S , essendo K la resistenza del galvanometro. Colleghiamo a e b in uno stesso circuito contenente la pila.

Siano \dot{x} la corrente in A ; \dot{y} la corrente in B ; $\dot{x} - \dot{y}$ la corrente nel galvanometro con γ la corrente nel circuito della pila.

Allora, se M_1 è il coefficiente di induzione tra A e a , M_2 quello tra B e b , la corrente di induzione totale che attraversa il galvanometro nel momento in cui si interrompe il circuito della pila è

$$x - y = \gamma \frac{\frac{M_2}{S} - \frac{M_1}{R}}{1 + \frac{K}{R} + \frac{K}{S}} \quad (25.0.8)$$

Regolando le resistenze R e S fino a non avere più corrente nel galvanometro quando si stabilisce il circuito della pila o lo si interrompe, si potrà dedurre il rapporto tra M_2 e M_1 dal rapporto misurato tra S e R .

²[La formula (25-8) si può dimostrare nel modo seguente:

Siano L_1, L_2, N e Γ i coefficienti di autoinduzione delle bobine A, B, a, b e del galvanometro. L'energia cinetica del sistema è, approssimativamente,

$$\frac{1}{2}L_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\Gamma(\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{1}{2}N\dot{\gamma}^2 + M_1\dot{x}\dot{\gamma} + M_2\dot{y}\dot{\gamma}$$

²Lo studio compreso tra parentesi e tratto dalle note prese da M. Fleming nel corso del professor Clerk Maxwell possiede un triste interesse: esso fa parte dell'ultima lezione fatta dal professore. Sulle note di Fleming, la disposizione dell'esperienza differisce da quella data nel testo per quanto riguarda le posizioni della pila e del galvanometro che sono scambiate.

La funzione di dissipazione F , che esprime la proporzione dell'energia delle correnti perse nel riscaldamento delle bobine, è (si veda Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, I, p. 78)

$$\frac{1}{2}R\dot{x}^2 + \frac{1}{2}S\dot{y}^2 + \frac{1}{2}K(\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{1}{2}Q\gamma^2$$

dove Q è la resistenza della pila e delle bobine poste nel suo circuito.

L'equazione delle correnti relativa a una variabile qualunque x , è

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx} + \frac{dF}{d\dot{x}} = \xi$$

dove ξ è la corrispondente forza elettromotrice.

Abbiamo quindi

$$L_1\ddot{x} + \Gamma(\ddot{x} - \ddot{y}) + M_1\dot{\gamma} + R\dot{x} + K(\dot{x} - \dot{y}) = 0$$

$$L_2\ddot{y} - \Gamma(\ddot{x} - \ddot{y}) + M_2\dot{\gamma} + S\dot{y} - K(\dot{x} - \dot{y}) = 0$$

Queste equazioni si possono immediatamente integrare rispetto a t . Osservando che all'origine x, \dot{x}, y, \dot{y} e γ sono nulli, e ponendo $x - y = z$, abbiamo, eliminando y , un'equazione della forma

$$A\ddot{z} + B\dot{z} + Cz = D\dot{\gamma} + E\gamma \quad (25.0.9)$$

Molto poco tempo dopo che si è collegata la pila, la corrente γ diviene costante e la corrente \dot{z} si estingue; da cui

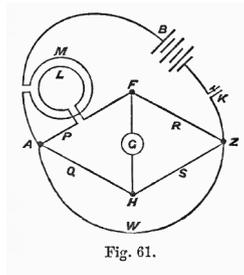
$$Cz = E\gamma$$

ciò che dà la (25-8) indicata in precedenza, e che mostra che, quando la quantità totale di elettricità che attraversa il galvanometro è nulla, dobbiamo avere $E = 0$ o $M_2R - M_1S = 0$. La (25-8') mostra che, se non vi è corrente nel galvanometro, dobbiamo pure avere $D = 0$, o $M_2L_1 - M_1L_2 = 0$.

Confronto tra un coefficiente di autoinduzione e un coefficiente di mutua induzione

756. Nel ramo AF di un ponte di Wheatstone, introduciamo la bobina di cui vogliamo conoscere il coefficiente di autoinduzione L .

Sul filo che collega A alla pila, mettiamo un'altra bobina; il coefficiente di mutua induzione di questa bobina e della bobina AF è M e si può misurare con il metodo descritto al § 755.



Se x è la corrente che va da A a F , y quella che va da A a H , quella che va da Z ad A per B sarà $x + y$. La forza elettromotrice esterna agente da A verso F è

$$A - F = Px + L \frac{dx}{dt} + M \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) \quad (25.0.10)$$

La forza elettromotrice esterna lungo AH è

$$A - H = Qy \quad (25.0.11)$$

Se il galvanometro posto tra F e H non indica alcuna corrente, né permanente né istantanea, $H - F = 0$; e allora, dalle (25-9) e (25-10)

$$Px = Qy \quad (25.0.12)$$

$$L \frac{dx}{dt} + M \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) = 0 \quad (25.0.13)$$

da cui

$$L = - \left(1 + \frac{P}{Q} \right) M \quad (25.0.14)$$

Poiché L è sempre positivo, M deve essere negativo, e la corrente deve circolare in versi contrari nelle bobine poste in P e in B . Quando si esegue l'esperienza, si può iniziare con il regolare le resistenze, in modo che

$$PS = QR \quad (25.0.15)$$

che è la condizione perché non si abbia corrente permanente; poi, si regola la distanza tra le bobine in modo che il galvanometro cessi di indicare una corrente istantanea quando si stabilisce o si interrompe il contatto della pila; se non si può regolare questa distanza, si può far sparire queste correnti istantanee cambiando le resistenze Q e S , rimanendo però il loro rapporto sempre costante.

Se si trova questa doppia regolazione troppo complessa, si può impiegare un terzo metodo. Si inizia con l'organizzarsi in modo che la corrente dovuta all'autoinduzione sia un poco superiore a quella che è dovuta alla mutua induzione, e si fa sparire questa disuguaglianza introducendo, tra A e Z , un conduttore di resistenza W . L'introduzione di W non cambia in nulla la condizione che deve essere soddisfatta perché non passi corrente permanente nel galvanometro. Possiamo quindi far sparire le correnti istantanee regolando soltanto la resistenza di W . Ciò fatto, il valore di L è

$$L = - \left(1 + \frac{P}{Q} + \frac{P+R}{W} \right) M \quad (25.0.16)$$

Confronto tra i coefficienti di autoinduzione di due bobine

757. Mettiamo le due bobine nei rami adiacenti di un ponte di Wheatstone. Siano L e N i coefficienti di autoinduzione delle bobine messe nei rami P e R : la condizione affinché non vi sia corrente nel galvanometro è

$$\left(Px + L \frac{dx}{dt} \right) Sy = Qy \left(Rx + N \frac{dx}{dt} \right) \quad (25.0.17)$$

da cui, per le correnti permanenti

$$PS = RQ \quad (25.0.18)$$

e, per le correnti istantanee

$$\frac{L}{P} = \frac{N}{R} \quad (25.0.19)$$

CAPITOLO 25. CONFRONTO TRA BOBINE

Pertanto, regolando opportunamente le resistenze, si può far sparire sia le correnti permanenti sia quelle istantanee, e allora il rapporto di L con N può essere determinato da un confronto tra resistenze.

26 Unità elettromagnetiche di resistenza

Determinazione della resistenza di una bobina in misura elettromagnetica

758. Per definizione, la resistenza di un conduttore è il rapporto tra il valore numerico della forza elettromotrice e quello della corrente prodotta nel conduttore. Il valore numerico di una corrente può essere determinato in misura elettromagnetica, per mezzo di un galvanometro campione, quando si conosce il valore della forza magnetica terrestre. È più difficile determinare il valore della forza elettromotrice; poiché il solo caso in cui possiamo calcolare direttamente il suo valore è quello dove è dovuta al movimento di un circuito rispetto a un sistema magnetico noto.

759. La prima misura della resistenza di un filo metallico, in misura elettromagnetica, è dovuta a Kirchhoff¹. Egli impiegò due bobine di forma nota, A_1 e A_2 , e calcolò il loro coefficiente di induzione reciproca dai loro elementi geometrici di forma e posizione. Queste bobine erano messe in circuito con un galvanometro G e una pila B ; due punti del circuito, P preso tra le bobine e Q posto tra la pila e il galvanometro, erano collegati dal filo di cui si voleva misurare la resistenza R .

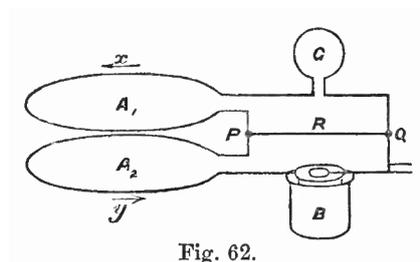


Fig. 62.

Quando ha corrente ha preso il suo regime permanente, si divide tra il filo e il circuito del galvanometro e produce una certa deviazione permanente del galvanometro. Se allora si allontana rapidamente la bobina A_1 e la si porta in una posizione per la quale il coefficiente di induzione reciproco di A_1 e A_2 è zero (§ 538), si produrrà, nei due circuiti, una corrente indotta, e l'ago del galvanometro riceverà un impulso che produce una certa deviazione passeggera.

Confrontando la deviazione permanente dovuta alla corrente permanente, e la deviazione istantanea dovuta alla corrente indotta, si deduce la resistenza R del filo.

Siano K la resistenza di QGA_1P ; B quella di PA_2BQ ; R quella di PQ ; L, M, N i coefficienti di induzione di A_1 e A_2 ; \dot{x} la corrente in G ; \dot{y} la corrente in B ; $\dot{x} - \dot{y}$ la corrente che va da P verso Q ; E la forza elettromotrice della pila, si ha

$$(K + R) \dot{x} - R\dot{y} + \frac{d}{dt} (L\dot{x} + M\dot{y}) = 0 \quad (26.0.1)$$

¹Bestimmung der Costanten von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt (*Pogg. Ann.*, LXXVI, aprile 1849).

$$-R\dot{x} + (R+B)\dot{y} + \frac{d}{dt}(M\dot{x} + N\dot{y}) = E \quad (26.0.2)$$

Quando le correnti sono costanti e le parti del circuito a riposo

$$(K+R)\dot{x} - R\dot{y} = 0 \quad (26.0.3)$$

Se M diviene improvvisamente nullo, a causa dello spostamento di A_1 e di A_2 , si ha, integrando rispetto a t ,

$$(K+R)x - Ry - M\dot{y} = 0 = 0 \quad (26.0.4)$$

$$-Rx + (R+B)y - M\dot{y} = \int E dt = 0 \quad (26.0.5)$$

da cui

$$x = M \frac{(B+R)\dot{y} + R\dot{x}}{(B+R)(K+R) - R^2} \quad (26.0.6)$$

Sostituendo il valore di \dot{y} in funzione di \dot{x} , ricavato dalla (26-3), si trova

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M(B+R)(K+R) + R^2}{R(B+R)(K+R) - R^2} \quad (26.0.7)$$

$$= \frac{M}{R} \left[1 + \frac{2R^2}{(B+R)(K+R)} + \dots \right] \quad (26.0.8)$$

Se, come nell'esperienza di Kirchhoff, B e K sono grandi rispetto a R , questa equazione si riduce a

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M}{R}$$

Da queste quantità, x è noto per l'impulso del galvanometro dovuto alla corrente indotta (si veda § 748); l'intensità permanente \dot{x} si deduce dalla deviazione permanente dovuta alla corrente di regime (si veda § 746); M si ottiene sia dal calcolo diretto per mezzo di dati geometrici, sia per confronto con una coppia di bobine per le quali questo calcolo è stato fatto (si veda § 755); e con queste tre quantità si può determinare R in misura elettromagnetica.

Questo metodo presuppone che si sia determinato il periodo di oscillazione del magnete del galvanometro e il decremento logaritmico delle sue oscillazioni.

Metodo di Weber² per le correnti istantanee

760. Una bobina di grandi dimensioni è montata su un asse e può ruotare attorno ad un diametro verticale. Il filo di questa bobina è collegato a quello di un galvanometro delle tangenti, in modo da formare un solo circuito. Sia R la resistenza di questo circuito. Poniamo questa grande bobina con la sua faccia positiva perpendicolare al meridiano magnetico, e facciamola ruotare rapidamente di una semi rivoluzione. Vi sarà una corrente indotta dovuta alla forza magnetica terrestre, e la quantità totale di elettricità trasmessa da questa corrente sarà, in misura elettromagnetica,

$$Q = \frac{2g_1 H}{R} \quad (26.0.9)$$

dove g_1 è il momento magnetico della bobina per l'unità di corrente. Nel caso di una grande bobina, questo elemento si può determinare direttamente, misurando le dimensioni della bobina e calcolando la somma delle aree delle sue spire. H è la componente orizzontale della forza magnetica terrestre, e R è la resistenza del circuito formato dalla bobina e dal galvanometro. La corrente prodotta mette in movimento il magnete del galvanometro.

²*Elekt. Maasb., e Pogg. Ann.*, LXXXII, p. 337; 1851.

Se il magnete è inizialmente a riposo e se il movimento della bobina dura solo una piccola frazione del periodo di oscillazione del galvanometro, abbiamo, trascurando la resistenza al movimento del magnete (§ 748),

$$Q = \frac{HT}{G\pi} 2 \sin \frac{1}{2}\theta \quad (26.0.10)$$

dove G è la costante del galvanometro, T il periodo di oscillazione e θ l'elongazione osservata.

Da questa equazione si ricava,

$$R = \pi G g_1 \frac{1}{T \sin \frac{1}{2}\theta} \quad (26.0.11)$$

Il valore di H non appare in questo risultato, a condizione che sia lo stesso nel luogo in cui si trova la bobina e a quello in cui è il galvanometro; ed è ciò che non si deve ammettere, ma bensì verificare osservando nei due luoghi successivamente la durata delle oscillazioni dello stesso magnete.

761. Per compiere una serie di osservazioni, Weber iniziò col porre la bobina parallelamente al meridiano magnetico; poi faceva ruotare il lato positivo verso il nord e osservava la prima elongazione dovuta alla corrente negativa, poi la seconda elongazione del magnete oscillante liberamente, e, nel momento in cui il magnete ripassava per la sua posizione di equilibrio, faceva ruotare la bobina, la parte positiva verso sud. Così facendo, il magnete ritornava dal lato positivo e la serie continuava come al § 750: i risultati erano corretti dalla resistenza. In questo modo, si determinava la resistenza del circuito totale, comprendente la bobina e il galvanometro.

In tutte queste esperienze, per ottenere deviazioni sufficientemente grandi, basta impiegare un filo di rame; ma questo metallo, se è il miglior conduttore, ha lo svantaggio che la sua resistenza varia molto con i cambiamenti di temperatura. Ora è assai difficile determinare la temperatura di tutte le parti dello strumento. Di conseguenza, per ricavare da simili esperienze un risultato avente un valore permanente, è necessario confrontare, prima e dopo ogni esperienza, la resistenza del circuito degli strumenti con quella di una bobina di resistenza accuratamente costruita.

Metodo di Weber, per l'osservazione del rallentamento delle oscillazioni di un magnete

762. Un magnete, avente un momento magnetico notevole, è sospeso al centro della bobina di un galvanometro. Si osserva il periodo e il decremento logaritmico delle oscillazioni, dapprima quando il circuito del galvanometro è aperto, e poi quando è chiuso, e si deduce la conducibilità del galvanometro dall'effetto che le correnti indotte dal movimento del magnete hanno per contrastare questo movimento.

Siano T la durata osservata di una oscillazione semplice, λ il decremento logaritmico neperiano per ogni oscillazione semplice. Se poniamo

$$\omega = \frac{\pi}{T} \quad (26.0.12)$$

e

$$\alpha = \frac{\lambda}{T} \quad (26.0.13)$$

l'equazione del moto del magnete è della forma

$$\phi = C e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta) \quad (26.0.14)$$

Questa espressione rappresenta il movimento, come l'osservazione ci mostra: confrontiamo con l'equazione dinamica del moto.

Sia M il coefficiente di induzione relativo alla bobina del galvanometro e al magnete sospeso. Esso è della forma

$$M = G_1 g_1 P_1(\theta) + M = G_2 g_2 P_2(\theta) + \dots \quad (26.0.15)$$

dove G_1, G_2, \dots sono i coefficienti relativi alla bobina; g_1, g_2, \dots i coefficienti relativi al magnete, e $P_1(\theta), P_2(\theta), \dots$ delle armoniche zonali dell'angolo compreso tra l'asse della bobina e quello del magnete (si veda §700).

Disponendo opportunamente le bobine del galvanometro e che formano con il magnete sospeso una serie di magneti posti gli uni a fianco degli altri, a distanze opportune, si può rendere trascurabile il primo di tutti i termini successivi di M . Se poniamo poi $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$, possiamo scrivere

$$M = Gm \sin \phi \quad (26.0.16)$$

dove G è il coefficiente principale del galvanometro; m il momento magnetico del magnete; ϕ l'angolo compreso tra l'arco del magnete e il piano della bobina, angolo che, in queste esperienze, è sempre piccolo.

Se L è il coefficiente di autoinduzione della bobina, R la sua resistenza, γ la corrente che la attraversa, si ha

$$\frac{d}{dt}(L\gamma + M) + R\gamma = 0 \quad (26.0.17)$$

ossia

$$L \frac{d\gamma}{dt} + R\gamma + Gm \cos \phi \frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (26.0.18)$$

Il momento della forza con la quale la corrente γ agisce sul magnete è $\gamma \frac{dM}{d\phi}$ o $Gm\gamma \cos \phi$. L'angolo ϕ è così piccolo in queste esperienze, che si può supporre $\cos \phi = 1$.

Supponiamo che l'equazione di moto del magnete, quando il circuito è chiuso, sia

$$A \frac{d^2 \phi}{dt^2} + B \frac{d\phi}{dt} + C\phi = 0 \quad (26.0.19)$$

dove A è il momento di inerzia del sistema sospeso; $\frac{Bd\phi}{dt}$ rappresenta la resistenza dovuta alla viscosità dell'aria e del filo di sospensione, ecc. e $C\phi$ esprime il momento della forza dovuta al magnetismo terrestre, alla torsione del sistema di sospensione, ecc., la quale tende a riportare il magnete alla sua posizione di equilibrio.

L'equazione di moto del magnete, modificata dalla corrente, sarà

$$A \frac{d^2 \phi}{dt^2} + B \frac{d\phi}{dt} + C\phi = Gm\gamma \quad (26.0.20)$$

Per determinare il movimento del magnete, dobbiamo combinare questa equazione con la (26-18) ed eliminare γ . Il risultato è

$$\left(L \frac{d}{dt} + R \right) \left(A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + C \right) \phi + G^2 m^2 \frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (26.0.21)$$

equazione differenziale lineare del terzo ordine. Ma non dobbiamo risolvere questa equazione; poiché i dati del problema sono gli elementi osservati del movimento del magnete, ed è da essi che dobbiamo determinare R .

Siano α_0 e ω_0 i valori di α e di ω della (26-14), quando il circuito è interrotto. In questo caso, R è infinito e l'equazione si riduce alla forma (26-19). Si trova così

$$B = 2A\alpha_0 \quad C = A(\alpha_0^2 + \omega_0^2) \quad (26.0.22)$$

Risolvendo la (26-21) rispetto a R e ponendo

$$\frac{d}{dt} = -(\alpha + i\omega) \quad i = \sqrt{-1} \quad (26.0.23)$$

abbiamo

$$R = \frac{G^2 m^2}{A} \frac{\alpha + i\omega}{\alpha_0^2 - \omega_0^2 + 2i\alpha\omega - 2\alpha_0(\alpha + i\omega) + \alpha_0^2 - \omega_0^2} + L(\alpha + i\omega) \quad (26.0.24)$$

Siccome il valore di ω è, in generale, assai più grande di quello di α , il miglior valore di R si otterrà uguagliando i termini in $i\omega$.

$$R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + \frac{1}{2}L \left(3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0} \right) \quad (26.0.25)$$

Si può così ottenere un valore di R uguagliando i termini che non contengono i ; ma, poiché questi termini sono piccoli, questa equazione può servire soltanto a verificare l'esattezza delle osservazioni. Da queste equazioni, ricaviamo la seguente come verifica:

$$G^2 m^2 (\alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2) = LA \left[(\alpha - \alpha_0)^4 + 2(\alpha - \alpha_0)^2 (\omega^2 + \omega_0^2) + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right] \quad (26.0.26)$$

Poiché $LA - \omega^2$ è piccolo rispetto a Gm^2 , questa equazione dà

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \alpha_0^2 - \alpha^2 \quad (26.0.27)$$

e la (26-25) si può scrivere

$$R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + 2L\alpha \quad (26.0.28)$$

In questa espressione, si può determinare G dalla misura delle dimensioni della bobina del galvanometro oppure per confronto con una bobina campione, seguendo il metodo indicato al § 753. A è il momento di inerzia del magnete e del sistema di sospensione, e deve essere determinato dal metodo dinamico opportuno: $\omega, \omega_0, \alpha, \alpha_0$ sono forniti dall'osservazione.

La parte più difficile di questo studio è la determinazione del momento magnetico m del magnete sospeso, poiché dipende dalla temperatura, dalla forza magnetica terrestre e dalle tensioni meccaniche. Si deve quindi prestare attenzione che, nel momento in cui si misura questa quantità, il magnete sia nelle stesse condizioni di quando oscilla.

Il secondo termine di R , che contiene L , ha in genere meno importanza; poiché è di solito piccolo, rispetto al primo. Il valore di L si può determinare con il calcolo, dalla formula nota della bobina, o da una esperienza sull'extra corrente di induzione (si veda il § 756).

Metodo di Thomson per la bobina ruotante

763. Questo metodo è stato proposto da Sir W. Thomson, al Comitato delle Unità elettriche dell'Associazione Britannica, e le esperienze furono fatte, nel 1863, da MM. Balfour Stewart, Fleeming Jenkin e Clerk Maxwell³.

Una bobina circolare ruota, con una velocità uniforme, attorno ad un asse verticale. Un piccolo magnete è sospeso da un filo di seta al centro della bobina. Una corrente elettrica è indotta nella bobina dal magnetismo terrestre, così come dal magnete sospeso. Questa corrente è periodica e circola, in verso contrario, nel filo della bobina, in diversi momenti della sua rivoluzione; ma il suo effetto sul magnete sospeso è di deviarlo dal meridiano magnetico, nel verso della rotazione della bobina.

³Si veda *Report of the British Association for 1863*.

764. Siano H la componente orizzontale del magnetismo terrestre;
 γ l'intensità della corrente nella bobina;
 g l'area totale compresa in tutte le spire del filo;
 G la forza magnetica prodotta al centro della bobina dall'unità di corrente;
 L il coefficiente di autoinduzione della bobina;
 M il momento magnetico del magnete sospeso;
 θ l'angolo del piano della bobina e del meridiano magnetico;
 ϕ l'angolo dell'asse del magnete sospeso e del meridiano magnetico;
 A il momento di inerzia del magnete sospeso;
 $MH\tau$ il coefficiente di torsione del filo di sospensione;
 α l'azimut del magnete in assenza di torsione;
 R la resistenza della bobina.
L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2}L\gamma^2 - Hg\gamma \sin \theta - MG\gamma \sin (\theta - \phi) + MH \cos \phi + \frac{1}{2}A\dot{\phi}^2 \quad (26.0.29)$$

Il primo termine, $\frac{1}{2}L\gamma^2$, esprime l'energia della corrente, in quanto dipende dalla bobina stessa; il secondo dipende dall'azione reciproca della corrente e del magnetismo terrestre; il terzo, dall'azione reciproca della corrente e del magnetismo del magnete sospeso; il quarto, dall'azione reciproca del magnete sospeso e del magnetismo terrestre, e l'ultimo rappresenta l'energia cinetica della materia che forma il magnete e il sistema di sospensione mobile con esso.

L'energia potenziale del sistema sospeso, dovuta alla torsione del filo, è

$$V = \frac{MH}{2}\tau (\phi^2 - 2\phi\alpha) \quad (26.0.30)$$

La quantità di moto elettromagnetica della corrente è

$$p = \frac{dT}{d\gamma} = L\gamma - Hg \sin \theta - MG \sin (\theta - \phi) \quad (26.0.31)$$

e, se R è la resistenza della bobina, l'equazione della corrente è

$$R\gamma + \frac{d^2T}{dt d\gamma} = 0 \quad (26.0.32)$$

o, poiché

$$\theta = \omega t \quad (26.0.33)$$

$$\left(R + L\frac{d}{dt}\right)\gamma = HG\omega \cos \theta + MG(\omega - \phi) \cos (\theta - \phi) \quad (26.0.34)$$

765. È un risultato della teoria così come dell'esperienza, che l'azimut ϕ del magnete è soggetto a due tipi di variazioni periodiche. Una di queste oscillazioni si effettua liberamente; la sua durata dipende dall'intensità del magnetismo terrestre e, nelle esperienze fatte, il cui periodo è la metà del periodo di rivoluzione della bobina; la sua ampiezza è, come si vedrà, molto piccola. Si può quindi, nella determinazione di γ , considerare ϕ come sensibilmente costante.

Si trova così

$$\gamma = \frac{HG\omega}{R^2 + L^2\omega^2} (R \cos \theta + L\omega \sin \theta) \quad (26.0.35)$$

$$+ \frac{MG\omega}{R^2 + L^2\omega^2} [R \cos (\theta - \phi) + L\omega \sin (\theta - \phi)] \quad (26.0.36)$$

$$+ Ce^{-\frac{R}{L}t} \quad (26.0.37)$$

L'ultimo termine di questa espressione svanisce presto, se si mantiene la rotazione uniforme. L'equazione del moto del magnete sospeso è

$$\frac{d^2T}{dt d\phi} - \frac{dT}{d\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (26.0.38)$$

da cui

$$A\ddot{\phi} - MG\gamma \cos(\theta - \phi) + MH [\sin \phi + \tau(\phi - \theta)] = 0 \quad (26.0.39)$$

Sostituiamo il valore di γ e ordiniamo i termini secondo le funzioni dei multipli di θ ; l'esperienza ci mostra che

$$\phi = \phi_0 + be^{-lt} \cos nt + c \cos 2(\theta - \beta) \quad (26.0.40)$$

dove ϕ_0 è il valore medio di ϕ ; dove il secondo termine esprime l'oscillazione libera che decresce gradualmente, e dove il terzo termine rappresenta l'oscillazione forzata dovuta alla variazione della corrente agente.

Iniziamo dai termini della (26-39) che non contengono θ e di cui l'insieme si deve annullare, troviamo approssimativamente

$$\frac{MG\omega}{R^2 + L^2\omega^2} [Hg(R \cos \phi_0 + L\omega \sin \phi_0) + GMR] = 2MH [\sin \phi_0 + \tau(\phi - \theta)] \quad (26.0.41)$$

Poiché $L \tan \phi_0$ è in genere piccolo rispetto a Gg , risolvendo la (26-41), abbiamo approssimativamente

$$R = \frac{Gg\omega}{2 \tan \phi_0 \left(1 + \tau \frac{\phi_0 - a}{\sin \phi_0}\right)} \left[1 + \frac{GM}{gH} \sec \phi_0 - \frac{2L}{Gg} \left(\frac{2L}{Gg} - 1\right) \tan^2 \phi_0 - \left(\frac{2L}{Gg}\right)^2 \left(\frac{2L}{Gg} - 1\right)^2 \tan^4 \phi_0\right] \quad (26.0.42)$$

Se introduciamo nelle (26-35), (26-36) e (26-39) il termine principale di questa espressione, troviamo per il valore di n , nella (26-40)

$$\sqrt{\frac{HM}{A} \sec \phi_0}$$

Il valore dell'ampiezza forzata c è

$$\frac{1}{4} \frac{n^2}{\omega^2} \sin \phi_0$$

Pertanto, se la bobina fa un gran numero di evoluzioni nella durata di una oscillazione libera del magnete, l'ampiezza delle vibrazioni forzate sarà piccola, e potremo trascurare nella (26-39) i termini contenenti c .

766. La resistenza si trova così determinata in funzione della velocità ω e della deviazione ϕ . Non è necessario determinare la componente orizzontale H della forza magnetica terrestre, purché essa rimanga costante per la durata dell'esperienza.

Per determinare $\frac{M}{H}$, ci si deve servire del magnete sospeso per deviare il magnete del magnetometro, così come descritto al § 454. In questa esperienza, M deve essere piccolo, e ciò rende questa correzione di mediocre importanza.

Per le altre correzioni che richiede questa esperienza, si veda *Report of the British Association* del 1863, p. 168.

Metodo calorimetrico di Joule

767. Il calore sviluppato da una corrente γ che attraversa un conduttore di resistenza R è, dalla legge di Joule, § 242,

$$h = \frac{1}{J} \int R\gamma^2 dt \quad (26.0.43)$$

dove J è l'equivalente nella misura dinamica dell'unità di calore impiegata.

Pertanto, se R è costante per tutta la durata dell'esperimento, il suo valore è

$$R = \frac{Jh}{\int \gamma^2 dt} \quad (26.0.44)$$

Questo metodo di determinazione di R presuppone la misura del calore h prodotto dalla corrente nell'unità di tempo e quello del quadrato γ^2 dell'intensità di corrente.

Nelle esperienze di Joule⁴, h era determinato dall'innalzamento di temperatura dell'acqua di un contenitore nel quale era immerso il filo conduttore. Si correggevano gli effetti della radiazione facendo esperienze incrociate nelle quali nessuna corrente attraversava il filo.

L'intensità di corrente era misurata da un galvanometro delle tangenti. Questo metodo presuppone la determinazione dell'intensità del magnetismo terrestre, che si faceva con il metodo descritto al § 457. Queste misure erano poi controllate per mezzo dell'elettro dinamometro a peso, che misura direttamente γ^2 . Ma il modo più diretto per misurare $\int \gamma^2 dt$ consiste nel far passare la corrente in un elettrodinamometro a indicazioni automatiche (§ 725), con una scala che fornisce le letture proporzionali a γ^2 , e ad eseguire le osservazioni a intervalli uguali; ciò che si può fare, all'incirca, prendendo le letture alla fine di ognuna delle oscillazioni dello strumento per tutta la durata dell'esperienza.

⁴*Report of the British Association* del 1867.

27 Confronto tra le unità elettrostatiche e le unità elettromagnetiche

768. La grandezza assoluta delle unità elettriche dipende, nei due sistemi, dalle unità di lunghezza, di tempo e di massa, che sono state adottate; il modo in cui esse dipendono da queste unità non è lo stesso nei due sistemi; di conseguenza, il numero che esprime il rapporto tra unità elettriche differenti, a seconda che si impieghino le diverse unità di lunghezza e di tempo.

Si vede, dalla Tabella delle dimensioni delle unità, data al § 628, che il numero delle unità elettrostatiche di elettricità contenute in una unità elettromagnetica varia in ragione inversa della grandezza dell'unità di lunghezza, e in ragione diretta della grandezza dell'unità di tempo adottate.

Se quindi si determina una velocità che sia numericamente rappresentata da questo numero, e che poi si adottano nuove unità di lunghezza e di tempo, il numero che rappresenta questa velocità resterà, nel nuovo sistema di misure, il numero delle unità elettrostatiche di elettricità contenute in una unità elettromagnetica.

Pertanto, questa velocità, che indica la relazione dei fenomeni elettrostatici ed elettromagnetici, è una quantità naturale di grandezza determinata, e la sua misura costituisce una delle più importanti ricerche dell'elettricità.

Per mostrare che questa quantità che cerchiamo è realmente una velocità, osserviamo che, nel caso di due correnti parallele, l'attrazione alla quale è soggetta la lunghezza a di una delle correnti è, dal § 686,

$$F = 2CC' \frac{a}{b}$$

dove C e C' sono i valori numerici delle intensità, in misura elettromagnetica, e b è la distanza dei conduttori. Se poniamo $b = 2a$, allora

$$F = CC'$$

La quantità di elettricità trasmessa nel tempo t dalla corrente C è, in misura elettromagnetica, Ct , e, in misura elettrostatica, nCt , essendo n il numero di unità elettrostatiche contenute in una unità elettromagnetica.

Supponiamo due piccoli conduttori carichi di quantità di elettricità che trasmettono le due correnti nel tempo t , poniamoli alla distanza r l'uno dall'altro. La repulsione che si esercita tra essi è

$$F' = \frac{CC'n^2t^2}{r^2}$$

Scegliamo la distanza r , in modo che questa repulsione sia uguale all'attrazione delle due correnti,

$$\frac{CC'n^2t^2}{r^2} = CC'$$

da cui

$$r = nt$$

cioè che la distanza r deve crescere n volte più rapidamente del tempo. Pertanto n è una velocità la cui grandezza assoluta è la stessa, qualunque siano le unità adottate.

769. Per farci un'idea fisica di questa velocità, immaginiamo una superficie piana carica di elettricità, alla densità superficiale elettrostatica σ , e muoventesi nel suo piano con la velocità v . Questa superficie elettrizzata mobile equivarrà a uno strato di corrente, la cui intensità sarà, per ogni unità di lunghezza della superficie elettrizzata, σv in misura elettrostatica o $\frac{\sigma v}{n}$ in misura elettromagnetica, essendo n il numero delle unità elettrostatiche contenute nell'unità elettromagnetica. Se una seconda superficie piana, parallela alla prima è elettrizzata alla densità superficiale σ' , si muove nella stessa direzione con la velocità v' , essa sarà equivalente a un secondo strato di corrente.

La repulsione elettrostatica tra le due superfici elettrizzate è, dal § 124, $2\pi\sigma\sigma'$ per unità d'area di ciascuna delle superfici opposte.

L'attrazione elettromagnetica tra le due correnti superficiali è, dal § 638, $2\pi uu'$ per unità d'area, essendo u e u' le densità superficiali di due correnti in misura elettromagnetica.

Ma

$$u = \frac{\sigma v}{n} \quad u' = \frac{\sigma' v'}{n}$$

cosicché l'attrazione è

$$2\pi\sigma\sigma' \frac{vv'}{n^2}$$

Il rapporto tra l'attrazione e la repulsione è quello di vv' a n^2 . Pertanto, poiché l'attrazione e la repulsione sono quantità della stessa specie, n deve essere una quantità della stessa specie di v , cioè una velocità. Se supponiamo che la velocità di due superfici mobili sia uguale a n , l'attrazione sarà uguale alla repulsione, e non vi sarà azione meccanica tra le superfici. Pertanto possiamo definire il rapporto delle unità elettriche come una velocità che non esercita azione meccanica tra due superfici elettrizzate muoventesi con questa velocità nella stessa direzione. Siccome questa velocità è di circa $288000 \frac{km}{s}$, è impossibile realizzare l'esperienza che si è descritta.

770. Se si potesse rendere la densità elettrica superficiale e la velocità molto grandi perché la forza magnetica divenga misurabile, si potrebbe almeno verificare la nostra ipotesi che un corpo elettrizzato in movimento è equivalente a una corrente elettrica.

Possiamo ammettere¹ che, nell'aria, una superficie elettrizzata inizia a scaricarsi emettendo scintille quando la forza elettrica $2\pi\sigma$ raggiunge il valore 130. La forza magnetica, dovuta a una corrente superficiale, è $2\pi\sigma \frac{v}{n}$. In Inghilterra, la forza magnetica orizzontale è di circa 0,175. Pertanto, una superficie, elettrizzata al massimo livello e muoventesi alla velocità di $100 \frac{m}{s}$, agirà sul magnete con una forza uguale a circa $\frac{1}{4000}$ della forza orizzontale terrestre, quantità che è misurabile. La superficie elettrizzata potrebbe essere quella di un disco non conduttore ruotante nel piano del meridiano magnetico; il magnete potrebbe essere posto vicino alla parte montante o a quella discendente del disco, e sarebbe protetto dall'azione elettrostatica da uno schermo metallico. Da quanto mi risulta questa esperienza non è mai stata provata finora.

I. - Confronto delle unità di elettricità

771. Poiché il rapporto dell'unità elettromagnetica con l'unità elettrostatica è rappresentato da una velocità, lo indicheremo d'ora in poi con v . La prima misura numerica di questa velocità è stata fatta da Weber e Kohlrausch².

Il loro metodo consiste nel misurare una stessa quantità di elettricità, dapprima in misura elettrostatica e poi in misura elettromagnetica.

La quantità di elettricità che misurarono era la carica di una bottiglia di Leyda. La si misura in unità elettrostatiche, siccome è il prodotto della capacità della bottiglia per la differenza dei

¹Sir W. Thomson, *R. S. Proc.*, o *Reprint*, Cap. XIX.

²*Electrodynamische Maasbestimmungen*, e *Pogg. Ann.*, XCIX, 10 agosto 1856.

potenziali delle sue armature. Si determina la capacità della bottiglia confrontandola a quella di una sfera sospesa in uno spazio libero, a una grande distanza da ogni altro corpo. La capacità di una simile sfera si esprime, in misura elettrostatica, con il suo raggio. Così, la capacità della bottiglia può essere ottenuta ed espressa come una certa lunghezza (si veda § 227).

Si misura la differenza di potenziale delle armature della bottiglia collegandole agli elettrodi di un elettrometro le cui costanti erano state determinate con cura: si conosce così la differenza di potenziale E in misura elettrostatica.

Moltiplicando E per la capacità c della bottiglia, la carica della bottiglia è espressa in misura elettrostatica.

Per misurare questa carica in misura elettromagnetica, si scarica la bottiglia attraverso la bobina di un galvanometro. La corrente istantanea agente sul magnete del galvanometro le comunica una certa velocità angolare, e il magnete si sposta fino a una certa elongazione, per la quale la sua velocità si trova interamente eliminata dalla resistenza dovuta al magnetismo terrestre.

Se si osserva questa elongazione estrema del magnete, si può determinare, in misura elettromagnetica, la quantità di elettricità trasmessa dalla corrente; così come si è visto al § 748, la formula è

$$Q = \frac{H T}{G \pi} 2 \sin \frac{1}{2} \theta$$

dove Q è la quantità di elettricità in misura elettromagnetica. Dobbiamo quindi determinare le seguenti quantità:

H intensità della componente orizzontale del magnetismo terrestre, (si veda § 456);

G la costante principale del galvanometro (si veda § 700);

T durata di una oscillazione semplice del magnete;

θ la deviazione dovuta alla corrente istantanea.

Il valore di v , ottenuto da MM. Weber e Kohlrausch, era di

$$U = 310740000 \frac{m}{s}$$

È difficile valutare esattamente la capacità di una bottiglia di Leyda, in virtù della proprietà dei dielettrici solidi detta assorbimento elettrico. La capacità apparente varia con il tempo che passa tra l'origine della carica o della scarica e l'istante in cui si misura il potenziale: più questo tempo è lungo, più grande è il valore che si trova per la capacità della bottiglia.

Ora il tempo necessario per ottenere una lettura all'elettrometro è grande rispetto al tempo durante il quale la scarica si produce attraverso il galvanometro; di conseguenza, la valutazione della scarica in misura elettrostatica è probabilmente troppo grande e il valore di v che si ricava è, senza dubbio, troppo grande.

II. - Espressione di v sotto forma di resistenza

772. Due altri metodi di determinazione di v portano ad esprimere il suo valore in funzione della resistenza di un conduttore dato, resistenza che, nel sistema elettromagnetico, si esprime con una velocità.

Nella forma sperimentale adottata da Sir W. Thomson, si fa passare una corrente costante attraverso un filo di grande resistenza. Si misura in unità elettrostatiche la forza elettromotrice che determina il passaggio di corrente nel filo, collegando gli estremi del filo agli elettrodi di un elettrometro assoluto (§ 217 e 218). L'intensità della corrente nel filo è misurata in misura elettromagnetica, dalla deviazione della bobina di un elettro dinamometro che è attraversato dalla corrente (§ 725). Infine, si determina la resistenza del circuito, in misura elettromagnetica, per confronto con una bobina o un ohm campione. Moltiplicando l'intensità della corrente per

questa corrente, otteniamo, in misura elettromagnetica, la forza elettromotrice e, confrontando questo valore con quello elettrostatico, si ottiene il valore di v .

Questo metodo richiede che si determinino insieme due forze, per mezzo dell'elettrometro e dell'elettro dinamometro, ed è il rapporto di queste forze che compare nel risultato.

773. L'autore ha impiegato un altro metodo nel quale queste forze, invece di essere misurate separatamente, sono direttamente opposte. I terminali di una bobina di grande resistenza sono collegati a due dischi paralleli, uno dei quali mobile. La stessa differenza di potenziale, che determina la corrente nella resistenza, produce un'attrazione dei dischi. Nello stesso tempo, una corrente elettrica che, nelle esperienze, era differente dalla corrente principale, attraversa, in verso contrario, due bobine fissate sul retro, con uno dei dischi fisso e l'altro mobile: queste bobine si respingono tra loro. Regolando la distanza dei dischi, si può equilibrare esattamente l'attrazione con la repulsione, nello stesso tempo che un altro osservatore determina, mediante un galvanometro differenziale dotato di derivazioni, il rapporto tra la corrente principale e quella ausiliaria.

In questa esperienza, la sola misura che deve essere riferita a un campione materiale è quella della grande resistenza, che bisogna determinare in misura assoluta con l'ohm campione. Le altre misure servono solo a determinare rapporti che possono essere fatti in funzione di non importa quale unità arbitraria.

Così, il rapporto di due forze è una rapporto di uguaglianza.

Il rapporto di due intensità si deduce dal confronto delle resistenze che bisogna interporre affinché non vi sia deviazione nel galvanometro differenziale.

La forza attrattiva dipende dal quadrato del rapporto tra il diametro dei dischi e la loro distanza.

La forza repulsiva dipende dal rapporto tra il diametro delle bobine e la loro distanza.

Il valore di v si esprime quindi direttamente in funzione della resistenza della grande bobina, che è stata confrontata all'ohm.

Il valore di v , trovato con il metodo di Thomson, è di $28,2 \text{ ohm}^3$; con il metodo di Maxwell, è di $28,8 \text{ ohm}^4$.

III. - Capacità elettrostatica in misura elettromagnetica

774. La capacità di un condensatore può essere determinata in misura elettromagnetica, confrontando la forza elettromotrice che produce la carica e la quantità di elettricità contenuta nella corrente di scarica. Per mezzo di una pila, si stabilisce una corrente in un circuito comprendente una bobina di grande resistenza. Si carica il condensatore mettendo i suoi elettrodi a contatti con quelli della bobina. La corrente che attraversa la bobina è misurata dalla deviazione che produce in un galvanometro. Sia ϕ questa deviazione; allora, dal § 742,

$$\gamma = \frac{H}{G} \tan \phi$$

dove H è la componente orizzontale del magnetismo terrestre e G la costante principale del galvanometro.

Se R è la resistenza della bobina attraverso la quale si fa passare la corrente, la differenza dei potenziali, alle estremità di questa bobina, è

$$E = R\gamma$$

³Report of the British Association, p. 434; 1869.

⁴Phil. Trans. p. 643, 1868 e Report of the British Association, p. 436; 1869.

e la carica elettrica accumulata nel condensatore la cui capacità, in misura elettromagnetica, è C , è

$$Q = EC$$

Stacciamo allora dal circuito gli elettrodi del condensatori e poi quelli del galvanometro, e, quando il magnete del galvanometro sarà divenuto immobile nella sua posizione di equilibrio, colleghiamo gli elettrodi del condensatore a quelli del galvanometro. Una corrente istantanea attraversa il galvanometro, e imprime al galvanometro una elongazione estrema θ . Allora, se la scarica è uguale alla carica, si deve avere, dal § 748,

$$Q = \frac{HT}{G\pi} 2 \sin \frac{1}{2}\theta$$

Otteniamo così, per valore della capacità del condensatore, in misura elettromagnetica,

$$C = \frac{T}{\pi R} \frac{2 \sin \frac{1}{2}\theta}{\tan \phi}$$

La capacità del condensatore si trova così determinata in funzione delle quantità seguenti:

T , durata di una oscillazione del magnete del galvanometro, della sua posizione di equilibrio alla sua posizione di equilibrio;

R , resistenza della bobina;

θ , limite estremo dell'oscillazione prodotta dalla scarica;

ϕ , deviazione costante dovuta alla corrente che attraversa la bobina R .

Questo metodo è stato impiegato, dal professor Fleeming Jenkin, per determinare la capacità di condensatori in misura elettromagnetica.

Se c è la capacità, in misura elettrostatica, dello stesso condensatore, capacità ottenuta per confronto con un condensatore la cui capacità è calcolabile dai suoi elementi geometrico

$$C = v^2 c$$

da cui

$$v^2 = \pi R \frac{c}{T} \frac{\tan \phi}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}$$

La quantità v può quindi essere trovata in questo modo. Essa dipende dalla misura di R , in misura elettromagnetica; ma, siccome contiene la radice quadrata di R , un errore su questa misura non influirà molto sul valore di v se non nei metodi dei § 772 e 773.

Corrente intermittente

775. Se il filo di un circuito di pila è tagliato in un certo punto e si collegano i due capi alle armature di un condensatore, la corrente entrerà nel condensatore con una intensità che diminuirà all'aumento della differenza dei potenziali del condensatore; e, quando il condensatore avrà ricevuto tutta la carica che corrisponde alla forza elettromotrice che agisce sul filo, la corrente cesserà del tutto.

Se si scollegano gli elettrodi del condensatore dai capi del filo e li si riattaccano in ordine inverso, il condensatore inizierà a scaricarsi nel filo, poi si caricherà di nuovo in senso inverso; di modo che il filo sarà percorso da una corrente istantanea, rappresentante in tutto il doppio della carica del condensatore.

Per mezzo di un organo meccanico detto commutatore, l'inversione dei collegamenti del condensatore può essere riprodotta a intervalli di tempo regolari, essendo ogni intervallo uguale a T . Se questo intervallo è sufficientemente lungo per permettere al condensatore di scaricarsi

interamente, la quantità di elettricità trasmessa nel filo a ogni intervallo sarà $2EC$, dove E è la forza elettromotrice e C la capacità del condensatore.

Se il magnete del galvanometro nel circuito è appesantito in modo che le sue oscillazioni siano molto lente in modo che un grande numero di scariche del condensatore possano prodursi durante un'oscillazione del magnete, questa serie di scariche agisce sul magnete come una corrente permanente di intensità

$$\frac{2EC}{T}$$

Se ora si toglie il condensatore e si mette al suo posto una resistenza di cui si regola il valore finché la corrente permanente che attraversa il galvanometro produca la stessa deviazione della serie di scariche, e se, in questo caso, la resistenza del circuito totale è R ,

$$\frac{E}{R} = \frac{2EC}{T} \quad (27.0.1)$$

o

$$R = \frac{T}{2C} \quad (27.0.2)$$

Si può così confrontare un condensatore dotato del suo commutatore in movimento a un filo di una certa resistenza elettrica; e, per misurare questa resistenza elettrica, ci si può servire di uno qualsiasi dei metodi descritti ai § 345 e 357 per la misura delle resistenze.

776. A tale scopo, si può sostituire un condensatore e il suo commutatore a uno qualunque dei fili, nel metodo del galvanometro differenziale (§ 346) o in quello del ponte di Wheatstone (§ 347). Nell'uno o nell'altro metodo, supponiamo che si sia ottenuta una deviazione nulla del galvanometro, dapprima con il condensatore e il suo commutatore, e poi con una bobina di resistenza r , messa al suo posto; la quantità $\frac{T}{2C}$ sarà misurata dalla resistenza del circuito di cui fa parte la bobina R_1 e che comprende inoltre la pila e il resto dei conduttori. Pertanto la resistenza R , che dobbiamo calcolare, è uguale a R_1 , resistenza della bobina, più R_2 , resistenza del resto del circuito, pila compresa, essendo le estremità della bobina di resistenza prese per elettrodi di questo sistema.

Nel caso del galvanometro differenziale e del ponte di Wheatstone, non è necessario fare una seconda esperienza sostituendo una bobina di resistenza al condensatore. Il valore della resistenza equivalente al condensatore si può calcolare alla maniera delle altre resistenze date del sistema.

Impiegando le notazioni del § 347, e supponendo il condensatore e il suo commutatore sostituiti al condensatore AC del ponte di Wheatstone, il galvanometro in OA , e la deviazione nulla. Sappiamo che la resistenza di una bobina che, posta in AC , darebbe una deviazione nulla, è data dalla formula

$$b = \frac{C\gamma}{\beta} = R_1 \quad (27.0.3)$$

L'altra parte R_2 della resistenza è quella del sistema di conduttori AO, OC, AB, BC, OB , essendo i punti A e C considerati come elettrodi. Si ha quindi

$$R_2 = \frac{\beta(c+a)(\gamma+\alpha) + ca(\gamma+\alpha) + \gamma\alpha(c+a)}{(c+a)(\gamma+\alpha) + \beta(c+a+\gamma+\alpha)} \quad (27.0.4)$$

In questa espressione, α rappresenta la resistenza interna della pila e delle sue connessioni, di cui si può misurare il valore con precisione; ma, se la si rende piccola rispetto alle altre resistenze, questa incertezza influirà solo poco sul valore di R_2 .

Il valore della capacità del condensatore, in misura elettromagnetica, è

$$C = \frac{T}{2(R_1 + R_2)} \quad (27.0.5)$$

777. Se il condensatore ha una grande capacità e il commutatore un movimento molto rapido, il condensatore può non essere interamente scaricato a ogni inversione. L'equazione della corrente elettrica durante la scarica è

$$Q + R_2 C \frac{dQ}{dt} + EC = 0 \quad (27.0.6)$$

essendo Q la carica, C la capacità del condensatore, R_2 la resistenza del resto del sistema compreso tra gli elettrodi, E la forza elettromotrice dovuta ai collegamenti con la pila; da cui

$$Q = (Q_0 + EC) e^{-\frac{t}{R_2 C}} - EC \quad (27.0.7)$$

dove Q_0 è il valore iniziale di Q .

Se τ è il tempo durante il quale il contatto è mantenuto a ogni scarica, la quantità che passa in ogni scarica è

$$Q = 2EC \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{R_2 C}}}{1 + e^{-\frac{\tau}{R_2 C}}} \quad (27.0.8)$$

Ponendo nella (27-4) c e γ notevoli rispetto a β , a o α , il tempo rappresentato da $R_2 C$ può essere reso molto piccolo, rispetto a τ , perché si possa calcolare il valore dell'esponenziale servendosi del valore di C ricavato dalla (27-5). Si trova così

$$\frac{\tau}{R_2 C} = 2 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{\tau}{T} \quad (27.0.9)$$

dove R_1 è la resistenza che deve essere sostituita al condensatore per produrre un effetto equivalente. R_2 è la resistenza del resto del sistema; T è l'intervallo di tempo compreso tra l'inizio di due scariche consecutive, e τ è la durata di ogni scarica. Si ottiene così, per valore corretto di C , in misura elettromagnetica,

$$C = \frac{1}{2} \frac{T}{R_1 + R_2} \frac{1 + e^{-2 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{\tau}{T}}}{1 - e^{-2 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{\tau}{T}}} \quad (27.0.10)$$

IV. - Confronto della capacità elettrostatica di un condensatore con la capacità elettromagnetica di auto induzione di una bobina

778. Se due punti di un circuito, tra i quali la resistenza è R , sono collegati agli elettrodi di un condensatore di capacità C , e una forza elettromotrice agisce nel circuito, una parte della corrente, invece di passare nella resistenza R , è impiegata a caricare il condensatore. Di conseguenza, la corrente che attraversa R , partendo da zero, non raggiungerà il suo valore finale solo in modo graduale. Risulta dalla teoria matematica, che una formula esattamente della stessa natura rappresenta le variazioni della corrente che attraversa R , da zero fino al suo valore finale, e quelle di una corrente emessa da una forza elettromotrice costante attraverso la bobina di un elettromagnete. Si può quindi porre nei rami opposti di un ponte di Wheatstone un condensatore e un elettromagnete, in modo tale la corrente del galvanometro sia nulla, anche nel momento in cui si apre o si chiude il circuito della pila.

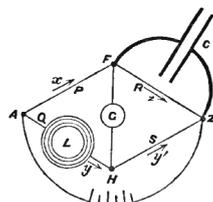


Fig. 63.

Siano, nella figura, P, Q, R, S le rispettive resistenze dei quattro rami di un ponte di Wheatstone. Poniamo nel ramo AH , la cui resistenza è Q , una bobina il cui coefficiente di autoinduzione è L , e colleghiamo ai punti P e z , con parti a bassa resistenza, gli elettrodi di un condensatore di capacità C . Per maggiore semplicità, supponiamo che non vi sia corrente nel galvanometro G , i cui elettrodi sono collegati a F e a H . Dobbiamo pertanto determinare la condizione per la quale il potenziale di F sia uguale a quello di H . Ed è solo quando vorremo valutare la sensibilità del metodo che avremo bisogno di calcolare la corrente che attraversa il galvanometro quando questa condizione non è soddisfatta.

Siano x la quantità totale di elettricità che ha attraversato il ramo AF ; z quella che ha attraversato il ramo Fz , nel tempo t . La carica del condensatore sarà $x - z$. La forza elettromotrice che agisce tra le armature del condensatore è, dalla legge di Ohm, $R \frac{dz}{dt}$; se quindi la capacità del condensatore è C

$$x - z = RC \frac{dz}{dt} \quad (27.0.11)$$

Sia y la quantità totale di elettricità che ha attraversato il ramo AH ; la forza elettromotrice che agisce da A verso H deve essere uguale a quella che agisce da A verso F , o

$$Q \frac{dy}{dt} + L \frac{d^2y}{dt^2} = P \frac{dx}{dt} \quad (27.0.12)$$

Poiché non vi è corrente nel galvanometro, la quantità che attraversa Hz deve essere y , e troviamo

$$S \frac{dy}{dt} = R \frac{dz}{dt} \quad (27.0.13)$$

Sostituiamo nella (27-12) il valore di x ricavato dalla (27-11) e confrontando alla (27-13), troviamo che la condizione affinché non passi corrente nel galvanometro è

$$RQ \left(1 + \frac{L}{Q} \frac{d}{dt} \right) z = SP \left(1 + RC \frac{d}{dt} \right) z \quad (27.0.14)$$

La condizione perché in regime permanente non vi sia corrente è, come in un comune ponte di Wheatstone,

$$QR = SP \quad (27.0.15)$$

Affinché non vi sia corrente quando si apre o quando si chiude il contatto della pila, serve, inoltre,

$$\frac{L}{Q} = RC \quad (27.0.16)$$

Qui, $\frac{L}{Q}$ e RC sono le costanti relative al tempo dei rami Q e R , e se, facendo variare Q e R , si possono regolare i rami del ponte di Wheatstone, in modo che il galvanometro non presenti correnti né quando si apre né quando si chiude il circuito, né quando si mantiene la corrente, si sa che la costante di tempo della bobina è uguale a quella del condensatore.

Il coefficiente di autoinduzione L può essere determinato in misura elettromagnetica, per confronto con il coefficiente di induzione reciproca di due circuiti di cui si conoscono gli elementi geometrici (§ 756). È una quantità delle dimensioni di una linea.

La capacità del condensatore si può determinare, in misura elettrostatica, per confronto con un condensatore di cui si conoscono gli elementi geometrici (§ 229). Anche questa quantità è una lunghezza c . La misura elettromagnetica della capacità è

$$C = c \frac{1}{v^2} \quad (27.0.17)$$

Sostituendo questo valore nella (27-16), abbiamo per valore di v^2

$$v^2 = \frac{cQR}{L} \quad (27.0.18)$$

dove c è la capacità del condensatore in misura elettromagnetica; L è il coefficiente di autoinduzione della bobina in misura elettromagnetica; Q e R sono resistenze in misura elettromagnetica. Il valore di v , determinato con questo metodo, dipende, come nel secondo metodo, dalla determinazione dell'unità di resistenza (§ 772, 773).

V. - Combinazione della capacità elettrostatica di un condensatore con la capacità elettromagnetica di autoinduzione di una bobina

779. Sia C la capacità di un condensatore le cui armature sono collegate da un filo di resistenza R comprendente le due bobine L e L' , e sia L la somma delle loro capacità di autoinduzione. La bobina L è sospesa mediante una sospensione bifilare, ed è formata da due bobine a piani verticali; tra esse passa un asse verticale portante un magnete M il cui asse descrive un piano orizzontale tra le due bobine (fig. 64).

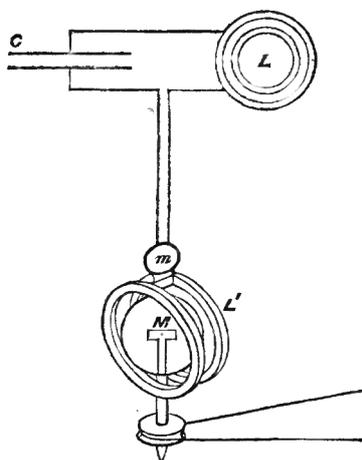


Fig. 64.

La bobina L ha un coefficiente di autoinduzione notevole; essa è fissa. Si protegge la bobina sospesa L' contro le correnti d'aria causate dalla rotazione del magnete, racchiudendo le parti mobili in una cassa cava.

Il movimento del magnete induce correnti nella bobina; queste sono influenzate dal magnete, in modo tale che il piano della bobina sospesa è deviato nel verso della rotazione del magnete. Determiniamo l'intensità di queste correnti indotte e la grandezza della deviazione della bobina sospesa.

Sia x la carica dell'armatura superiore del condensatore. Se E è la forza elettromotrice che produce questa carica, si deve avere, dalla teoria del condensatore,

$$x = CE \quad (27.0.19)$$

Si ha così, dalla teoria delle correnti elettriche,

$$R\dot{x} + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M \cos \theta) + E = 0 \quad (27.0.20)$$

dove M è la quantità di moto elettromagnetica del circuito L' quando l'asse del magnete è normale al piano della bobina, e θ è l'angolo tra l'asse del magnete e questa normale.

L'equazione che determina x è quindi

$$CL \frac{d^2x}{dt^2} + CR \frac{dx}{dt} + x = CM \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (27.0.21)$$

Se la bobina è in una posizione di equilibrio e se la rotazione del magnete avviene con una velocità angolare uniforme n ,

$$\theta = nt \quad (27.0.22)$$

L'espressione della corrente è formata da due parti: una è indipendente dal secondo membro dell'equazione e diminuisce come una funzione esponenziale del tempo; l'altra, che si può chiamare la corrente forzata, dipende interamente dal termine in θ e si può scrivere

$$x = A \sin \theta + B \cos \theta \quad (27.0.23)$$

Si trovano i valori di A e B sostituendo nella (27-21), e si ottiene

$$x = -MCn \frac{RCn \cos \theta - (1 - CLn^2) \sin \theta}{R^2C^2n^2 + (1 - CLn^2)^2} \quad (27.0.24)$$

Il momento della forza con la quale il magnete agisce sulla bobina L' , attraversata dalla corrente \dot{x} , è di verso contrario a quello che agirebbe sul magnete, supponendo la bobina fissa; è quindi dato da

$$\Theta = -\dot{x} \frac{d}{d\theta} (M \cos \theta) = M \sin \theta \frac{dx}{dt} \quad (27.0.25)$$

Integrando questa espressione rispetto a t per una rivoluzione, e dividendo per il tempo, troviamo, per il valore medio di Θ ,

$$\bar{\Theta} = -\frac{1}{2} \frac{M^2 RC^2 n^3}{R^2 C^2 n^2 + (1 - CLn^2)^2} \quad (27.0.26)$$

Se la bobina ha un momento d'inerzia notevole, le sue oscillazioni forzate saranno molto piccole, e la sua deviazione media sarà proporzionale a $\bar{\Theta}$.

Siano D_1, D_2, D_3 , le deviazioni osservate per le velocità angolari n_1, n_2, n_3 del magnete; allora si ha, in generale,

$$P \frac{n}{D} = \left(\frac{1}{n} - CLn \right)^2 + R^2 C^2 \quad (27.0.27)$$

dove P è costante.

Eliminando P e R tra tre equazioni di questa forma, si trova

$$C^2 L^2 = \frac{1}{n_1^2 n_2^2 n_3^2} \frac{\frac{n_1^3}{D_1} (n_2^2 - n_3^2) + \frac{n_2^3}{D_2} (n_3^2 - n_1^2) + \frac{n_3^3}{D_3} (n_1^2 - n_2^2)}{\frac{n_1}{D_1} (n_2^2 - n_3^2) + \frac{n_2}{D_2} (n_3^2 - n_1^2) + \frac{n_3}{D_3} (n_1^2 - n_2^2)} \quad (27.0.28)$$

Se n_2 è tale che $CLn_2^2 = 1$, il valore di $\frac{n}{D}$ sarà minimo per questo valore di n . Si prederanno altri valori di n , uno più grande, l'altro più piccolo di n_2 .

Il valore di CL , ricavato da questa equazione, ha per dimensione il quadrato di un tempo. Chiamiamolo τ^2 .

Se C_s è la misura elettrostatica della capacità del condensatore e se L_m è la misura elettromagnetica dell'autoinduzione della bobina, C_s e L_m sono linee, e il prodotto

$$C_s L_m = v^2 C_s L_s = v^2 C_m L_m = v^2 \tau^2 \quad (27.0.29)$$

e

$$v^2 = \frac{C_s L_m}{\tau^2} \quad (27.0.30)$$

dove τ^2 è il valore di $C^2 L^2$, determinato da questo esperimento. L'esperimento qui suggerito come un metodo per determinare v è dello stesso tipo di uno descritto da Sir W. R. Grove, *Phil. Mag.*, marzo 1868, p. 184. Si vedano anche le note dell'autore, su questa esperienza, nel numero di maggio 1868.

VI. - Misura elettrostatica della resistenza (Si veda § 355)

780. Scarichiamo un condensatore di capacità C attraverso un conduttore di resistenza R ; se x è la carica in ogni istante,

$$\frac{x}{C} + R \frac{dx}{dt} = 0 \quad (27.0.31)$$

da cui

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (27.0.32)$$

Se, con un metodo qualsiasi, si possono dare contatti di durata molto breve ed esattamente nota, in modo che la corrente attraverso il conduttore nel tempo t , e se E_0 e E_1 sono le letture di un elettrometro collegato al condensatore prima e dopo l'operazione

$$RC (\ln E_0 - \ln E_1) = t \quad (27.0.33)$$

Se C è noto, in misura elettrostatica, come quantità lineare, R può essere dedotto da questa espressione, in misura elettrostatica, come l'inverso di una velocità.

Se R , è il valore numerico così determinato della resistenza e R_m il valore numerico in misura elettromagnetica

$$v^2 = \frac{R_m}{R_s} \quad (27.0.34)$$

Poiché è necessario per questa esperienza che R sia molto grande, e che R debba essere piccolo nelle esperienze elettromagnetiche del § 763 e seguenti, le esperienze devono essere fatte su conduttori diversi, le cui resistenze sono confrontate con i metodi comuni.

28 Teoria elettromagnetica della luce

781. In numerosi passaggi di questo Trattato, si è cercato di spiegare i fenomeni elettromagnetico mediante un'azione meccanica trasmessa da un corpo a un altro con la mediazione di un mezzo che riempirebbe lo spazio compreso tra i corpi. La teoria ondulatoria della luce presuppone pure l'esistenza di un mezzo. Mostriamo ora che il mezzo elettromagnetico ha proprietà identiche a quello in cui si propaga la luce.

Riempire lo spazio di un nuovo mezzo tutte le volte che si deve spiegare un nuovo fenomeno non sarebbe un procedimento molto filosofico; al contrario, se, essendo giunti indipendentemente con lo studio di due settori diversi della Scienza all'ipotesi di un mezzo, le proprietà che bisogna attribuire a questo mezzo possono rendere conto dei fenomeni elettromagnetici si trovano essere della stessa natura di quelle che dobbiamo attribuire all'etere luminoso per spiegare i fenomeni della luce, le nostre ragioni di credere all'esistenza di un simile mezzo si troveranno sicuramente confermate.

Ma le proprietà dei corpi sono suscettibili di misure quantitative. Otteniamo così il valore numerico di certe proprietà del mezzo, per esempio della velocità con la quale vi si propaga una perturbazione, velocità che possiamo osservare direttamente nel caso della luce. Se si trova che la velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche è la stessa della velocità della luce, e ciò, non solo nell'aria, ma in tutti gli altri mezzi trasparenti, avremo forti motivi di credere che la luce è un fenomeno elettromagnetico, e, dalla combinazione delle prove ottiche ed elettriche, ci convinceremo che la realtà di questo mezzo nel caso delle altre specie di materia, ci convincono dalla testimonianza combinata dei sensi.

782. Quando viene emessa della luce, i corpi luminosi spendono una certa quantità di energia, e, se questa luce è assorbita da un altro corpo, questo si scalda, testimoniando così di ricevere energia dall'esterno. Durante il tempo che la luce, avendo già lasciato il primo corpo, non ha ancora raggiunto il secondo, essa deve esistere allo stato di energia nel mezzo intermedio.

Nella teoria dell'emissione, il trasporto dell'energia si effettua con il trasporto effettivo di particelle di luce che vanno dal corpo luminoso al corpo illuminato e trasportando con esse la loro energia cinetica, così come ogni altra forma di energia di cui potrebbero essere la sede.

Nella teoria delle ondulazioni, vi è un mezzo materiale che riempie tutto lo spazio compreso tra i due corpi ed è dall'azione delle parti contigue di questo mezzo che l'energia si trasmette progressivamente fino a raggiungere il corpo illuminato.

Pertanto, durante il passaggio della luce, il mezzo luminoso contiene energia. Nella teoria ondulatoria, come è stata sviluppata da Huygens, Fresnel, Green, ecc., si suppone che questa energia è in parte potenziale, in parte cinetica. Si suppone che l'energia potenziale è dovuta alla deformazione delle parti elementari del mezzo, ciò che porta a descriverlo come elastico, e che l'energia cinetica è dovuta al moto vibratorio del mezzo, da cui la conseguenza che esso ha una densità finita.

Nella teoria dell'elettricità e del magnetismo, qui adottata, si riconoscono due forme di energia, elettrostatica ed elettrocinetica (si veda § 630 e 636) e si suppone che esse si trovino non solo sui corpi elettrizzati o magnetizzati, ma anche in ogni punto dello spazio circostante in cui si osserva un'azione della forza elettrica o magnetica. Così, la nostra teoria è in accordo con la teoria ondulatoria su questo punto, che ammette l'esistenza di un mezzo in grado di divenire sede di due tipi di energia¹.

¹“Da parte mia, quando considero la relazione che potrebbe esistere tra uno spazio vuoto e la forza magnetica, così

738. Determiniamo ora in quali condizioni si propaga una perturbazione elettromagnetica in un mezzo che supporremo a riposo, cioè non avente altri movimenti che quelli che possono far parte della perturbazione elettromagnetica.

Siano C la conducibilità specifica del mezzo; K il suo potere specifico per l'induzione elettrostatica; μ la sua permeabilità magnetica.

Per ottenere l'equazione generale di una perturbazione elettromagnetica, esprimiamo la corrente effettiva \mathfrak{C} in funzione del potenziale vettore \mathfrak{A} e del potenziale elettrico Ψ .

La corrente vera \mathfrak{C} si compone della corrente di conduzione R e della variazione dello spostamento elettrico \mathfrak{D} ; e, poiché questi due elementi dipendono entrambi dalla forza elettromotrice \mathfrak{E} , troviamo, come al § 611,

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt} \right) \mathfrak{E} \quad (28.0.1)$$

Ma poiché non vi sono moti nel mezzo, possiamo esprimere la forza elettromotrice, come nel § 599,

$$\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi \quad (28.0.2)$$

Pertanto

$$\mathfrak{C} = - \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \nabla\Psi \right) \quad (28.0.3)$$

Ma possiamo determinare altrimenti una relazione tra \mathfrak{C} e \mathfrak{A} , così come visto al § 616, per cui le (17-5) si possono scrivere

$$4\pi\mu\mathfrak{C} = \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J \quad (28.0.4)$$

dove

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \quad (28.0.5)$$

Combinando la (28-3) e la (28-4), otteniamo

$$\mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \nabla\Psi \right) + \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J = 0 \quad (28.0.6)$$

che possiamo esprimere nella forma di tre equazioni nel modo seguente

$$\begin{cases} \mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{dF}{dt} + \frac{d\Psi}{dx} \right) + \nabla^2 F + \frac{dJ}{dx} = 0 \\ \mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{dG}{dt} + \frac{d\Psi}{dy} \right) + \nabla^2 G + \frac{dJ}{dy} = 0 \\ \mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{dH}{dt} + \frac{d\Psi}{dz} \right) + \nabla^2 H + \frac{dJ}{dz} = 0 \end{cases} \quad (28.0.7)$$

Queste sono le equazioni generali delle perturbazioni elettromagnetiche.

Se differenziamo queste equazioni rispetto rispettivamente a x, y, z e sommiamo, otteniamo

$$\mu \left(4\pi C + K \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{dJ}{dt} - \nabla^2\Psi \right) = 0 \quad (28.0.8)$$

Se il mezzo non è un conduttore, $C = 0$ e $\nabla^2\Psi$, che è proporzionale alla densità di volume dell'elettricità libera, è indipendente da t . Pertanto J deve essere una funzione lineare di t , o una costante, o zero, a possiamo quindi non tenere conto di J e Ψ se consideriamo perturbazioni periodiche.

come il carattere generale dei fenomeni magnetici al di fuori del magnete, tendo a credere che la trasmissione della forza si fa con una certa azione esterna al magnete, e non che i suoi effetti sono semplicemente attrazioni e repulsioni a distanza. Una tale azione potrebbe essere una funzione dell'etere; poiché non è del tutto inverosimile che l'etere, se esiste, abbia altre funzioni oltre ad essere semplicemente il veicolo delle radiazioni." (*Experimental Researches*, Faraday, 3075).

Propagazione delle onde in un mezzo non conduttore

784. In questo caso $C = 0$ e le equazioni divengono

$$\begin{cases} K\mu \frac{d^2 F}{dt^2} + \nabla^2 F = 0 \\ K\mu \frac{d^2 G}{dt^2} + \nabla^2 G = 0 \\ K\mu \frac{d^2 H}{dt^2} + \nabla^2 H = 0 \end{cases} \quad (28.0.9)$$

Sotto questa forma, queste equazioni sono simili a quelle del moto di un corpo elastico e, quando sono date le condizioni iniziali, la soluzione può essere ottenute sotto una forma indicata da Poisson² e applicate da Stokes alla teoria della diffrazione³.

Poniamo

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}} \quad (28.0.10)$$

Se, al tempo $t = 0$, conosciamo, in ogni punto dello spazio, i valori di F, G, H e di $\frac{dF}{dt}, \frac{dG}{dt}, \frac{dH}{dt}$, potremo determinare questi valori, per un tempo qualsiasi, nel modo seguente:

Sia O il punto per il quale vogliamo determinare il valore di F al tempo t . Da O come centro, con un raggio uguale a Vt , descriviamo una sfera. Cerchiamo il valore iniziale di F in ognuno dei punti di questa superficie, e prendiamo il valore medio \bar{F} . Cerchiamo poi il valore iniziale di $\frac{dF}{dt}$ in ognuno dei punti della superficie, e sia $\frac{d\bar{F}}{dt}$ la loro media.

Allora il valore di F nel punto O , al tempo t , è

$$\begin{cases} F = \frac{d}{dt} (\bar{F}t) + t \frac{d\bar{F}}{dt} \\ G = \frac{d}{dt} (\bar{G}t) + t \frac{d\bar{G}}{dt} \\ H = \frac{d}{dt} (\bar{H}t) + t \frac{d\bar{H}}{dt} \end{cases} \quad (28.0.11)$$

785. Si vede quindi che in ogni istante lo stato delle cose nel punto O dipende dallo stato delle cose che esisteva a una distanza Vt , in un momento anteriore di t ; cioè che una perturbazione si propaga nel mezzo con la velocità V .

Supponiamo che al tempo $t = 0$ le quantità \mathfrak{A} e \mathfrak{A} siano nulle, tranne in un certo spazio S . Il loro valore in O , al tempo t , sarà zero, a meno che la sfera, descritta da O come centro con Vt come raggio, non si trovi compresa in tutto o in parte nello spazio S . Se O è esterno allo spazio S , non vi è perturbazione in O prima che Vt sia divenuto uguale alla più breve distanza da O allo spazio S . Allora la perturbazione inizia a prodursi in O e dura finché Vt è divenuto uguale alla più lunga distanza dal punto O a un punto qualunque dello spazio S ; in questo momento, la perturbazione cessa per sempre in O .

786. La quantità V , che esprime la velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche in un mezzo non conduttore, è, dalla (28-9) uguale a $\frac{1}{\sqrt{K\mu}}$

Se il mezzo è l'aria, e se impieghiamo il sistema di misura elettrostatico, $K = 1$ e $\mu = \frac{1}{v^2}$; di modo che $V = v$, o la velocità di propagazione è numericamente uguale al numero di unità elettrostatiche di elettricità contenute in una unità elettromagnetica. Se prendiamo il sistema di misura elettromagnetica, $K = \frac{1}{v^2}$ e $\mu = 1$, di modo che l'equazione $V = v$, rimane vera.

Se si introduce nella teoria che fa della luce una perturbazione elettromagnetica propagantesi nello stesso mezzo che trasmette le altre azioni elettromagnetiche, V deve essere la velocità della luce, quantità il cui valore è stato misurato con parecchi metodi. D'altra parte, v è il numero delle unità elettrostatiche, e lo si è descritto nel capitolo precedente, e i metodi permettono di determinare tale grandezza. Questi metodi sono interamente indipendenti da quelli che servono

² *Mém. de l'Acad.* t. III, p. 130.

³ *Cambridge Transactions*, vol. IX, p. 10; 1850.

per misurare la velocità della luce. Pertanto l'accordo o il disaccordo dei valori di V e di v fornisce una verifica della teoria elettromagnetica della luce.

787. Nella tabella seguente, si mettono in risalto i principali risultati delle osservazioni dirette fatte sulla velocità della luce nell'aria o negli spazi planetari, e i principali risultati ottenuti nel confronto delle unità elettriche⁴:

velocità della luce $\frac{m}{s}$		Rapporto delle unità elettriche	
Fizeau	314000000	Weber	310740000
Aberrazione, ecc., parallasse del Sole	308000000	Maxwell	288000000
Foucault	298360000	Thomson	282000000

È chiaro che la velocità della luce e il rapporto della unità sono quantità dello stesso ordine di grandezza; ma, finora, non si può dire che nessuna delle due è stata determinata con una precisione tale da poter affermare che una è migliore dell'altra. È da augurare che nuove esperienze determinino, con maggiore precisione, il rapporto di grandezza tra queste due quantità.

In attesa, la nostra teoria, che afferma l'uguaglianza di queste due quantità e che offre una ragione fisica per tale uguaglianza, non si trova certamente contraddetta dal confronto di questi risultati, così come sono.

788. Nei mezzi diversi dall'aria, la velocità V è inversamente proporzionale alla radice quadrata del prodotto del potere induttore dielettrico e del potere induttore magnetico. Nella teoria ondulatoria, la velocità della luce nei diversi mezzi è inversamente proporzionale agli indici di rifrazione di questi mezzi.

Non vi è mezzo trasparente il cui potere magnetico differisce da quello dell'aria più una frazione molto piccola. La maggior parte della differenza che esiste tra questi mezzi deve quindi riguardare il loro potere dielettrico. Pertanto, secondo la nostra teoria, il potere dielettrico di un mezzo trasparente deve essere uguale al quadrato del suo indice di rifrazione.

Ma l'indice di rifrazione ha valori differenti per i diversi tipi di luce, ed è tanto più grande quanto la luce ha vibrazioni più rapide. Dobbiamo quindi scegliere l'indice di rifrazione che corrisponde alle onde il cui periodo è più lungo, essendo queste onde le sole il cui movimento possa confrontarsi alle operazioni lente con l'aiuto delle quali determiniamo la capacità di un dielettrico.

789. Il solo dielettrico la cui capacità è stata, finora, determinata con una sufficiente precisione, è la paraffina; MM. Gibson e Barclay hanno trovato per questa sostanza, allo stato solido⁵,

$$K = 1,975$$

Il Dr Gladstone ha trovato per la paraffina fusa, di densità 0,779, i valori seguenti degli indici di rifrazione relativi alle linee A, D, H :

Temperatura	A	D	H
54° C	1,4306	1,4357	1,4499
57° C	1,4294	1,4343	1,4493

⁴Alla voce Maxwell: Gli esperimenti fatti dal Committee of the British Association per la misura delle unità di resistenza in misura assoluta sono state di recente ripetute da Lord Rayleigh e dal Dr. Schuster al Cavendish Laboratory: essi hanno trovato che l'ohm è circa l'1% più piccolo. Per tener conto di questa correzione, bisognerebbe diminuire dell'1% circa i valori dati da Maxwell e Thomson come rapporto delle unità elettriche.

⁵*Phil. Trans.*, 1871, p. 573.

Da ciò si ricava, per l'indice di rifrazione delle onde di lunghezza infinita 1,422.

La radice quadrata di K è 1,405.

La differenza tra questi due valori supera l'errore sperimentale, e mostra che le nostre teorie sulla struttura dei corpi devono ancora essere perfezionate, prima di poter dedurre le proprietà elettriche dalle proprietà ottiche dei corpi. Nello stesso tempo, credo che l'accordo di questi valori è tale che, se i numeri ottenuti per le proprietà elettriche e ottiche di un gran numero di corpi non presentasse più grandi differenze, saremmo in diritto di concludere che la radice quadrata di K forma, se non l'espressione completa, almeno il termine principale dell'indice di rifrazione⁶.

Onde piane

790. Limitiamo ora la nostra attenzione alle onde piane che supporremo normali all'asse z . Tutte le quantità, la cui variazione caratterizza queste onde, saranno unicamente funzioni di z e di t e non dipenderanno da x e y . Le equazioni dell'induzione magnetica (A), § 591, si riducono a

$$a = -\frac{dG}{dz} \quad b = \frac{dF}{dz} \quad c = 0 \quad (28.0.12)$$

cioè che la perturbazione magnetica è nel piano dell'onda. Risultato conforme a quanto sappiamo sulla natura della perturbazione che rappresenta la luce.

Ponendo $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$ invece di a, b, \dots , le equazioni delle correnti elettriche divengono

$$\begin{cases} 4\pi\mu u = -\frac{db}{dz} = -\frac{d^2F}{dz^2} \\ 4\pi\mu v = -\frac{da}{dz} = 0 \\ 4\pi\mu w = 0 \end{cases} \quad (28.0.13)$$

Pertanto, la vibrazione elettrica è pure nel piano dell'onda, e, se la perturbazione magnetica si produce lungo una sola direzione, quella di x per esempio, la perturbazione elettrica si produce solo nella direzione perpendicolare, cioè quelle delle y .

Ma possiamo calcolare in altro modo la perturbazione elettrica: se f, g, h sono le componenti dello spostamento elettrico in un mezzo non conduttore,

$$u = \frac{df}{dt} \quad v = \frac{dg}{dt} \quad w = \frac{dh}{dt} \quad (28.0.14)$$

se P, Q, R sono le componenti della forza elettromotrice,

$$f = \frac{K}{4\pi}P \quad g = \frac{K}{4\pi}Q \quad h = \frac{K}{4\pi}R \quad (28.0.15)$$

e, poiché non vi sono movimenti nel mezzo, le equazioni (B) del § 598 divengono

$$P = -\frac{dF}{dt} \quad Q = -\frac{dG}{dt} \quad R = -\frac{dH}{dt} \quad (28.0.16)$$

da cui

$$u = -\frac{K}{4\pi} \frac{d^2F}{dt^2} \quad v = -\frac{K}{4\pi} \frac{d^2G}{dt^2} \quad w = -\frac{K}{4\pi} \frac{d^2H}{dt^2} \quad (28.0.17)$$

Confrontando questi valori con quelli della (28-14), si ha

$$\begin{cases} \frac{d^2F}{dz^2} = K\mu \frac{d^2F}{dt^2} \\ \frac{d^2G}{dz^2} = K\mu \frac{d^2G}{dt^2} \\ 0 = K\mu \frac{d^2H}{dt^2} \end{cases} \quad (28.0.18)$$

⁶In una Memoria letta alla Royal Society il 14 gennaio 1877 da Dr. Hopkinson si presentano i risultati di esperienze fatte per determinare il potere induttore specifico dei diversi tipi di vetro. Questi risultati non concordano con le conclusioni teoriche presentate nel testo: sempre il valore di K è superiore al quadrato dell'indice di rifrazione. In una nota ulteriore, letta alla Royal Society il 6 gennaio 1881, il Dr. Hopkinson trova che, indicando con μ_∞ l'indice di rifrazione relativo alle onde di lunghezza infinita, $\mu_\infty^2 = K$ per gli idrocarburi e $K < \mu_\infty^2$ per gli oli vegetali o animali.

La prima e la seconda di queste equazioni sono le equazioni della propagazione di un'onda piana, e sono della forma ben nota

$$\begin{cases} F = f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt) \\ G = f_3(z - Vt) + f_4(z + Vt) \end{cases} \quad (28.0.19)$$

La soluzione della terza equazione è

$$H = A + Bt \quad (28.0.20)$$

dove A e B sono funzioni di z . Pertanto H è costante, o varia proporzionalmente al tempo, ma, in nessun caso, interviene nella propagazione dell'onda.

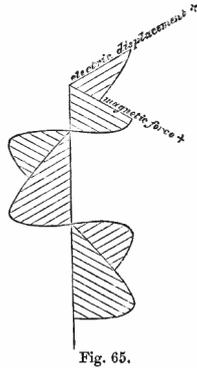


Fig. 65.

791. Da ciò risulta che le perturbazioni elettrica e magnetica sono nel piano dell'onda; e la forma matematica di queste perturbazioni, come quelle della luce, è trasversale alla direzione di propagazione.

Se supponiamo $G = 0$, la perturbazione corrisponderà a un raggio di luce polarizzata nel piano.

In questo caso, la forza magnetica è parallela all'asse y e uguale a $\frac{1}{\mu} \frac{dF}{dz}$ e la forza elettromotrice è parallela all'asse x e uguale a $-\frac{dF}{dt}$. La forza magnetica è quindi in un piano perpendicolare a quello contenente la forza elettrica.

La fig. 65 rappresenta, per il caso di una perturbazione armonica semplice in un piano, i valori che assumono, in un istante date, la forza magnetica e quella elettrica in un punto qualunque del raggio. Questo caso corrisponde a un raggio di luce polarizzata in un piano; ma resta da vedere se il piano di polarizzazione corrisponde al piano della perturbazione magnetica o a quello della perturbazione elettrica (si veda § 797).

Energia e deformazione della radiazione

792. In un punto dell'onda, in un mezzo non conduttore, l'energia elettrostatica per unità di volume è

$$\frac{1}{2} fP = \frac{K}{8\pi} P^2 = \frac{K}{8\pi} \left| \frac{d\bar{F}}{dt} \right|^2 \quad (28.0.21)$$

L'energia elettrocinetica, nello stesso punto, è

$$\frac{1}{8\pi} b\beta = \frac{1}{8\pi\mu} b^2 = \frac{1}{8\pi\mu} \left| \frac{d\bar{F}}{dz} \right|^2 \quad (28.0.22)$$

In virtù della (28-20), queste due espressioni sono uguali per un'onda isolata di modo che in ogni punto dell'onda l'energia interna del mezzo è per metà elettrostatica e per metà elettrocinetica.

Sia p il valore dell'una o dell'altra di queste quantità, energia elettrostatico e elettrocinetica, per unità di volume: in virtù dello stato elettrostatico del mezzo, vi è una tensione di grandezza p , in una direzione parallela a x , nello stesso tempo vi è una pressione pure uguale a p parallela a y e a z (si veda § 107).

In virtù dello stato elettrostatico, vi è una tensione uguale a p , in una direzione parallela a y , combinata a una pressione uguale a p , nelle direzioni parallele a x e a z (si veda § 643).

Pertanto, l'effetto combinato delle azioni elettrostatica ed elettrocinetica consiste in una pressione uguale a $2p$, nel verso della propagazione dell'onda. Ora $2p$ esprime la totalità dell'energia contenuta nell'unità di volume. In un mezzo dove si propagando le onde esiste quindi lungo la direzione normale alle onde una pressione numericamente uguale all'energia contenuta nell'unità di volume.

793. Così, se l'energia della luce che un forte raggio di sole invia su uno spazio di un piede quadrato è di 83,4 libbre-piede ($0,01241 \frac{kgm}{cm^2}$) per secondo, l'energia media contenuta in un piede cubo dello spazio attraversato dal raggio di sole è di circa 0,000000882 libbre-piede ($0,000043223 \frac{kgm}{cm^3}$) e la pressione media per piede quadrato è di 0,000000882 libbre ($0,0000004407$ per cm^2). Un corpo piano, esposta alla luce solare, subirebbe questa pressione sulla sua faccia illuminata e sarebbe così respinto lontano dalla sorgente luminosa. È probabile che si potrebbe ottenere un'energia di radiazione assai maggiore concentrando i raggi di una lampada elettrica. Numerosi raggi, cadenti su un disco metallico leggero, sospeso in modo molto sensibile in uno spazio vuoto, potrebbero forse determinare un effetto meccanico valutabile. Quando una perturbazione, di natura qualunque, è formata da termini che comprendono i seni o i coseno dei angoli varianti con il tempo, l'energia massima è doppia di quella media. Se quindi P è la forza elettromotrice massima, e β la forza magnetica massima messa in gioco durante la propagazione della luce,

$$\frac{K}{8\pi} P^2 = \frac{\mu}{8\pi} \beta^2 = \text{energia media per unità di volume} \quad (28.0.23)$$

Ammettendo per l'energia della luce solare i valori di Pouillet. citati da Sir W. Thomson (*Trans. R. S. E.*, 1854), si trova, in misura elettromagnetica,

$P = 60000000$, o circa 600 daniell per metro,

$\beta = 0,193$ o un poco più del decimo della forza magnetica orizzontale in Gran Bretagna.

Propagazione di un'onda piana in un mezzo cristallino

794. Quando abbiamo calcolato, per mezzo dei dati forniti dalle esperienze elettromagnetiche comuni, i fenomeni elettrici che risulterebbero da perturbazioni periodiche che si producono da milioni di milioni nello spazio di un secondo, abbiamo sottoposto alla nostra teoria una prova che è severa, anche se supponiamo che il mezzo sia l'aria o il vuoto. Ma, se proviamo ad estendere la nostra teoria al caso di mezzi densi, ci troviamo alle prese, non solo con le consuete difficoltà delle teorie molecolari, ma anche la questione, altrettanto oscura, della relazione che esiste tra le molecole e il mezzo elettromagnetico.

Per sfuggire a queste difficoltà, ammetteremo che, in certi mezzi, il potere induttore specifico elettrostatico non è lo stesso in tutte le direzioni; in altre parole, supporremo che lo spostamento elettrico, invece di essere diretto nello stesso verso della forza elettromotrice ed esserle proporzionale, le sia legato da un sistema di equazioni lineari simili a quelle del 297. Si può mostrare, come al § 436, che il sistema dei coefficienti deve essere simmetrico, di modo che, per una scelta opportuno degli assi, le equazioni divengono

$$f = \frac{1}{4\pi} K_1 Q \quad g = \frac{1}{4\pi} K_2 Q \quad h = \frac{1}{4\pi} K_3 R \quad (28.0.24)$$

dove K_1, K_2, K_3 sono i poteri induttori principali del mezzo. Le equazioni della propagazione delle perturbazioni saranno quindi

$$\begin{cases} \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{d^2 G}{dx dy} - \frac{d^2 H}{dz dx} = K_1 \mu \left(\frac{d^2 F}{dt^2} - \frac{d^2 \Psi}{dx dt} \right) \\ \frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{d^2 H}{dy dz} - \frac{d^2 F}{dx dy} = K_2 \mu \left(\frac{d^2 G}{dt^2} - \frac{d^2 \Psi}{dy dt} \right) \\ \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{d^2 H}{dy^2} - \frac{d^2 F}{dz dx} - \frac{d^2 G}{dy dz} = K_3 \mu \left(\frac{d^2 H}{dt^2} - \frac{d^2 \Psi}{dz dt} \right) \end{cases} \quad (28.0.25)$$

795. Se l, m, n sono i coseni direttori della normale al piano dell'onda, V la velocità dell'onda,

$$w = lx + my + nz - Vt \quad (28.0.26)$$

e se indichiamo con F'', G'', H'', Ψ'' le derivate seconde di F, G, H, Ψ rispetto a w ; infine se poniamo

$$K_1 \mu = \frac{1}{a^2} \quad K_2 \mu = \frac{1}{b^2} \quad K_3 \mu = \frac{1}{c^2} \quad (28.0.27)$$

dove a, b, c sono le tre velocità principali di propagazione, le equazioni divengono

$$\begin{cases} \left(m^2 + n^2 - \frac{V^2}{a^2} \right) F'' - lmG'' - nH'' - V\Psi'' \frac{l}{a^2} = 0 \\ -lmF'' + \left(n^2 + m^2 - \frac{V^2}{b^2} \right) G'' - mnH'' - V\Psi'' \frac{m}{b^2} = 0 \\ -nHF'' - mnG'' + \left(l^2 + m^2 - \frac{V^2}{c^2} \right) H'' - V\Psi'' \frac{n}{c^2} = 0 \end{cases} \quad (28.0.28)$$

796. Se scriviamo

$$\frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = U \quad (28.0.29)$$

otteniamo da queste equazioni

$$\begin{cases} VU(VF'' - l\Psi'') = 0 \\ VU(VG'' - m\Psi'') = 0 \\ VU(VH'' - n\Psi'') = 0 \end{cases} \quad (28.0.30)$$

Pertanto, o $V = 0$, nel qual caso l'onda non si propaga del tutto; oppure $U = 0$, ciò che porta per V all'equazione data da Fresnel; oppure le quantità tra parentesi si annullano, nel qual caso il vettore, le cui componenti sono F'', G'', H'' è normale al piano dell'onda e proporzionale alla densità di volume dell'elettricità. ora, non essendo il mezzo conduttore, la densità elettrica in un punto dato è costante, e, di conseguenza, la perturbazione rappresentata da queste equazioni non è periodica e non può dare origine a un'onda. Possiamo quindi considerare Ψ'' come uguale a zero nello studio dell'onda.

797. La velocità di propagazione dell'onda è quindi interamente determinata dall'equazione $U = 0$, cioè

$$\frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = 0 \quad (28.0.31)$$

Vi sono quindi due valori di U e solo due che corrispondono a una direzione data del piano dell'onda.

Se λ, μ, ν sono i coseni direttori della corrente elettrica le cui componenti sono u, v, w

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{1}{a^2} F'' : \frac{1}{b^2} G'' : \frac{1}{c^2} H'' \quad (28.0.32)$$

da cui

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0 \quad (28.0.33)$$

cioè che la corrente è nel piano dell'onda, e la sua direzione in questo piano è determinata dall'equazione

$$\frac{l}{\lambda} (b^2 - c^2) + \frac{m}{\mu} (c^2 - a^2) + \frac{n}{\nu} (a^2 - b^2) = 0 \quad (28.0.34)$$

Queste equazioni sono identiche a quelle che ha dato Fresnel, se si definisce il piano di polarizzazione come un piano passante per il raggio e perpendicolare al piano della perturbazione elettrica.

Secondo questa teoria elettromagnetica della doppia rifrazione, l'onda di perturbazione normale, cioè propagante vibrazioni normali al suo piano o longitudinali, che costituisce una delle principali difficoltà della teoria ordinaria, non esiste, e non bisogna introdurre una nuova ipotesi per rendere conto di questo fatto, che un raggio polarizzato nel piano principale di un cristallo è rifratto nel modo ordinario⁷.

Relazione tra l'opacità e la conducibilità elettrica

798. Se il mezzo, invece di essere un isolante perfetto, è un conduttore la cui conducibilità, per unità di volume, è C , la perturbazione consisterà non solo in spostamenti elettrici, ma anche in corrente di conduzione, di modo che l'energia elettrica si trasforma in calore e che il moto ondulatorio è assorbito dal mezzo.

Se la perturbazione è espressa da una funzione circolare, si può scrivere

$$F = e^{-pz} \cos(nt - qz) \quad (28.0.35)$$

poiché questa funzione soddisfa all'equazione

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = \mu K \frac{d^2 F}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt} \quad (28.0.36)$$

purché

$$q^2 - p^2 = \mu K n^2 \quad (28.0.37)$$

e

$$2pq = 4\pi\mu C n \quad (28.0.38)$$

La velocità di propagazione è

$$V = \frac{n}{q} \quad (28.0.39)$$

e il coefficiente di assorbimento è

$$p = 2\pi\mu C V \quad (28.0.40)$$

Sia R la resistenza, in misura elettromagnetica, di una lamina di lunghezza l , larghezza b , spessore z ;

$$R = \frac{l}{bzC} \quad (28.0.41)$$

La proporzione della luce incidente, che sarà trasmessa da questa luce, sarà

$$e^{-2pz} = e^{-4\pi\mu \frac{l}{b} \frac{V}{R}} \quad (28.0.42)$$

799. La maggior parte dei corpi solidi trasparenti è un buon isolante. Tutti i buoni conduttori sono molto opachi. Tuttavia, vi è un gran numero di eccezioni a questa regola, che più un corpo è opaco e più è conduttore.

⁷Stokes, Report on Double Refraction, *Brit. Assoc. Reports*, 1862, p. 255,

Gli elettroliti lasciano passare la corrente, e un gran numero di essi è trasparente. Talvolta, si può supporre che nel caso delle forze inverse, che si succedono rapidamente durante la propagazione della luce, la forza elettromotrice agisce per troppo poco tempo in una stessa direzione per poter separare interamente le molecole combinate. La forza elettromotrice, in verso contrario, che agisce durante la seconda parte della vibrazione, non fa che distruggere ciò che è stato fatto durante la prima parte della vibrazione. Così, non vi è conduzione propriamente detta nell'elettrolita, non vi è perdita di energia elettrica, e non vi è, di conseguenza, assorbimento della luce.

800. L'oro, l'argento, il platino sono buoni conduttori, e tuttavia, ridotti in lamine molto sottili, lasciano passare la luce. Da alcune esperienze che ho fatto su un pezzo di foglio d'oro, la cui resistenza era stata determinata da M. Hockin, sembra risultare che la trasparenza è molto maggiore di quanto vorrebbe la nostra teoria, a meno, tuttavia, che non ammettiamo che la perdita di energia è meno grande quando la forza elettromotrice è invertita a mezza vibrazione rispetto a quando agisce nello stesso verso per un tempo apprezzabile, come nelle nostre normali esperienze.

801. Consideriamo ora il caso di un mezzo nel quale la conducibilità è grande rispetto al potere induttore specifico.

Possiamo allora trascurare i termini contenenti K nelle equazioni del § 783, che diventano

$$\begin{cases} \nabla^2 F + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt} = 0 \\ \nabla^2 G + 4\pi\mu C \frac{dG}{dt} = 0 \\ \nabla^2 H + 4\pi\mu C \frac{dH}{dt} = 0 \end{cases} \quad (28.0.43)$$

Ognuna di queste equazioni è della forma dell'equazione di diffusione del calore data da Fourier nel suo *Traité de la Chaleur*.

802. Così, prendendo per esempio per prima, la componente F del potenziale vettore varia con il tempo e la posizione, allo stesso modo in cui la temperatura di un corpo solido omogeneo varia con il tempo e la posizione, le condizioni iniziali e quelle alla superficie si corrispondono nei due casi, ed essendo la quantità $4\pi\mu C$ numericamente uguale alla conducibilità termometrica della sostanza, cioè *al numero di unità di volume della sostanza che sarebbe scaldata da un grado di calore che attraversa un cubo della sostanza, avente per lato l'unità e due delle sue facce opposte a temperature differenti di un grado, mentre le altre sono impermeabili al calore*⁸.

I diversi problemi sulla conduzione termica, dei quali Fourier ha dato la soluzione, possono essere trasformati in problemi sulla diffusione delle quantità elettromagnetiche, ricordando che F, G, H sono le componenti di un vettore, mentre, nei problemi di Fourier, la temperatura è una quantità scalare.

Prendiamo uno dei casi di cui Fourier ha dato la soluzione completa⁹: quella di un mezzo indefinito di cui si conosce lo stato iniziale.

Lo stato di un punto qualunque del mezzo al tempo t si ottiene prendendo la media degli stati di ognuna delle parti del mezzo, il peso assegnato a ciascuna di queste parti, nel calcolo della media, essendo

$$e^{-\frac{\pi\mu C r^2}{t}}$$

⁸Si veda Maxwell, *Theory of Heat*, p. 235 prima edizione, p. 255 quarta edizione.

⁹*Traité de la chaleur*, § 384. L'equazione che determina la temperatura v al tempo t di un punto (x, y, z) , in funzione della temperatura iniziale $f(\alpha, \beta, \gamma)$ di un punto (α, β, γ) è

$$v = \iiint \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{2^3 \sqrt{k^3 \pi^3 t^3}} e^{-\left[\frac{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2}{4kt}\right]} f(\alpha, \beta, \gamma)$$

dove k è la conducibilità termometrica.

dove r è la distanza di questa parte dal punto considerato. Nel caso di quantità vettoriali, questa media si ottiene più facilmente considerando separatamente ognuna delle componenti del vettore.

803. In primo luogo, osserviamo che, in questo problema, la conducibilità termica del mezzo di Fourier deve essere presa inversamente proporzionale alla conducibilità elettrica del nostro mezzo, di modo che il tempo necessario per raggiungere uno stato stabilito è tanto più grande quanto la conducibilità elettrica è più elevata. Questo risultato non sembrerà paradossale, se si ricorda il risultato ottenuto al § 655, cioè che un mezzo di conducibilità infinita costituisce una barriera insuperabile alla propagazione della forza magnetica.

In secondo luogo, nel fenomeno della diffusione, il tempo necessario per raggiungere uno stato determinato è proporzionale al quadrato delle dimensioni lineari del sistema.

Non vi è velocità determinata che si possa definire come fosse la velocità di diffusione. Se proviamo a misurare questa velocità determinando il tempo necessario perché una perturbazione di grandezza data si produca a una distanza data dall'origine delle perturbazioni, troviamo che più piccolo è il valore scelto della perturbazione, più grande appare essere la velocità; poiché, per quanto grande sia la distanza e piccolo il tempo, dal punto di vista matematico, il valore della perturbazione differisce da zero.

Questa particolarità distingue la diffusione della propagazione mediante onde, la quale avviene con una velocità determinata. Non vi è perturbazione in un punto prima che l'onda lo raggiunga, e, una volta che essa è passata, la perturbazione cessa per sempre.

804. Esaminiamo ora ciò che avviene quando una corrente elettrica inizia e continua a circolare in un circuito lineare circondato da un mezzo di conducibilità elettrica finita. (Confrontare con il § 660).

Quando la corrente inizia, il suo primo effetto è di produrre una corrente di induzione nella parte del mezzo che rasenta il filo. Il verso di questa corrente è inverso a quello della corrente d'origine; e, nel primo momento, la quantità totale di elettricità è uguale a quella della corrente d'origine, di modo che l'effetto elettromagnetico sulle parti più lontane del mezzo è dapprima nullo, e raggiunge il suo valore finale quando la corrente di induzione svanisce, in ragione della resistenza elettrica del mezzo.

Ma, mentre svanisce la corrente nelle vicinanze del filo, una nuova corrente di induzione si produce più lontano nel mezzo, di modo che lo spazio occupato dalla corrente di induzione si va costantemente allargando, e l'intensità di tale corrente diminuisce costantemente.

Questa diffusione e questa estinzione della corrente di induzione sono un fenomeno esattamente analogo alla diffusione del calore, a partire da una parte del mezzo inizialmente più caldo o più freddo del resto. Ma ci si deve ricordare che la corrente è una quantità vettoriale, e che, in un circuito, vi è una direzione opposta in punti opposti. Quando calcoliamo una componente data della corrente di induzione, dobbiamo confrontare il problema con quello dove quantità uguali di calore e di freddo si diffondono a partire da posti vicini, nel qual caso l'effetto prodotto sui punti lontani è di un ordine di grandezza inferiore.

805. Se la corrente si mantiene costante nel circuito lineare, le correnti di induzione che dipendono dallo stato iniziale si diffondono e si spengono poco alla volta, lasciando il mezzo nel suo stato permanente che è analogo a quello per un flusso di calore. In questo stato, si ha

$$\nabla^2 F = \nabla^2 G = \nabla^2 H = 0 \quad (28.0.44)$$

in tutti i punti del mezzo, salvo quelli che sono occupati dal circuito. Là, si ha

$$\begin{cases} \nabla^2 F = 4\pi u \\ \nabla^2 G = 4\pi v \\ \nabla^2 H = 4\pi w \end{cases} \quad (28.0.45)$$

E queste equazioni bastano a determinare F, G, H in tutti i punti del mezzo. Esse indicano che vi è corrente solo nel circuito, e che le sole forze magnetiche sono quelle che sono dovute alla corrente secondo la teoria ordinaria. La rapidità con la quale si stabilisce questo stato permanente è così grande, che essa non potrà essere misurata con i nostri metodi sperimentali, salvo forse nel caso di una massa molto grande di un mezzo molto conduttore, per esempio di rame.

NOTA. In una Memoria pubblicata negli *Annalen* di Poggendorf, giugno 1867, M. Lorenz ha aggiunto all'equazione di Kirchhoff sulle correnti elettriche (*Pogg. Ann.*, CII, 1856) alcuni termini che non modificano alcun risultato sperimentale; egli ha dedotto così una nuova serie di equazioni che mostrano che si può pensare la distribuzione della forza nel campo elettromagnetico come dovuta alle azioni reciproche di elementi contigui, e che onde, consistenti in correnti elettriche trasversali, si possono propagare nei mezzi non conduttori con una velocità confrontabile con quella della luce. Ne conlude che la vibrazione che costituisce la luce è identica a queste correnti elettriche, e mostra che i corpi conduttori devono essere opachi alle radiazioni.

Questi risultati sono simili a quelli ottenuti in questo Capitolo, sebbene siano stato raggiunti con un altro metodo. La teoria data in questo Capitolo è stata pubblicata, per la prima volta, nelle *Phil. Trans.*, 1865.

29 Azione dei magneti sulla luce

806. Quando si cerca di stabilire una relazione tra i fenomeni elettrici e magnetici e quelli della luce, il progresso più importante che si possa fare consiste nello scoprire qualche caso in cui una delle serie di fenomeni è modificata dall'altra. Per ricercare simili fenomeni, dobbiamo essere guidati dalla conoscenza che abbiamo acquisiti in precedenza, di forme matematiche o geometriche delle grandezze che vogliamo confrontare. Così, se proviamo, come M.me Somerville, a magnetizzare un ago con l'azione della luce, ci dobbiamo ricordare che la distinzione tra nord e sud magnetico è una semplice questione di direzione, e che tutto sarebbe immediatamente invertito cambiando certe convenzioni relative all'uso dei segni matematici. Nel magnetismo, non vi è nulla di analogo a questi fenomeni di elettrolisi, che ci permettono di distinguere l'elettricità positiva da quella negativa dal fatto che l'ossigeno si libera da un polo della pila e l'idrogeno dall'altro.

Così, se non ci dobbiamo aspettare che facendo cadere della luce su una delle estremità di un ago, questa diverrà un polo di un dato nome; poiché i due poli non differiscono l'uno dall'altro, come la luce differisce dall'oscurità.

Ci potremmo attendere un risultato migliore, facendo cadere la luce destogira a un estremo, luce levogira sull'altro; poiché non si può dire che per certi aspetti vi è la stessa relazione tra questi due tipi di luce che tra i due poli di un magnete. E tuttavia l'analogia è ancora incompleta, poiché questi due raggi, combinandosi, non si neutralizzano, ma danno un raggio polarizzato rettilineamente.

Faraday, che aveva piena familiarità con il metodo consistente nello studiare le deformazioni dei corpi trasparenti per mezzo di luce polarizzata, fece un gran numero di esperienze nella speranza di scoprire qualche azione prodotta sulla luce polarizzata, al suo passaggio in mezzi dove si produce la conduzione elettrolitica o l'induzione dielettrica¹. Non riuscì a scoprire alcun effetto di questo tipo, sebbene queste esperienze fossero nelle migliori condizioni per scoprire gli effetti di tensione, la forza elettrica o la corrente essendo perpendicolare alla direzione del raggio, e a 45° dal piano di polarizzazione. Faraday ripeté queste esperienze in molti modi, senza scoprire alcuna azione esercitata sulla luce dalle correnti elettrolitiche o dall'induzione elettrostatica.

Ma riuscì a stabilire una relazione tra il magnetismo e la luce, e le esperienze che fece a tale scopo sono descritte nella diciannovesima serie delle sue *Experimental Reserches*. Prenderemo la scoperta di Faraday come punto di partenza per continuare il nostro studio della natura del magnetismo: descriveremo ora il fenomeno che ha osservato.

807. Un raggio di luce polarizzata rettilinea è trasmesso attraverso un mezzo diamagnetico trasparente; si determina la posizione del piano di polarizzazione all'uscita dal mezzo, cercando la posizione per la quale un analizzatore spegne il raggio. Si fa allora agire una forza magnetica in modo che la direzione della forza coincida nel mezzo con la direzione del raggio. La luce riappare subito, e si spegne di nuovo se si fa ruotare l'analizzatore di un certo angolo: cioè la forza magnetica fa ruotare il piano di polarizzazione attorno alla direzione del raggio come asse, di un angolo misurato dall'angolo di cui si deve fa ruotare l'analizzatore per annullare di nuovo il raggio.

808. L'angolo di cui ha ruotato il piano di polarizzazione è proporzionale:

¹ *Experimental Reserches*, p. 951-954 e 2216-2220.

1° Alla distanza precorsa dal raggio nel mezzo. Pertanto la posizione del piano di polarizzazione cambia, in modo continuo, dall'ingresso fino all'uscita dal mezzo:

2° All'intensità della componente della forza magnetica lungo la direzione del raggio;

3° La grandezza della rotazione dipende dalla natura del mezzo. Non si è ancora osservata rotazione quando il mezzo è l'aria o un altro gas.

Queste tre affermazioni sono incluse in una più generale, che la rotazione angolare è numericamente uguale alla quantità di cui cresce il potenziale magnetico, dal punto in cui il raggio entra nel mezzo a quello da cui esce, moltiplicato per un coefficiente, che, per mezzi diamagnetici, è generalmente positivo.

809. Nei mezzi diamagnetici, il piano di polarizzazione nel verso nel quale una corrente positiva dovrebbe circolare attorno al raggio per produrre una forza nello stesso verso di quella che esiste effettivamente nel mezzo.

Ma Verdet ha scoperto che in certi mezzi ferromagnetici, per esempio in una soluzione concentrata di percloruro di ferro, nell'etere, la rotazione avviene in verso contrario alla corrente che produrrebbe la forza magnetica.

Risulta a ciò che le sostanze ferromagnetiche e diamagnetiche non differiscono solo perché la "permeabilità magnetica" è nel primo caso più grande e nell'altro più piccola di quella nell'aria, ma anche perché le loro proprietà sono realmente opposte.

La proprietà che acquista una sostanza, sotto l'azione di una forza magnetica, di far ruotare il piano di polarizzazione della luce, non è esattamente proporzionale alla sua proprietà ferromagnetica o diamagnetica. Vi sono, infatti, delle eccezioni a questa regola che la rotazione è positiva per le diamagnetiche e negativa per le ferromagnetiche. Così, il cromato neutro di potassio è diamagnetico e produce una rotazione negativa.

810. Vi sono altre sostanze che, senza intervento di una forza magnetica, fanno ruotare verso destra o verso sinistra il piano di polarizzazione del raggio che le attraversa. Presso le une, questa proprietà è legata all'esistenza di un asse: è il caso del quarzo. Nelle altre, la proprietà è indipendente dalla direzione del raggio: tali sono la terebentina, la soluzione di zucchero, ecc. Ma, in tutte queste sostanze, se il piano di polarizzazione del raggio trasmesso ruota nel mezzo secondo un'elica destrorsa, ruota anche secondo un'elica destrorsa se è trasmessa nel mezzo in verso contrario. Quando l'osservatore ha interposto il mezzo sulla traiettoria del raggio, i versi nei quali deve ruotare il suo analizzatore per estinguere il raggio rimane lo stesso relativamente ad esso, osservatore, sia che il raggio venga da nord o da sud, cioè che il verso della rotazione sia invertito nello spazio quando la direzione del raggio è essa stessa invertita. Ma, quando la rotazione è prodotta dalla forza magnetica, il verso di questa rotazione rimane lo stesso nello spazio, sia che il raggio vada verso il nord o verso il sud. Se il mezzo appartiene alla classe positiva, la rotazione è sempre nel verso della corrente positiva che produce o che potrebbe produrre lo stato magnetico attuale del campo; se il mezzo appartiene alla classe negativa, la rotazione è in verso contrario a questa corrente.

Segue da ciò che, se un raggio di luce, che ha attraversato un mezzo da nord a sud, si riflette su uno specchio e attraversa di nuovo il mezzo da sud a nord, la rotazione è doppia quando è dovuta a un'azione magnetica. Ma, se la rotazione dipende solo dalla natura del mezzo, come nella terebentina, ecc., il raggio, riflesso di nuovo attraverso il mezzo, esce nello stesso piano da cui era entrato; la rotazione che è stata prodotta dal primo passaggio nel mezzo è esattamente neutralizzata dal secondo passaggio.

811. La spiegazione fisica di questo fenomeno presenta grandi difficoltà, e non si sa dire se tali difficoltà siano state superate a tutt'oggi, sia per quanto riguarda la rotazione magnetica, sia per la rotazione naturale dovuta a certi mezzi. Possiamo, tuttavia, preparare la via a questa spiegazione dall'analisi dei fatti osservati.

Vi è un teorema ben noto della Cinematica per il quale due vibrazioni circolari uniformi, della stessa ampiezza, dello stesso periodo avvengono nello stesso piano, ma con versi contrari di rotazione, equivalente, componendosi, a una vibrazione rettilinea. Il periodo di questa vibrazione rettilinea è uguale a quello delle vibrazioni circolari, la sua ampiezza è doppia, e la sua direzione è quella della congiungente i punti in cui si incontrerebbero due mobili che eseguano le stesse vibrazioni circolari in versi contrari, lungo lo stesso cerchio. Se quindi una delle vibrazioni circolari ha la sua fase accelerata, la vibrazione rettilinea ruota, nel verso di questa vibrazione circolare, di un angolo uguale alla semi accelerazione della fase.

Si può pure mostrare, con esperienze ottiche dirette, che due raggi di luce polarizzata circolarmente in versi contrari e della stessa intensità formano sovrapponendosi un raggio polarizzato rettilineo; e se, con un mezzo qualunque, si accelera la fase di uno di questi due raggi polarizzati circolarmente, il piano di polarizzazione del raggio risultante ruota della metà dell'angolo di accelerazione della fase.

812. Possiamo quindi esprimere nel modo seguente il fenomeno della rotazione del piano di polarizzazione: un raggio polarizzato rettilineo cade sul mezzo. Questo raggio è equivalente a due raggi polarizzati circolarmente, l'uno ruotante a destra, l'altro a sinistra, rispetto all'osservatore. Dopo aver attraversato il mezzo, il raggio è sempre polarizzato rettilineamente, ma il piano di polarizzazione ha ruotato verso la destra dell'osservatore, per esempio. Pertanto, dei due raggi polarizzati circolarmente, quello che ruota a destra deve avere avuto la sua fase accelerata rispetto all'altro, durante il suo passaggio nel mezzo.

In altre parole, il raggio che ruota verso la destra ha eseguito nel mezzo un maggior numero di vibrazioni e, di conseguenza, ha una lunghezza d'onda più piccola del raggio sinistro che ha lo stesso periodo di rotazione.

Questo modo di enunciare i fatti è interamente indipendente da ogni teoria particolare sulla luce; poiché, benché impieghiamo i termini di lunghezza d'onda, di polarizzazione circolare, ecc., che possono essere collegati, nella nostra mente, a una forma particolare della teoria ondulatoria, il ragionamento è indipendente da questa relazione e si basa sui fatti provati dall'esperienza.

813. Consideriamo ora la conformazione di uno di questi raggi, in un istante dato. Un'onda, ogni punto della quale esegue un movimento circolare, può essere rappresentato da un'elica o una vite. Se si fa ruotare la vite sul suo asse, senza movimento longitudinale, ognuno dei suoi punti descriverà un cerchio e, nello stesso tempo, la propagazione dell'onda sarà raffigurata dal movimento longitudinale apparente delle parti del filetto della vite che sono poste nello stesso modo. È facile vedere che, se la vite è destrorsa, e se l'osservatore è posto all'estremità della vite verso la quale si propaga l'ondulazione, il movimento della vite che apparirà avvenire verso sinistra, cioè in senso inverso al movimento delle lancette di un orologio. Per questo motivo un tale raggio è detto un raggio polarizzato circolarmente sinistrorso.

Allo stesso modo un raggio polarizzato circolarmente destrorso è rappresentato da un'elica sinistrorsa. nella fig. 66, l'elica destrorsa A (a destra della figura) rappresenta un raggio sinistrorso, e l'elica a sinistra B (a sinistra nella figura) rappresenta un raggio destrorso.

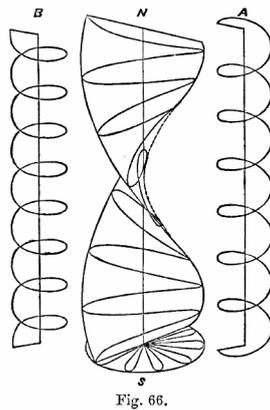


Fig. 66.

814. Consideriamo ora due raggi simili, aventi nel mezzo la stessa lunghezza d'onda: essi sono geometricamente simili sotto tutti gli aspetti, tranne che uno è la riflessione dell'altro, la sua immagine in uno specchio. Ma uno dei due, per esempio *A*, ha un periodo di rotazione più breve dell'altro. Se quindi il movimento è dovuto unicamente a forze messe in gioco dallo spostamento, ciò vuol dire che, per uno stesso spostamento, forze maggiori sono messe in gioco quando la configurazione è simile a quella di *A* che quando è simile a quella di *B*; pertanto, in questo caso, il raggio sinistrorso è accelerato rispetto a quello destrorso, e ne deriverà che il raggio cammina da nord a sud o da sud a nord.

Questa è quindi la spiegazione del fenomeno che avviene nella terebentina, ecc. In questi mezzi, lo spostamento prodotto da un raggio polarizzato circolarmente mette in gioco forze antagoniste più grandi quando la configurazione è simile a quella di *A* che a quella di *B*. La forza dipende quindi dalla sola configurazione, e non dalla direzione, del movimento.

Ma, in un mezzo diamagnetico sottoposto all'azione del magnetismo, nella direzione *SN* di due viti *A* e *B*, quella che ruota sempre più veloce, per la quale l'occhio, guardando da *S* verso *N*, vede il movimento nello stesso verso delle lancette di un orologio. Così, per raggi che vanno da *S* verso *N*, è il raggio destrorso *B*; per i raggi che vanno da *N* verso *S*, è il raggio sinistrorso *A* che va più veloce.

815. Fermiamo ora la nostra attenzione su uno solo dei due raggi. L'elica *B* ha esattamente la stessa configurazione, che rappresenta un raggio che va da *S* verso *N* o da *N* verso *S*; ma, nel primo caso, i raggi si muovono più velocemente e, di conseguenza, l'elica ruota più rapidamente. Pertanto, forze più grandi sono messe in gioco quando l'elica ruota in un verso che nell'altro. Le forze non dipendono, quindi, dalla direzione del moto delle parti che lo compongono.

816. La perturbazione che costituisce la luce, qualunque possa essere la sua natura fisica, è una quantità vettoriale perpendicolare alla direzione del raggio. È quanto risulta dai fatti, che due raggi possono interferire e, in certe condizioni, produrre oscurità; e da questo altro fatto, che due raggi polarizzati in piani perpendicolari tra loro non possono interferire; poiché l'interferenza dipende dalla posizione angolare dei piani di polarizzazione, la perturbazione deve essere una quantità vettoriale; e poiché, l'interferenza cessa di prodursi quando i piani di polarizzazione sono ad angolo retto, il vettore che rappresenta la perturbazione deve essere perpendicolare alla linea di intersezione di questi piani, cioè alla direzione del raggio.

817. Essendo un vettore, la perturbazione può essere scomposta in componenti parallele a *x* e a *y*, essendo l'asse *z* preso parallelamente alla direzione del raggio. Siano ξ e η queste componenti. Nel caso di un raggio di luce omogenea polarizzata circolarmente,

$$\xi = r \cos \theta \quad \eta = r \sin \theta \tag{29.0.1}$$

dove

$$\theta = nt - qz + \alpha \tag{29.0.2}$$

In queste espressioni, r indica il modulo del vettore e θ l'angolo che forma con la direzione dell'asse x .

Il periodo τ della perturbazione è tale che

$$n\tau = 2\pi \quad (29.0.3)$$

La sua lunghezza d'onda λ è data da

$$q\lambda = 2\pi \quad (29.0.4)$$

La velocità di propagazione è $\frac{n}{q}$.

La fase della perturbazione è α , quando t e z sono uguali a zero.

La luce polarizzata circolarmente è destrorsa o sinistrorsa a seconda che q è negativo o positivo.

Le sue vibrazioni sono nel verso positivo o in quello negativo di rotazione del piano xy , a seconda che n è positivo o negativo.

La luce si propaga nel verso positivo o in quello negativo dell'asse z , a seconda che n e q sono o meno dello stesso segno.

In tutti i mezzi, n varia nello stesso tempo di q , e $\frac{dn}{dq}$ è sempre dello stesso segno di $\frac{n}{q}$.

Pertanto, se, per un valore numerico dato di n , il valore di $\frac{n}{q}$ è più grande quando n è positivo che quando è negativo, ne risulta che, per un valore di q dato in modulo e segno, il valore positivo di n è maggiore del suo valore negativo.

Ora, ecco ciò che si osserva in un mezzo diamagnetico sottoposto all'azione di una forza magnetica γ nella direzione delle z . Di due raggi polarizzati circolarmente di periodo dato, quello accelerato è quello la cui rotazione nel piano xy è nella direzione positiva. Pertanto, dei due raggi polarizzati circolarmente, sinistrorsi e della stessa lunghezza d'onda nel mezzo, quello accelerato è quello la cui rotazione nel piano xy è positiva, cioè che si propaga nella direzione positiva delle z , cioè da sud verso nord. Dobbiamo quindi rendere conto di questo fatto, che, dando i valori di q e r nelle equazioni del sistema, vi sono due valori di n che le soddisfano, uno positivo e l'altro negativo, e il positivo è numericamente maggiore del negativo.

818. Possiamo ottenere le equazioni del moto considerando l'energia potenziale e l'energia cinetica del mezzo. L'energia potenziale del sistema dipende dalla sua conformazione, cioè dalla posizioni relative delle sue parti. Fintanto che dipende dalla perturbazione dovuta alla luce polarizzata circolarmente, essa deve essere funzione solo dell'ampiezza r e del coefficiente di torsione q . Può essere differente per valori positivi e negativi di q uguali in valore assoluto e, senza dubbio, è quanto avviene nei mezzi che possiedono naturalmente il potere di far ruotare il piano di polarizzazione.

L'energia cinetica T del sistema è una funzione omogenea di secondo grado delle velocità del sistema, essendo i coefficienti dei diversi termini funzioni delle coordinate.

819. Consideriamo ora la condizione dinamica affinché il raggio abbia un'intensità costante, cioè che r sia costante.

L'equazione di Lagrange, che esprime la forza in funzione di r , diviene

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dr} - \frac{dT}{dr} + \frac{dV}{dr} = 0 \quad (29.0.5)$$

Poiché r è costante, il primo termine si annulla. Abbiamo pertanto l'equazione

$$-\frac{dT}{dr} + \frac{dV}{dr} = 0 \quad (29.0.6)$$

dove q è supposto dato, e dobbiamo determinare la velocità angolare $\dot{\theta}$ che si può indicare con il suo valore effettivo n .

L'energia cinetica T contiene un termine in n^2 ; in altre parole, dove appaiono i prodotti di n con le altre velocità: il resto dei termini è indipendente da n . L'energia potenziale V è del tutto indipendente da n . L'equazione è quindi della forma

$$An^2 + Bn + C = 0 \quad (29.0.7)$$

L'equazione è di secondo grado e dà due valori di n . L'esperienza mostra che questi due valori sono reali, uno positivo e l'altro negativo, e il positivo maggiore in valore assoluto del negativo. Pertanto, se A è positivo, B e C devono essere negativi, poiché, essendo n_1 e n_2 le radici dell'equazione

$$A(n_1 + n_2) + B = 0 \quad (29.0.8)$$

Il coefficiente B non può quindi essere nullo, almeno quando il mezzo è sottoposto a un'azione magnetica. Dobbiamo quindi considerare l'espressione Bn , che è la parte dell'energia cinetica dove figura la potenza di n , velocità angolare della perturbazione.

820. Tutti i termini di T sono del secondo ordine rispetto alle velocità. Pertanto i termini che contengono n devono contenere qualche altra velocità. Quest'altra velocità non può essere né \dot{r} né \dot{q} , poiché, nel caso che consideriamo, r e q sono costanti. Pertanto è una velocità esistente nel mezzo, indipendentemente dal moto che costituisce la luce. Inoltre, questa deve essere una quantità avente con n una relazione tale che moltiplicandola con n il risultato sia una quantità scalare; poiché, essendo T una quantità scalare, i suoi termini non possono essere che quantità scalari. Questa velocità deve quindi essere nella stessa direzione di n o in direzione contraria, cioè deve essere una velocità angolare relativa all'asse z .

Ora, questa velocità non può essere indipendente dalla forza magnetica; poiché, se si riferisse a una direzione fissa nel mezzo, i fenomeni sarebbero differenti quando si rivolta il mezzo da cima a fondo, ciò che non è il caso.

Siamo quindi portati a questa conclusione, che questa velocità è obbligatoriamente legata alla forza magnetica, nel mezzo in cui si manifesta la rotazione magnetica del piano di polarizzazione.

821. Finora, siamo stati obbligati a servirci di un linguaggio che richiamo forse troppo l'ipotesi ordinaria che si fa sul moto nella teoria ondulatoria; ma è facile enunciare i nostri risultati sotto una forma indipendente da questa ipotesi.

Qualunque cosa possa essere la luce in ogni punto dello spazio, si produce qualcosa, spostamento, rotazione o un altro movimento che non si è ancora immaginato, e questo qualcosa ha certamente la natura di un vettore, la cui direzione è normale alla direzione del raggio: è quanto stabilito dai fenomeni di interferenza.

Nel caso della luce polarizzata circolarmente, il modulo del vettore rimane sempre lo stesso; ma la sua direzione cambia e ruota attorno al raggio, in modo da effettuare una rivoluzione completa in un periodo dell'onda. Non sappiamo se questo vettore è nel piano di polarizzazione o in quello perpendicolare; ma questa incertezza non ci deve far ignorare che in qualche verso ruota il vettore nei raggi della luce polarizzata circolarmente, destrorsi o sinistrorsi. La direzione e la velocità angolare di questo vettore non ci sono perfettamente noti, sebbene non sappiamo né la natura fisica, né la sua direzione assoluta in un istante dato.

Quando un raggio di luce polarizzata circolarmente cade su un mezzo soggetto all'azione di una forza magnetica, la relazione che esiste tra i versi della rotazione della luce e la direzione della forza magnetica influisce sulla propagazione del raggio nel suo mezzo. Da ciò concludiamo, per il ragionamento del § 817, che, quando il mezzo è sottoposto all'azione di una forza magnetica, vi si produce un moto rotatorio, essendo l'asse di rotazione nella direzione delle forze magnetiche, e il raggio della luce polarizzata circolarmente non si propaga con la stessa velocità quando la rotazione vibratoria è nello stesso verso della rotazione magnetica del mezzo o quando è in verso contrario.

La sola somiglianza che possiamo intravedere tra un mezzo attraverso il quale si propaga luce polarizzata circolarmente e un mezzo attraversato da linee di forza magnetica, è che, in entrambi i casi, vi è un movimento di rotazione attorno a un asse. Ma la somiglianza è tutta qui; poiché, nel fenomeno ottico, la rotazione è quella del vettore che rappresenta la perturbazione. Questo vettore è sempre perpendicolare alla direzione del raggio ed esegue attorno ad esso un numero conosciuto di rivoluzioni al secondo. Nel fenomeno magnetico, ciò che ruota non ha proprietà che ne distinguono i lati, di modo che non possiamo determinare il numero di rivoluzioni compiute in un secondo-

Non vi è quindi nulla nel fenomeno magnetico che corrisponde alla lunghezza d'onda e alla propagazione delle onde del fenomeno ottico. Un mezzo dove agisce una forza magnetica costante non è pieno, a causa di questa forza, di onde che si muovono in una direzione, come avviene quando la luce si propaga. La sola somiglianza tra il fenomeno ottico e quello magnetico è che in ogni punto del mezzo esiste qualcosa della natura di una velocità angolare agente attorno a un asse diretto lungo la forza magnetica.

Ipotesi dei vortici molecolari

822. Quando si studia l'azione del magnetismo sulla luce polarizzata, si è, come visto, portati a concludere che, in un mezzo sottoposto all'azione di una forza magnetica, una parte del fenomeno è dovuta a qualcosa che, per la sua natura matematica, si avvicina a una velocità angolare agente attorno a un asse diretto lungo la forza magnetica.

Questa velocità angolare non può essere quella di alcuna parte delle dimensioni finite del mezzo, ruotando di un movimento d'insieme. Dobbiamo quindi pensare che questa rotazione è quella delle parti molto piccole del mezzo che ruotano ognuna attorno al proprio asse. Questa è l'ipotesi dei vortici molecolari.

Così come abbiamo visto al § 575, il movimento di questi vortici non influisce sensibilmente sui moti apparenti dei corpi di grandi dimensioni, ma può modificare il movimento vibratorio che, nella teoria ondulatoria, produce la propagazione della luce. Gli spostamenti del mezzo, durante la propagazione della luce, producono una perturbazione nei vortici, e i vortici disturbati possono reagire sul mezzo modificando il modo di propagazione del raggio.

823. Ignoranti, come lo siamo ora, della natura dei vortici, non possiamo formulare la legge che lega gli spostamenti del mezzo alle variazioni dei vortici. Ammetteremo quindi che le variazioni dei vortici causate dagli spostamenti del mezzo sono soggette alle stesse condizioni che, nella sua grande Memoria Sul moto vorticoso², Helmholtz ha mostrato reagire le variazioni dei vortici nei liquidi perfetti.

La legge di Helmholtz si può enunciare nel modo seguente: se il movimento del liquido riporta le molecole in $P'Q'$, la linea $P'Q$ rappresenta la nuova direzione dell'asse del vortice, e la sua forza è modificata nel rapporto di $P'Q'$ con PQ .

Se quindi α, β, γ rappresentano le componenti della forza di un vortice, e se ξ, η, ζ rappresentano lo spostamento del mezzo, il valore di α diviene

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + \alpha \frac{d\xi}{dx} + \beta \frac{d\xi}{dy} + \gamma \frac{d\xi}{dz} \\ \beta' = \beta + \alpha \frac{d\eta}{dx} + \beta \frac{d\eta}{dy} + \gamma \frac{d\eta}{dz} \\ \gamma' = \gamma + \alpha \frac{d\zeta}{dx} + \beta \frac{d\zeta}{dy} + \gamma \frac{d\zeta}{dz} \end{cases} \quad (29.0.9)$$

Ammettiamo che la stessa condizione è soddisfatta durante i piccoli spostamenti di un mezzo dove α, β, γ rappresentano, non più le componenti della forza di un vortice comune, ma le componenti della forza magnetica.

² *Journal de Crelle*, vol. 55, 1858; traduzione di Tait, *Phil. Mag.*, luglio 1867.

824. Le componenti della velocità angolare di un elemento del mezzo sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) \\ \omega_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) \\ \omega_3 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \end{array} \right. \quad (29.0.10)$$

Per continuare nella nostra ipotesi, dobbiamo ammettere che l'energia cinetica del mezzo contiene un termine della forma

$$2C (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3) \quad (29.0.11)$$

Ciò è equivalente a supporre che la velocità angolare acquisita da un elemento del mezzo, durante la propagazione della luce, è in grado di combinarsi con il movimento con il quale si spiegano i fenomeni magnetici.

Per formare le equazioni del moto del mezzo, dobbiamo esprimere la sua energia cinetica in funzione della velocità delle sue parti, velocità le cui componenti sono $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$. Integrando per parti, troviamo

$$\begin{aligned} & 2C \iiint (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3) dx dy dz = \\ & = C \iint (\gamma\dot{\eta} - \beta\dot{\zeta}) dy dz + C \iint (\alpha\dot{\zeta} - \gamma\dot{\xi}) dz dx + C \iint (\beta\dot{\xi} - \alpha\dot{\eta}) dx dy + \\ & + C \iiint \left[\dot{\xi} \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + \dot{\eta} \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \right) + \dot{\zeta} \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (29.0.12)$$

Gli integrali doppi si riferiscono alla superficie limite che si può supporre all'infinito. Possiamo quindi, quando studiamo ciò che avviene all'interno del mezzo, porre la nostra attenzione solo sull'integrale triplo.

825. Per un'unità di volume, la parte dell'energia cinetica, che rappresenta questo integrale triplo, si può scrivere

$$4\pi C (\dot{\xi}u + \dot{\eta}v + \dot{\zeta}w) \quad (29.0.13)$$

essendo u, v, w le componenti della corrente elettrica date dalle equazioni (E) del § 607.

Risulta da ciò che la nostra ipotesi porta a supporre che la velocità di una molecola del mezzo, le cui componenti sono $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ è una quantità che si può comporre con la corrente elettrica le cui componenti sono u, v, w .

826. Ritorniamo alla quantità sotto il segno dell'integrale triplo: sostituiamo ai valori α, β, γ i valori α', β', γ' , ricavati dalle (29-9) e poniamo

$$\frac{d}{dh} \text{ per } \alpha \frac{d}{dx} + \beta \frac{d}{dy} + \gamma \frac{d}{dz} \quad (29.0.14)$$

L'espressione sotto il segno dell'integrale triplo diviene

$$C \left[\dot{\xi} \frac{d}{dh} \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) + \dot{\eta} \frac{d}{dh} \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) + \dot{\zeta} \frac{d}{dh} \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \right] \quad (29.0.15)$$

Nel caso di onde piano normali all'asse z , gli spostamenti sono funzioni di z e di t , e $\frac{d}{dh}$ si riduce a $\gamma \frac{d}{dz}$; l'espressione diviene pertanto

$$C\gamma \left(\frac{d^2\xi}{dz^2} \dot{\eta} - \frac{d^2\eta}{dz^2} \dot{\xi} \right) \quad (29.0.16)$$

L'energia cinetica riferita all'unità di volume si può quindi scrivere, almeno per quanto dipende dalle velocità di spostamento

$$T = \frac{1}{2} \rho (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + C\gamma \left(\frac{d^2\xi}{dz^2} \dot{\eta} - \frac{d^2\eta}{dz^2} \dot{\xi} \right) \quad (29.0.17)$$

dove ρ è la densità del mezzo.

827. Le componenti X e Y della forza applicata si possono ricavare dall'equazione di Lagrange data al § 564. Osserviamo che facendo successivamente due integrazioni per parti rispetto a z , e trascurando gli integrali doppi che si riferiscono alla superficie limite, si può mostrare che

$$\iiint \frac{d^2\xi}{dz^2} \dot{\eta} dx dy dz = \iiint \frac{d^3\eta}{dz^2 dt} dx dy dz$$

Pertanto

$$\frac{dT}{d\xi} = C\gamma \frac{d^3\eta}{dz^2 dt}$$

Le forze sono quindi espresse da

$$X = \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2C\gamma \frac{d^3\eta}{dz^2 dt} \quad (29.0.18)$$

$$Y = \rho \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2C\gamma \frac{d^3\xi}{dz^2 dt} \quad (29.0.19)$$

Queste forze sono dovute all'azione sull'elemento del resto del mezzo; e, se questo mezzo è isotropo, esse devono essere della forma indicata da Cauchy,

$$X = A_0 \frac{d^2\xi}{dz^2} + A_1 \frac{d^4\xi}{dz^4} + \dots \quad (29.0.20)$$

$$Y = A_0 \frac{d^2\eta}{dz^2} + A_1 \frac{d^4\eta}{dz^4} + \dots \quad (29.0.21)$$

828. Se prendiamo il caso di un raggio polarizzato circolarmente, per il quale

$$\xi = r \cos(nt - qz) \quad \eta = r \sin(nt - qz) \quad (29.0.22)$$

troviamo per l'energia cinetica in unità di volume

$$T = \frac{1}{2} \rho r^2 n^2 - C\gamma r^2 q^2 n \quad (29.0.23)$$

e per l'energia potenziale in unità di volume

$$V = r^2 (A_0 q^2 - A_1 q^4 + \dots) = r^2 Q \quad (29.0.24)$$

dove Q è una funzione di q^2 .

la condizione perché il raggio si propaghi liberamente è stata data al § 820: è

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dV}{dr} \quad (29.0.25)$$

che dà

$$pn^2 - 2C\gamma q^2 n = Q \quad (29.0.26)$$

dalla quale si ricava il valore di n in funzione di q .

Ma, nel caso di un raggio di periodo dato soggetto all'azione di una forza magnetica, ciò che dobbiamo determinare, è il valore di $\frac{dq}{d\gamma}$ per n costante, in funzione di $\frac{dq}{dn}$, quando γ è costante. Differenziando la (29-26),

$$(2\rho n - 2C\gamma q^2) dn - \left(\frac{dQ}{dq} + 4C\gamma q n \right) dq - 2Cq^2 n d\gamma = 0 \quad (29.0.27)$$

Si trova così

$$\frac{dq}{d\gamma} = -\frac{Cq^2n}{\rho n - C\gamma q^2} \frac{dq}{dn} \quad (29.0.28)$$

829. Se λ è la lunghezza d'onda nell'aria, e i l'indice di rifrazione corrispondente del mezzo

$$q\lambda = 2\pi i \quad n\lambda = 2\pi v \quad (29.0.29)$$

La variazione di q dovuta all'azione magnetica, non è, in tutti i casi, che una frazione molto piccola del valore stesso di q ; si può quindi scrivere

$$q = q_0 + \frac{dq}{d\gamma}\gamma \quad (29.0.30)$$

dove q_0 è il valore di q per una forza magnetica nulla. L'angolo θ , di cui ruota il piano di polarizzazione quando il raggio attraversa uno spessore c del mezzo, è la semisomma dei valori positivi e negativi di qc , essendo il risultato cambiato di segno, poiché il segno di q è negativo nella (29-6). Otteniamo così

$$\theta = -c\gamma \frac{dq}{d\gamma} = \frac{4\pi^2 C}{v\rho} c\gamma \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right) \frac{1}{1 - 2\pi C\gamma \frac{i^2}{v\rho\lambda}} \quad (29.0.31)$$

Il secondo termine del denominatore della frazione è circa uguale all'angolo di cui ruota il piano di polarizzazione, quando il raggio attraversa uno spessore del mezzo uguale a una semi lunghezza d'onda. In tutti i casi reali è quindi una quantità che si può trascurare rispetto all'unità.

Ponendo

$$\frac{4\pi^2 C}{v\rho} = m \quad (29.0.32)$$

si può chiamare m il coefficiente di rotazione magnetica del mezzo: è una quantità che deve essere determinata dall'osservazione. Si trova che essa è positiva per la maggior parte dei diamagnetici, e negativa per alcuni paramagnetici. Abbiamo quindi, come risultato finale della teoria,

$$\theta = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right) \quad (29.0.33)$$

dove θ è la rotazione angolare del piano di polarizzazione; m una costante determinata sperimentalmente; γ la componente della forza magnetica lungo la direzione del raggio; c la lunghezza percorsa dal raggio nel mezzo; λ la lunghezza d'onda della luce nell'aria; i l'indice di rifrazione del mezzo.

830. La sola prova che, finora, alla quale si è sottoposta questa teoria, è consistita nel confrontare i diversi valori di θ per differenti tipo di luce attraversante uno stesso mezzo e soggetti alla stessa forza magnetica.

Ciò è stato fatto per un grande numero di mezzi, da Verdet³, che ha ottenuto i seguenti risultati:

1° Per i raggi di diversi colori, la rotazione magnetica del piano di polarizzazione segue all'incirca la legge dell'inverso del quadrato delle lunghezze d'onda.

2° La legge esatta del fenomeno è tale che il prodotto della rotazione per il quadrato della lunghezza d'onda cresce costantemente dall'estremità meno rifrangibile a quella più rifrangibile dello spettro.

³ *Recherches sue les propriétés optiques développées dans les corps transparent par l'action du magnétisme*, IV parte, (*Comptes rendus*, t. LVI, p. 630; 6 aprile 1863).

3° Le sostanze per le quali questo aumento è più marcato sono quelle che hanno il potere dispersivo più elevato.

Si è pure trovato che in una soluzione di acido tartarico, che ha naturalmente il potere rotatorio, la rotazione magnetica non è del tutto proporzionale alla rotazione naturale.

In un complemento a quella stessa Memoria⁴, Verdet presenta i risultati di esperienze molto accurate fatte sul solfuro di carbonio e il creosoto, due sostane per le quali lo scarto dalla legge dell'inverso del quadrato della lunghezza d'onda era molto evidente. Ha pure confrontato questi risultati con i valori che danno tre formule diverse:

$$\theta = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right) \quad (29.0.34)$$

$$\theta = mc\gamma \frac{1}{\lambda^2} \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right) \quad (29.0.35)$$

$$\theta = mc\gamma \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right) \quad (29.0.36)$$

La prima di queste formule (I) è quella che è stata ottenuta al § 829 (29-33). La seconda (II) si ottiene sostituendo nelle equazioni del moto (§ 826) dai termini della forma $\frac{d^3\eta}{dt^3}$ e $-\frac{d^3\xi}{dt^3}$, invece di $\frac{d^3\eta}{dz^2dt}$ e $-\frac{d^3\xi}{dz^2dt}$. Non so se questa forma di equazione sia stata suggerita da alcuna teoria fisica. La terza formula risulta dalla teoria fisica di M. C. Neumann⁵, nella quale le equazioni del moto contengono termini della forma $\frac{d\eta}{dt}$ e $-\frac{d\xi}{dt}$.

È chiaro che i valori di θ , dati dalla formula (III), non sono, nemmeno approssimativamente, proporzionali all'inverso del quadrato della lunghezza d'onda. Le formule I e II soddisfano questa condizione e danno valori di θ in accordo buoni con i valori osservati, per i mezzo il cui potere dispersivo è mediocre. I valori dati dalla formula I si accordano meglio con l'esperienza; ma, sebbene l'accordo sia molto stretto per il solfuro di carbonio, i numeri relativi al creosote presentano differenze molto grandi perché le si possa attribuire ad errori sperimentali.

Rotazione magnetica del piano di polarizzazione, secondo Verdet.

⁴ *Comptes rendus*, vol. LVII, p. 670; 19 ottobre 1863.

⁵ *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur*. Halis Saxonim, 1858.

⁶ Queste tre forme di equazioni del moto sono state proposte dapprima da Sir G. B. Airy (*Phil. Mag.*, giugno 1846) come mezzo per analizzare i fenomeni che Faraday aveva scoperto. In precedenza, Mac Cullagh aveva proposto equazioni contenenti termini in $\frac{d^2}{dz^2}$, per rappresentare matematicamente i fenomeni del quarzo. Queste equazioni furono presentate da Mac Cullagh e Airy, "non come fornenti una spiegazione meccanica dei fenomeni, ma come mostranti che questi fenomeni possono essere spiegati da equazioni, le quali sembrano potersi dedurre da qualche ipotesi meccanica plausibile, sebbene non sia stata finora formulata questa ipotesi.

Solfuro di Carbonio a 24, 9° C					
Linee dello spettro	C.	D.	E.	F.	G.
Rotazione osservata	592	768	1000	1234	1704
Rotazione calcolata con I	589	760	1000	1234	1713
Rotazione calcolata con II	606	772	1000	1226	1640
Rotazione calcolata con III	943	967	1000	1034	1091
Rotazione della riga E	25°, 88'				

Creosote e 24, 3° C					
Linee dello spettro	C.	D.	E.	F.	G.
Rotazione osservata	573	758	1000	1241	1723
Rotazione calcolata con I	617	780	1000	1220	1603
Rotazione calcolata con II	628	789	1000	1200	1565
Rotazione calcolata con III	976	993	1000	1017	1041
Rotazione della riga E	25°, 88'				

Sappiamo bene poche cose sul dettaglio della struttura molecolare dei corpi; così non è molto probabile che si arrivi a formare una teoria soddisfacente di un fenomeno particolare, come quelle delle azioni magnetiche sulla luce, tanto che un'induzione, fondata su un gran numero di casi differenti in cui si sarà osservata una dipendenza tra fenomeni visibili e azioni molecolari, non ci avrà insegnato qualcosa di più definito sulle proprietà che conviene attribuire alle molecole per soddisfare le condizioni derivanti da fatti osservati.

La teoria esposta nelle pagine precedenti è evidentemente provvisoria, fondata come è su ipotesi non dimostrate relative alla natura dei vortici molecolari e al modo in cui subiscono l'influenza degli spostamenti del mezzo. Se quindi vi è concordanza con i fatti osservati, dobbiamo attribuire ad essa un valore scientifico ben minore nel caso della teoria magnetica della rotazione del piano di polarizzazione che in quello della teoria elettromagnetica della luce, che implica senza dubbio ipotesi sulle proprietà elettriche dei mezzi, ma non estende le sue speculazioni alla struttura delle molecole.

831. Tutti questo Capitolo può essere visto solo come lo sviluppo di una osservazione molto importante di Sir William Thomson, inserita nei *Proceedings of the Royal Society*, nel giugno 1856: "L'influenza dei magneti sulla luce, scoperta da Faraday, dipende dalla direzione del moto delle particelle mobili, Così, in un mezzo che possiede il potere rotatorio magnetico, le molecole inizialmente disposte su una linea retta parallela alle linee di forza magnetica, poi spostate e distribuite lungo un'elica avente questa linea per asse, lanciate infine con velocità tangenziali che fanno loro descrivere dei cerchi, avranno velocità differenti, a seconda che la loro rotazione avvenga in un verso, quello della direzioni nominale della corrente elettrica nell'elica magnetizzante, o nel verso contrario. Ma, per uno stesso spostamento, la reazione elastica del mezzo deve essere la stessa, qualunque siano la velocità e la direzione della molecola; cioè che le forze equilibrate della forza centrifuga dei movimenti circolari sono uguali, mentre i movimenti luminosi sono diversi. I moti circolari assoluti essendo uguale o tali che essi comunicano alle molecole inizialmente considerate forze centrifughe uguali, ne risulta che i movimenti luminosi sono solo componenti del moto totale, e che una componente luminosa minore, diretta in certo verso e composta con un moto che esiste nel mezzo, quand'anche non trasmetta luce, dà una risultante uguale a quella che si otterrebbe componendo con questo movimento non luminoso una componente luminosa maggiore, ma di verso contrario. Io credo che non è solo impossibile concepire alcun'altra spiegazione dinamica del fatto che la luce polarizzata circolarmente, sempre della stessa qualità, sempre destrorsa o sinistrorsa, essendo trasmessa attraverso un pezzo di vetro magnetizzato parallelamente alle linee di forza magnetica, si propaga con velocità differente, a seconda che essa va nella direzione dove è attratta da un polo magnetico nord o che va nella

direzione contraria; credo anche che si potrebbe dimostrare che non vi è altra spiegazione possibile. Da ciò risulta che la scoperta ottica di Faraday dà la dimostrazione della verità della spiegazione di Ampère sulla natura ultima del magnetismo, e non dà una definizione dello stato di magnetizzazione nella teoria dinamica del calore. Quando, trattando con la Meccanica l'ipotesi di M. Rankine sui vortici molecolari, si introduce il principio dei momenti delle quantità di moto (conservazione delle aree), sembra risaltare che l'asse magnetico di un corpo magnetizzato è una linea perpendicolare al piano della quantità di moto rotatoria risultante da tutti i moti termici (piano invariabile), e l'idea stabilisce che il momento risultante di tutte queste quantità di moto è la misura propriamente detta e definita dal momento magnetico. La spiegazione di tutti i fenomeni di attrazione o repulsione e di induzione elettromagnetica deve essere cercata unicamente nell'inerzia e nella pressione della materia i cui moti costituiscono il calore. Se questa materia è oppure no elettricità; se è un fluido continuo che penetra tra i nuclei molecolari, o se è essa stessa raggruppata in molecole; se tutta la materia è continua e se l'eterogeneità delle molecole risiede solamente nei moti relativi limitati, vorticosi o altro, parti contigue dei corpi, è impossibile decidere, ed è su quali speculazioni sarebbero vane allo stato attuale della Scienza".

Una teoria dei vortici molecolari, che ho sviluppato a lungo, è stata pubblicata nelle *Phil. Mag.*, del marzo, aprile e maggio 1861, gennaio e febbraio 1862.

Credo che abbiamo buone ragioni per pensare che si produce nel campo magnetico un fenomeno di rotazione; che questa rotazione è eseguita da un grande numero di particelle di materia molto piccole, ruotanti ognuna attorno al proprio asse, il quale è parallelo alla direzione della forza magnetica, e che le rotazioni dei diversi vortici sono rese dipendenti le une dalle altre da una sorta di meccanismo che le collega. Il tentativo che ho fatto, di immaginare e mostrare il funzionamento di tale meccanismo, non deve essere preso per più di quello che è in realtà: è una dimostrazione del fatto che si può immaginare un meccanismo capace di produrre una connessione meccanicamente equivalente a quella che collega effettivamente le parti del campo elettromagnetico. Il problema che consiste nel trovare il meccanismo necessario per stabilire tra i moti delle diverse parti di un sistema una connessione di natura determinata ammette sempre un'infinità di soluzioni. Di queste soluzioni, le une possono essere più oscure o più complicate delle altre, ma tutte devono soddisfare alle condizioni generali dei meccanismi.

Tuttavia, i risultati che seguono da questa teoria mi sembrano avere un più alto valore:

1° La forza magnetica è l'effetto delle forze centrifughe dei vortici;

2° L'induzione elettromagnetica delle correnti è l'effetto delle forze messe in gioco quando la velocità dei vortici cambia;

3° La forza elettromotrice è prodotta dallo sforzo di tensione esercitata sul meccanismo di connessione;

4° Lo spostamento elettrico si produce quando il meccanismo di connessione cede in virtù della sua elasticità.

30 Spiegazione del ferromagnetismo e del diamagnetismo per mezzo delle correnti molecolari

Sulle teorie elettromagnetiche del magnetismo

832. Abbiamo visto (§ 380) che l'azione di magneti gli uni sugli altri si può rappresentare molto esattamente con le attrazioni e repulsioni di una sostanza immaginaria detta materia magnetica. Abbiamo visto quali ragioni vietano di ammettere che questa materia si possa spostare da una parte di un magnete a un'altra parte posto a una distanza valutabile, così come sembra, di primo acchito, che essa faccia quando si magnetizza una barra; e siamo stati condotti all'ipotesi di Poisson, cioè che la materia magnetica è assolutamente confinata nelle diverse molecole della sostanza magnetica. Così, una molecola magnetizzata è una molecola nella quale i due tipi contrari di materia magnetica sono più o meno separati verso i poli opposti della molecola, ma mai nessuna particella dell'una o dell'altra specie di materia si può realmente separare dalla molecola (§ 430).

Questi argomenti costituiscono una dimostrazione completa del fenomeno della magnetizzazione, non sulle grandi masse di ferro, ma sulle molecole, cioè su porzioni di materia così piccole che nessun metodo meccanico ci dà la possibilità di dividerle in due, in modo da ottenere un polo nord separato da un polo sud. Ma la natura di una molecola magnetica non può essere conosciuta senza ricerche più approfondite. Abbiamo visto (§ 442) che vi sono forti motivi di credere che le operazioni della magnetizzazione non consistano nel dare del magnetismo alle molecole che compongono il ferro o l'acciaio; ma queste molecole sono già magnetiche, anche nel ferro non magnetizzato, soltanto, i loro assi sono posto indifferentemente in tutte le direzioni, e le operazioni di magnetizzazione consistono nel far ruotare le molecole in modo che i loro assi siano resi tutti paralleli a una stessa direzione o, almeno, che siano deviati verso questa direzione.

833. Finora, tuttavia, non siamo ancora giunti a spiegare la natura di una molecola magnetica; abbiamo riconosciuto affinità solo tra essa e qualche altra cosa che conosciamo meglio. Dobbiamo quindi esaminare l'ipotesi di Ampère, cioè che il magnetismo della molecola è dovuto a una corrente elettrica che vi circola costantemente lungo un certo circuito chiuso.

Si può riprodurre esattamente l'azione di un magnete qualunque sui punti esterni, per mezzo di uno strato di correnti elettriche opportunamente distribuite sulla superficie esterna dello strato. Ma l'azione del magnete sui punti interni è essenzialmente differente da quella delle correnti elettriche sui punti corrispondenti. Ampère concluse da ciò che, se il magnetismo deve essere spiegato per mezzo di correnti elettriche, queste possono circolare solo all'interno delle molecole senza passare da una molecola a un'altra. Siccome non abbiamo alcun mezzo sperimentale per misurare l'azione magnetica in un punto interno a una molecola, non possiamo smentire questa ipotesi così come facciamo per l'ipotesi di correnti di estensione finita circolanti all'interno del magnete.

Inoltre, sappiamo che una corrente elettrica, passante da una parte all'altra di un conduttore, incontra resistenza e produce calore. Se quindi correnti della specie comune circolano attorno a parti del magnete avente dimensioni finite, bisognerà, per mantenerle, spendere costantemente

energia, e un magnete sarebbe una sorgente perpetua di calore. Ma, se le correnti sono confinate all'interno delle molecole, non abbiamo più alcuna nozione di resistenza relativamente a questo mezzo e possiamo dire, senza cadere in contraddizione, che le correnti che circolano all'interno delle molecole non incontrano resistenza.

Così, secondo la teoria di Ampère, tutti i fenomeni di magnetismo sono dovuti a correnti elettriche; e, se potessimo osservare la forza magnetica all'interno di una molecola magnetica, dovremmo trovare che questa forza segue esattamente le stesse leggi che in una regione circondata da non importa quale altro circuito elettrico.

834. Quando abbiamo trattato della forza all'interno dei magneti, abbiamo supposto che le misure fossero fatte al fondo di una stretta fessura penetrante all'interno della massa del magnete (§ 395). Siamo stati così portati a considerare due quantità differenti, la forza e l'induzione magnetica, che si suppongono entrambe osservate in un spazio dal quale sarebbe stato tolta la materia magnetica. Ma non abbiamo supposto che fossimo capaci di penetrare all'interno di una molecola magnetica e di osservare la forza all'interno di essa.

Se adottiamo la teoria di Ampère, non considereremo più un magnete come una sostanza continua la cui magnetizzazione varia da un punto a un altro, secondo qualche legge facile da immaginare; ma lo considereremo come formato da una moltitudine di molecole, in ognuna delle quali circola un sistema di correnti elettriche che danno luogo a una distribuzione della forza magnetica estremamente complessa, essendo la direzione della forza magnetica all'interno di una molecola generalmente inversa alla direzione della forza magnetica media nelle vicinanze, ed essendo il potenziale magnetico, quando esiste, una funzione il cui grado di molteplicità è uguale al numero di molecole del magnete.

835. Troveremo tuttavia che, malgrado questa complessità apparente, che è dovuta, dopo tutto, dalla coesistenza di una moltitudine di parti più semplici, si semplifica enormemente la teoria matematica del Magnetismo adottando la teoria di Ampère, estendendo le nostre concezioni matematiche all'interno delle molecole.

In primo luogo, le due definizioni della forza magnetica si riducono a una sola, entrambe confondendosi con la definizione relativa alla specie esterna al magnete. In secondo luogo, le componenti della forza magnetica soddisfano in ogni punto la condizione alla quale sono sottoposte le componenti dell'induzione, cioè

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \quad (30.0.1)$$

In altri termini, la distribuzione della forza magnetica è dello stesso genere di quella della velocità in un fluido incomprimibile, o, come abbiamo enunciato al § 25, la forza magnetica non ha convergenza.

Infine, le tre funzioni vettoriali: quantità di moto elettromagnetica, forza magnetica, corrente elettrica, sono legate da una relazione più semplice. Tutte e tre sono funzioni vettoriali senza convergenza, che si deducono l'una dall'altra nell'ordine indicato, mediante una stessa operazione che consiste nel prendere la variazione nello spazio e che Hamilton indica con il simbolo ∇ .

836. Ma è da un punto di vista fisico che consideriamo ora il Magnetismo, e dobbiamo ricercare quali sono le proprietà fisiche di queste correnti molecolari. Ammettiamo che una corrente circola in una molecola senza incontrarvi resistenza. Se L è il coefficiente di autoinduzione di questa corrente molecolare, e M il coefficiente di induzione reciproco tra questo circuito e un altro qualunque; se γ è la corrente nella molecola e γ' la corrente nell'altro circuito, l'equazione della corrente γ è

$$\frac{d}{dt} (L\gamma + M\gamma') = -R\gamma \quad (30.0.2)$$

e poiché non vi è resistenza, $R = 0$ e dalla integrazione si ha, per esempio,

$$L\gamma + M\gamma' = cost = L\gamma_0 \quad (30.0.3)$$

Sia A l'area occupata dalla proiezione del circuito molecolare su un piano perpendicolare all'asse della molecola, essendo questo asse definito come la normale al piano sul quale la proiezione è massima. Se l'azione delle altre correnti produce una forza magnetica X , la cui direzione forma un angolo θ con l'asse della molecola, la quantità $M\gamma'$ diviene $XA \cos \theta$, e abbiamo, per equazione della corrente

$$L\gamma + XA \cos \theta = L\gamma_0 \quad (30.0.4)$$

dove γ_0 è il valore di γ quando $X = 0$.

Si vede quindi che l'intensità di corrente molecolare dipende interamente dalla sua intensità iniziale γ_0 e dall'intensità della forza magnetica dovuta alle altre correnti.

837. Se supponiamo che non vi sia corrente iniziale, ma che la corrente è interamente dovuta all'induzione, si ha

$$\gamma = -\frac{XA}{L} \cos \theta \quad (30.0.5)$$

Il segno $-$ mostra che la corrente indotta è in verso contrario alla conduttore induttrice, e la sua azione magnetica agisce all'interno del circuito in verso contrario alla forza magnetica. In altre parole, la corrente molecolare agisce come un piccolo magnete i cui poli sarebbero ruotati verso i poli dello stesso nome del magnete induttore.

Ora, è questa un'azione inversa di quella delle molecole di ferro sottoposte all'azione magnetica; pertanto, nel ferro, le correnti molecolari non sono eccitate dall'induzione. Ma in corpi diamagnetici, si osserva un'azione di questo genere, e tale è, infatti, la spiegazione della polarità diamagnetica che è stata data per la prima volta da Weber.

Teoria del diamagnetismo di Weber

838. Secondo la teoria di Weber, esistono nelle molecole dei corpi diamagnetici alcuni cammini lungo i quali una corrente elettrica può circolare senza resistenza. È chiaro che supporre che questi cammini attraversino la molecola in tutte le direzioni equivarrebbe a fare delle molecole un conduttore perfetto.

Iniziando col supporre che vi è nella molecola un circuito lineare, la forza della corrente ci è data dalla (30-5).

Il momento magnetico della corrente è uguale al prodotto dell'intensità per l'area del circuito, cioè γA , e la componente di questo momento nella direzione della forza magnetizzante è $\gamma A \cos \theta$ o, dalla (30-5)

$$-\frac{XA^2 \cos^2 \theta}{L} \quad (30.0.6)$$

Se, nell'unità di volume, vi sono n molecole, e i loro assi sono distribuiti indifferentemente in tutte le direzioni, il valore medio di $\cos^2 \theta$ sarà $\frac{1}{2}$ e l'intensità di magnetizzazione della sostanza sarà

$$-\frac{1}{3} \frac{nXA^2}{L} \quad (30.0.7)$$

Il coefficiente di magnetizzazione di Neumann è quindi

$$\kappa = -\frac{1}{3} \frac{nA^2}{L} \quad (30.0.8)$$

La magnetizzazione della sostanza è quindi in verso contrario alla forza magnetizzante o, in altre parole, la sostanza è diamagnetica. La magnetizzazione è pure esattamente proporzionale alla forza magnetizzante e non tende verso un limite finito, come nel caso dell'induzione magnetica ordinaria (§ 442, ecc.)

839. Se, invece di essere indifferentemente diretti in tutte le direzioni, gli assi dei cammini molecolari sono, in maggioranza, disposti in certe direzioni, la somma

$$\sum \frac{A^2}{L} \cos^2 \theta$$

estesa a tutte le molecole, avrà valori differenti, secondo la direzione della linea a partire dalla quale si misura θ , e la distribuzione di questi valori nelle diverse direzioni sarà simile alla distribuzione dei valori dei momenti d'inerzia attorno ad assi passanti per uno stesso punto e diretti in diverse direzioni.

Una simile distribuzione spiegherebbe questi fenomeni magnetici che si riferiscono all'esistenza di assi nei corpi, che sono stati descritti da Plücker, e che Faraday ha chiamato fenomeni magneto-cristallizzati. (si veda § 435).

840. Consideriamo ora quale sarà l'effetto prodotto se la corrente, invece di essere racchiusa in un certo cammino interno alla molecola, percorresse liberamente tutta la molecola supposta un conduttore perfetto.

Iniziamo dal caso di un corpo di forma aciclica, cioè non presentante la forma di un anello o di un corpo forato, e supponiamo che questo corpo sia ricoperto in tutti i suoi punti da un sottile strato di materia perfettamente conduttrice.

Abbiamo dimostrato, al § 654, che una superficie chiusa di forma qualunque, formata da una sostanza perfettamente conduttrice, che non è inizialmente attraversata da alcuna corrente, diviene, sotto l'azione di una forza magnetica esterna, uno strato superficiale di correnti aventi sui punti interni un'azione tale che la forza magnetica vi è ridotta a zero.

Per ben comprendere questo caso, potrà essere utile ricordarsi che nei dintorni di un simile corpo la distribuzione della forza è la stessa della distribuzione delle velocità in un fluido incomprimibile nei dintorni di un corpo impenetrabile della stessa forma.

È chiaro che, in altre superfici conduttrici poste all'interno della prima, e non essendo, di conseguenza, soggetto ad alcuna forza magnetica, nessuna corrente sarà eccitata. Quindi, in un solido formato da una materia perfettamente conduttrice, l'effetto della forza magnetica è di generare un sistema di correnti limitate esclusivamente alla superficie del corpo.

841. Se il corpo conduttore ha la forma di una sfera di raggio r , si può mostrare che il suo momento magnetico è uguale a

$$-\frac{1}{2}r^2 X$$

e se un certo numero di queste sfere è distribuito in un mezzo, di modo che, nell'unità di volume, la materia conduttrice occupi il volume k' , ponendo $K_1 = 1$, $k_2 = 0$ e $p = k'$ nell'equazione (17) del § 314, troviamo il coefficiente di permeabilità magnetica prendendolo uguale all'inverso della resistenza ottenuta in questo paragrafo, cioè

$$\mu = \frac{2 - 2k'}{2 + k'} \quad (30.0.9)$$

da cui ricaviamo, per il coefficiente magnetico di Poisson,

$$k = -\frac{1}{2}k' \quad (30.0.10)$$

e, per il coefficiente di magnetizzazione indotta di Neumann,

$$\kappa = -\frac{3}{4\pi} \frac{k'}{2 + k'} \quad (30.0.11)$$

Poiché l'idea matematica di corpi perfettamente conduttori porta a risultati molto lontani da tutti i fenomeni che si possono osservare nei comuni conduttori, spingiamo oltre il nostro studio.

842. Ritorniamo, come al § 836, al caso di un cammino conduttore a forma di curva chiusa di area A . Il momento della forza elettromagnetica che tende ad aumentare l'angolo θ è

$$\gamma\gamma'\frac{dM}{d\theta} = -\gamma X A \sin \theta \quad (30.0.12)$$

$$= \frac{X^2 A^2}{L \sin \theta \cos \theta} \quad (30.0.13)$$

Questa forza è positiva o negativa, secondo che θ è maggiore o minore di un angolo retto. Così, una forza magnetica agente lungo un cammino perfettamente conduttore tende a far ruotare il suo asse perpendicolarmente alla linea di forza magnetica, in modo che il piano del cammino diviene parallelo alle linee di forza.

Si può osservare un effetto di questo tipo quando si pone un pezzo o un anello di rame tra i poli di un elettromagnete. Nell'istante in cui il magnete è eccitato, l'anello ruota e orienta il suo piano nella direzione assiale; ma questa forza si annulla non appena le correnti sono state annullate dalla resistenza del rame¹.

843. Finora, abbiamo solo considerato i casi in cui le correnti sono eccitate unicamente dalla forza magnetica esterna. Esaminiamo ora in cosa la teoria di Weber, sull'induzione magnetoelettrica di correnti molecolari, riguarda la teoria di Ampère sul magnetismo. Secondo la teoria di Ampère e di Weber, nelle sostanze magnetiche, le correnti molecolari non sono eccitate dalla forza magnetica esterna, ma preesistono; è la molecola stessa che subisce l'azione e che è deviata dalla sua posizione dall'azione elettromagnetica che la forza magnetica esercita sul circuito conduttore attraversato dalla corrente. Quando Ampère avanzò questa ipotesi, l'induzione delle correnti elettriche non era nota, e non fece ipotesi per rendere conto dell'esistenza o per determinare la forza di queste correnti molecolari.

Ma, ora, siamo obbligati ad estendere a queste correnti le stesse leggi che Weber ha applicato alle correnti delle molecole diamagnetiche. Dobbiamo soltanto supporre che il valore iniziale della corrente γ , quando non agisce alcuna forza magnetica, non è zero, ma γ_0 . Quando una forza magnetica X agisce su una corrente molecolare di area A , il cui asse forma l'angolo θ con la linea di forza magnetica, la forza della corrente è

$$\gamma - \gamma_0 - \frac{X A}{L} \cos \theta \quad (30.0.14)$$

e il momento della coppia che tende a far ruotare la molecola in modo da aumentare l'angolo θ è

$$-\gamma_0 X A \sin \theta + \frac{X^2 A^2}{2L} \sin 2\theta \quad (30.0.15)$$

da cui, ponendo

$$A\gamma_0 = m \quad \frac{A}{L\gamma_0} = B \quad (30.0.16)$$

nello studio fatto al § 443, l'equazione di equilibrio diviene

$$X \sin \theta - B X^2 \sin \theta \cos \theta = D \sin (\alpha - \theta) \quad (30.0.17)$$

La componente del magnetismo magnetico della corrente, nella direzione di X , è

$$\gamma A \cos \theta = \gamma_0 A \cos \theta - \frac{X A^2}{L} \cos^2 \theta \quad (30.0.18)$$

$$\gamma A \cos \theta = m \cos \theta (1 - B X \cos \theta) \quad (30.0.19)$$

¹Si veda Faraday, *Exp. Res.*, 2310, ecc.

844. Queste condizioni differiscono da quelle che compaiono nella teoria dell'induzione magnetica di Weber, per i termini contenenti il coefficiente B . Se BX è piccolo rispetto all'unità, i risultati saranno vicini a quelli che dà la teoria del magnetismo di Weber. Se BX è grande rispetto all'unità, essi si avvicinano ai risultati che dà la sua teoria del diamagnetismo.

Ora, più grande è il valore iniziale di γ_0 della corrente molecolare, più piccolo diviene B e se anche L è grande, B è ancora diminuito. Se la corrente circola in un percorso a forma di anello, il valore di L dipende da $\log \frac{R}{r}$, dove R è il raggio della linea media del percorso, e r è il raggio della sezione. Pertanto, più la sezione del cammino sarà piccola rispetto alla sua area, e più grande sarà il coefficiente di auto-induzione L , e più i risultati si avvicineranno a quelli dati dalla teoria iniziale di Weber. Tuttavia, sussisterà questa differenza che, quando la forza magnetica X cresce, il momento magnetico temporaneo non solo raggiunge un massimo, ma decresce poi quando X continua ad aumentare.

Se mai si dimostrerà con l'esperienza che, quando la forza magnetizzante cresce continuamente, la magnetizzazione temporanea di una sostanza qualunque inizia a crescere, e diminuisce poi, ciò sarà, a mio parere, dare quasi il valore di una dimostrazione alle ragioni che abbiamo per credere all'esistenza di queste correnti molecolari.

845. Se, nelle sostanze diamagnetiche, le correnti molecolari sono contenute in cammini determinati, e se le molecole possono essere deviate come quelle delle sostanze magnetiche, la polarità diamagnetica dovrà sempre aumentare contemporaneamente alla forza magnetizzante, ma non del tutto così velocemente una volta che la forza è divenuta grande. Tuttavia, il piccolo valore assoluto del coefficiente diamagnetico mostra che la forza di deviazione che agisce su ogni molecola, è piccola rispetto alla forza che agisce su ogni molecola di una sostanza magnetica, di modo che non sarà forse più possibile constatare gli effetti dovuti a questa deviazione.

D'altra parte, se, nei corpi diamagnetici, le correnti molecolari possono percorrere liberamente l'intera massa delle molecole, la polarità diamagnetica dovrà essere rigorosamente proporzionale alla forza magnetizzante, e la sua grandezza permetterà di determinare lo spazio totale occupato dalle materie perfettamente conduttrici, e, se conosciamo il numero delle molecole, a determinare la grandezza di ognuna di esse.

31 Teoria delle azioni a distanza

Spiegazione della formula di Ampère, di Gauss e Weber

846. L'attrazione tra gli elementi ds e ds' , attraversati dalle correnti di intensità i e i' , è, dalla formula di Ampère

$$\frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(2 \cos \epsilon + 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \quad (31.0.1)$$

o

$$- \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(2r \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \quad (31.0.2)$$

essendo le correnti valutate in unità elettromagnetiche (si veda § 526).

Le grandezze che appaiono in questa espressione e di cui dobbiamo spiegare il significato sono

$$\cos \epsilon \quad \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \quad \frac{d^2 r}{ds ds'}$$

e il fenomeno che si offre più naturalmente per cercarvi un'interpretazione fondata su una relazione diretta tra le correnti e la velocità relativa dell'elettricità nei due elementi.

847. Consideriamo quindi il movimento di due punti materiali dotati di velocità costanti v e v' lungo elementi ds e ds' . Il quadrato della velocità relativa di questi punti materiali è

$$u^2 = v^2 - 2vv' \cos \epsilon + v'^2 \quad (31.0.3)$$

e se indichiamo con r la distanza tra le particelle

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v \frac{dr}{ds} + v' \frac{dr}{ds'} \quad (31.0.4)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 = v^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + 2vv' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} + v'^2 \left(\frac{dr}{ds'} \right)^2 \quad (31.0.5)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 r}{ds^2} + 2vv' \frac{d^2 r}{ds ds'} + v'^2 \frac{d^2 r}{ds'^2} \quad (31.0.6)$$

dove il simbolo ∂ indica che, nelle grandezze differenziate, le coordinate dei punti devono essere espresse in funzione del tempo.

Si vede che i termini che presentano il prodotto vv' nelle equazioni (31-3,5,6) contengono le grandezze che si presentano nelle (31-1,2) e che vogliamo interpretare. Esprimiamo le (31-1) 2 (31-2) in funzione di u^2 , $\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2$ e $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$. Ma per questo bisogna dapprima eliminare i primi e terzi termini di queste espressioni contenenti grandezze che non compaiono nella formula di Ampère. Di conseguenza, non possiamo spiegare la corrente elettrica con un trasporto di elettricità in una sola direzione; ma, in ogni corrente, dobbiamo combinare due flussi opposti, in modo che l'effetto combinato dei termini contenenti v^2 e v'^2 possa essere nullo.

848. Supponiamo quindi che nell'elemento ds abbiamo una molecola di elettricità e che si muove con velocità v , e un'altra e' che si muove con velocità v_1 e, analogamente, nell'elemento ds' , due molecole e' e e'_1 che si muovono con le velocità v' e v'_1 .

Il termine che contiene v^2 , per l'azione combinata di queste molecole è

$$\sum (v^2 ee') = (v^2 e + v_1^2 e_1) (e' + e'_1) \quad (31.0.7)$$

Analogamente

$$\sum (v'^2 ee') = (v'^2 e' + v_1'^2 e'_1) (e + e_1) \quad (31.0.8)$$

e

$$\sum (vv' ee') = (ve + v_1 e_1) (v' e' + v_1' e'_1) \quad (31.0.9)$$

Affinché $\sum (v^2 ee')$ possa essere zero, dobbiamo avere

$$e' + e'_1 = 0 \quad \text{oppure} \quad v^2 e + v_1^2 e_1 = 0 \quad (31.0.10)$$

Dall'ipotesi di Fechner, la corrente elettrica consiste in una corrente di elettricità positiva nel verso positivo, e una corrente di elettricità negativa nel verso negativo, essendo entrambe esattamente uguale in valore numerico, come quantità di elettricità in movimento e come velocità di questo movimento. Così, le due condizioni (31-10) sono soddisfatte dall'ipotesi di Fechner.

Ma, per lo scopo propostoci, basta ammettere:

Che, in ogni elemento, la quantità di elettricità positiva è uguale alla quantità negativa;

Oppure che le quantità delle due elettricità sono in ragione inversa dei quadrati delle loro velocità.

Ora sappiamo che caricando il secondo conduttore nel suo insieme, si può fare $e' + e'_1$ positivo o negativo. Secondo questa formula, un filo così caricato, anche non attraversato da una corrente, agirà sul primo filo attraversato da una corrente nel quale $v^2 e + v_1^2 e_1$ avrà un valore diverso da zero. Non si è mai osservata una simile azione.

Pertanto, poiché si può mostrare, dall'esperienza, che la quantità $e' + e'_1$ non è sempre nulla e che al contrario la quantità $v^2 e + v_1^2 e_1$ non è accessibile sperimentalmente, vale di più, in queste congetture, supporre che è quest'ultima quantità che annulla sempre.

849. Per qualunque ipotesi si adotti, non si può dubitare che la quantità totale di elettricità trasportata lungo l'elemento ds non sia rappresentata da

$$ve + v_1 e_1 = cids$$

dove c è il numero di unità di elettricità statica trasportate nell'unità di tempo dalla corrente elettrica unitaria; possiamo quindi scrivere la (31-9)

$$\sum (vv' ee') = c^2 ii' ds ds' \quad (31.0.11)$$

Pertanto la somma dei quattro valori delle (31-3,5,6) diviene

$$\sum (ee' u^2) = -2c^2 ii' ds ds' \cos \epsilon \quad (31.0.12)$$

$$\sum \left[ee' \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] = 2c^2 ii' ds ds' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \quad (31.0.13)$$

$$\sum \left[ee' r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right] = 2c^2 ii' ds ds' r \frac{d^2 r}{ds ds'} \quad (31.0.14)$$

e possiamo scrivere le due espressioni (31-1) e (31-2) per l'attrazione tra ds e ds'

$$-\frac{1}{c^2} \sum \left[\frac{ee'}{r^2} \left(u^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right] \quad (31.0.15)$$

e

$$-\frac{1}{c^2} \sum \left[\frac{ee'}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right] \quad (31.0.16)$$

850. Nell'elettricità statica, l'espressione ordinaria della repulsione tra due particelle elettriche e ed e' , è $\frac{ee'}{r^2}$ e l'espressione

$$\sum \frac{ee'}{r^2} = \frac{(e + e_1)(e' + e'_1)}{r^2} \quad (31.0.17)$$

dà il valore della repulsione elettrostatica che si eserciterebbe tra questi due elementi se ricevessero cariche d'insieme.

Se quindi adottiamo per la repulsione di due molecole l'una o l'altra di forme modificate

$$\frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[u^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} \quad (31.0.18)$$

o

$$\frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} \quad (31.0.19)$$

possiamo dedurre le forze elettrostatiche ordinarie e le forze che agiscono tra le correnti, come le ha determinate Ampère.

851. La prima di queste espressioni (31-18) è stata scoperta da Gauss¹, nel giugno 1835; rappresentava una legge fondamentale delle azioni elettriche, cioè che due elementi di elettricità, in uno stato di moto relativo, si attraggono o si respingono tra loro come se fossero in uno stato di quiete relativa. Questa scoperta non fu, per quanto so, pubblicata in vita da Gauss; di modo che la seconda espressione, che fu scoperta indipendentemente da Weber e pubblicata nella prima Parte delle sue celebri *Electrodynamische Maasbestimmungen*², fu il primo risultato di questo genere portato alla conoscenza del mondo degli scienziati.

852. Queste due espressioni, applicate alla determinazione della forza meccanica che agisce tra due correnti elettriche, portavano esattamente allo stesso risultato, che è identico a quello di Ampère. Ma, se le si considera come esprimenti la legge fisica dell'azione esercitata tra due particelle elettriche, si è portati a ricercare se esse sono in accordo con gli altri fatti noti.

Queste due espressioni contengono la velocità relativa delle particelle. Ora, quando si stabilisce col ragionamento matematico il principio ben noto della conservazione dell'energia, si ammette generalmente che la forza che agisce tra le due particelle è funzione della sola distanza, e si aggiunge abitualmente che, se questa forza è funzione di qualche altra grandezza, del tempo, per esempio, o della velocità delle particelle, la dimostrazione non si applica più.

Così si è spesso ammesso che una legge delle azioni elettriche dove interviene la velocità delle particelle è incompatibile con il principio di conservazione dell'energia.

853. La formula di Gauss è incompatibile con questo principio e deve, di conseguenza, essere abbandonata; poiché essa porta alla conclusione che l'energia potrebbe essere indefinitamente generata con metodi fisici in un sistema limitato. Questa obiezione non si applica alla formula di Weber; poiché egli ha mostrato³ che, se si ammette che l'energia potenziale di un sistema formato da due particelle elettriche è rappresentato da

$$\psi = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (31.0.20)$$

¹ *Werke*, edizione di Gottinga; 1867, vol. V. p. 686.

² *Abh. Leibnizens, Ges.* Lipsia; 1846,

³ *Journal de Crelle*, t. 72; 1870.

la repulsione che si esercita tra queste particelle si ottiene differenziando questa quantità rispetto a r e cambiando il segno, ciò che dà esattamente la stessa espressione della (31-19).

Quindi, quando una particella si sposta, il lavoro effettuato dalla repulsione di una particella fissa è $\psi_0 - \psi_1$, dove ψ_0 e ψ_1 sono i valori di ψ all'inizio e alla fine del percorso. Ora ψ dipende solo dalla distanza r e dalla componente della velocità lungo la direzione di r . Se quindi una particella descrive un circuito chiuso, in modo che la sua posizione, la sua velocità e la direzione del suo moto siano le stesse alla fine come all'inizio, ψ_1 sarà uguale a ψ_0 e, complessivamente, nessun lavoro sarà effettuato durante il ciclo delle operazioni.

Pertanto una quantità infinita di lavoro non può essere generata da una particella dotata di un moto periodico sotto l'azione della forza che aveva ammesso Weber.

854. Ma Helmholtz, nella sua Memoria, di così grande portata, *Equations of Motion of Electricity in Conductors at Rest*⁴, mostra che, se la formula di Weber non è incompatibile con il principio della conservazione dell'energia per quanto concerne il solo lavoro effettuato durante un periodo ciclico completo, questa formula porta a concludere che due particelle elettriche che si muovono secondo la legge di Weber e aventi all'origine una velocità finita possono poi, essendo ancora a una distanza finita l'una dall'altra, acquistare un'energia cinetica infinita e compiere una quantità di lavoro infinito.

A ciò, Weber⁵ risponde che, nell'esempio di Helmholtz, la velocità iniziale relativa delle particelle è finita, senza dubbio, ma più grande della velocità della luce, e che la distanza alla quale l'energia cinetica diviene infinita è in effetti finita, ma più piccola di ogni quantità misurabile, di modo che può essere fisicamente impossibile avvicinare così due particelle. Di conseguenza, nessun metodo sperimentale ci permette di verificare ciò che avviene nel caso citato come esempio.

Così Helmholtz⁶ indicò, come ausilio alle verifiche sperimentali, un caso in cui le distanze non sono troppo piccole né le velocità troppo grandi. Una superficie sferica non conduttrice fissa, di raggio a , riceve una carica uniforme di elettricità, di densità superficiale σ . Una particella di massa m , portante la carica elettrica e , si muove all'interno della sfera con velocità v . Il potenziale elettrodinamico, calcolato dalla (31-20), è

$$4\pi a\sigma e \left(1 - \frac{v^2}{6c^2}\right) \quad (31.0.21)$$

ed è indipendente dalla posizione della sfera. Aggiungendo V , il resto dell'energia potenziale dovuta all'azione delle altre forze, e $\frac{1}{2}mv^2$, l'energia cinetica della particella, abbiamo per equazione dell'energia

$$\frac{1}{2} \left(m - \frac{4\pi a\sigma e}{c^2}\right) v^2 + 4\pi a\sigma e V = cost \quad (31.0.22)$$

Si può aumentare indefinitamente il secondo termine del coefficiente di v^2 aumentando il raggio a della sfera, mantenendo costante la densità superficiale σ ; il coefficiente di v^2 può quindi essere reso negativo. Così, un'accelerazione del moto della particella corrisponderebbe a una riduzione di forza viva, e un corpo che si muove in un circuito chiuso e soggetto a una forza tale che l'attrito, sempre diretto in verso contrario al moto, avrebbe una velocità costantemente crescente, e ciò senza limitazioni. Questo risultato impossibile diviene una conseguenza necessaria, se si ammette per il potenziale una formula qualunque introducendo termini negativi nel coefficiente di v^2 .

855. Ma consideriamo ora l'applicazione della teoria di Weber a fenomeni realizzabili. Abbiamo visto come essa dà la formula di Ampère per esprimere l'azione che si esercita tra due elementi

⁴ *Crelle's Journal*, 72 (1870).

⁵ *Elektr. Maasb. insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie*.

⁶ *Berlin Monatsbericht*, aprile 1872; *Phil. Mag.*, dicembre 1872, *Supp.*

di corrente elettrica. Il potenziale di uno di questi elementi sull'altro si ottiene prendendo la somma dei valori del potenziale ψ per le quattro combinazioni delle correnti positive e negative dei due elementi. Dalla (31-20), il risultato è, prendendo la somma dei quattro valori di $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$,

$$- ii' ds ds' \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \quad (31.0.23)$$

e il potenziale di una corrente chiusa su un'altra è

$$- ii' \iint \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ds ds' = ii' M \quad (31.0.24)$$

dove

$$M = \iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds'$$

come ai §§ 423 e 524.

Nel caso di correnti chiuse, questa espressione si confonde con quella già ottenuta⁷ al § 524.

Teoria di Weber sull'induzione delle correnti elettriche

856. Dopo aver dedotto dalla formula di Ampère, relativa alle azioni tra elementi di corrente, la propria formula per le azioni tra particelle mobili di elettricità, Weber si occupò di spiegare per mezzo di questa formula la produzione delle correnti elettriche nell'induzione magneto-elettrica. Fu dei più felici in questa parte della sua opera, e indichiamo il metodo con il quale le leggi delle correnti indotte possono dedursi dalla formula di Weber. Ma dobbiamo osservare che questo fatto di una legge dedotta da fenomeni scoperti da Ampère, che permette di rendere conto di fenomeni scoperti più tardi da Faraday, non fornisce, in favore della verità fisica di questa legge, una nuova testimonianza avente tanto peso quanto si potrebbe supporre di primo acchito.

Infatti, Helmholtz e Thomson hanno mostrato (§ 543) che, se i fenomeni di Ampère sono veri, e se si ammette la legge della conservazione dell'energia, i fenomeni di induzione scoperti da Faraday divengono conseguenze necessarie. Ora la legge di Weber, con le diverse ipotesi che comprende sulla natura delle correnti elettriche, porta, con una serie di trasformazioni matematiche, alla legge di Ampère. Inoltre, la legge di Weber è compatibile con il principio della conservazione dell'energia, in questo senso, almeno, che vi è un potenziale; ed è tutto ciò che è necessario perché si possa seguire Helmholtz e Thomson nell'applicazione del principio. Pertanto, si può affermare, prima di fare calcoli sulla questione, che la legge di Weber deve rendere conto delle correnti di induzione. E il fatto che facendo il calcolo si trova che questa legge spiega le correnti di induzione lascia esattamente al punto in cui era la prova della verità fisica della legge.

D'altra parte, la formula di Gauss spiega bene i fenomeni di attrazione delle correnti, ma è in contraddizione con il principio della conservazione dell'energia: non possiamo quindi affermare che essa deve spiegare tutti i fenomeni di induzione. Di fatti, essa non vi riesce, così come vedremo al § 859.

857. Dobbiamo quindi considerare la forza elettromotrice dovuta alla corrente che attraversa ds , che tende a produrre una corrente nell'elemento ds' , quando ds è in movimento oppure è attraversato da una corrente variabile.

Secondo Weber, l'azione esercitata sulla materia, che forma il conduttore di cui fa parte ds' , è la somma di tutte le azioni esercitate sull'elettricità che attraversa questo conduttore. D'altra parte, la forza elettromotrice che agisce sull'elettricità di ds' è la differenza delle forze elettriche

⁷In tutti i corsi di questo studio, Weber impiega sempre il sistema elettromagnetico. L'unità elettromagnetica di corrente sta all'unità elettrodinamica nel rapporto di $\sqrt{2}$ a 1 (§ 520).

che agiscono sull'elettricità positiva e negativa contenute in questo elemento. Poiché tutte queste forze agiscono lungo la linea che unisce gli elementi, la forza elettromotrice che agisce su ds' è pure diretta lungo questa linea, e, per ottenere la forza elettromotrice lungo ds' , bisogna prendere la componente della forza in questa direzione.

Per applicare la formula di Weber, ci basta calcolare i differenti termini che vi si incontrano, supponendo che l'elemento ds è in movimento rispetto a ds' e che, nei due elementi, le correnti variano con il tempo. Le espressioni così trovate contengono termini in v^2, vv', v'^2, v e v' , così come termini indipendenti da v o da v' , tutti moltiplicati per ee' . Esaminando, come in precedenza, i quattro valori di ogni termine, e considerando, in primo luogo, la forza meccanica che si ottiene dalla somma dei quattro valori, troviamo che il solo termine di cui si deve tener conto è quello che comprende il prodotto $vv'ee'$.

Se ora consideriamo la forza che tende a produrre una corrente nel secondo elemento e che si ottiene per la differenza delle azioni del primo elemento sull'elettricità positiva e su quella negativa del secondo, troviamo che il solo termine da esaminare è quello contenente vee' . I quattro termini compresi in $\sum vee'$ si possono scrivere

$$e'(ve + v_1e_1) \quad e'_1(ve + v_1e_1)$$

Poiché $e' + e'_1 = 0$, la forza meccanica dovuta a questi termini è nulla, ma la forza elettromotrice che agisce sull'elettricità positiva e' è $ve + v_1e_1$ e quella che agisce sull'elettricità negativa e'_1 è uguale e opposta a questa.

858. Supponiamo ora che il primo elemento ds si muova, rispetto a ds' , con una velocità V diretta in una certa direzione e indichiamo con \widehat{Vds} e \widehat{Vds}' gli angoli della direzione di V con le direzioni di ds e ds' . Allora il quadrato della velocità relativa u delle due particelle elettriche è

$$\dot{u}^2 = v^2 + v'^2 + V^2 - 2vv' \cos \epsilon + 2Vv \cos \widehat{Vds} - 2Vv' \cos \widehat{Vds}' \quad (31.0.25)$$

Il termine in vv' è lo stesso della (31-3). Quello in v , dal quale dipende la forza elettromotrice, è

$$2Vv \cos \widehat{Vds}$$

Abbiamo così, in questo caso, per la variazione di r rispetto al tempo

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v \frac{dr}{ds} + v' \frac{dr}{ds'} + \frac{dr}{dt} \quad (31.0.26)$$

dove $\frac{\partial r}{\partial t}$ si riferisce al movimento delle particelle elettriche, e $\frac{dr}{dt}$ al moto del conduttore materiale. Se si calcola il quadrato di questa quantità, il termine in vv' , dal quale dipende la forza meccanica, è lo stesso della (31-5); e quello che comprende v , la cui dipende la forza elettromotrice, è

$$2v \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt}$$

Differenziando la (31-26) rispetto a t , troviamo

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 r}{dt^2} + 2vv' \frac{d^2 r}{ds ds'} + v'^2 \frac{d^2 r}{ds'^2} + \frac{dv}{dt} \frac{dr}{ds} + \frac{dv'}{dt} \frac{dr}{ds'} + v \frac{dv}{ds} \frac{dr}{ds} + v' \frac{dv'}{ds'} \frac{dr}{ds'} + \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (31.0.27)$$

Troviamo che lo stesso termine in vv' della (31-6). Il termine il cui segno cambia con quello di v è $\frac{dv}{dt} \frac{dr}{ds}$.

859. Se ora calcoliamo, con la formula di Gauss (31-18), la forza elettrica risultante nella direzione del secondo elemento ds' , dovuta all'azione del primo elemento ds , otteniamo

$$\frac{1}{r^2} ds ds' iV (\cos \widehat{Vds} - 3 \cos \widehat{Vr} \cos \widehat{rds}') \cos \widehat{rds}' \quad (31.0.28)$$

Siccome questa espressione non contiene termini dove figura la variazione di corrente i , e che sappiamo d'altronde che la variazione della corrente primaria produce un'azione induttrice nel circuito secondario, non possiamo accettare la formula di Gauss come rappresentante reale dell'azione che si esercita tra le particelle elettriche.

860. Ma, se impieghiamo la formula di Weber (31-19), abbiamo

$$\frac{1}{r^2} ds ds' \left(r \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt} - i \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt} \right) \frac{dr}{ds'} \quad (31.0.29)$$

o

$$\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \frac{d}{dt} \left(\frac{i}{r} \right) ds ds' \quad (31.0.30)$$

Integrando questa espressione rispetto a s e a s' , si ottiene, per la forza elettromotrice nel secondo circuito,

$$\frac{d}{dt} i \iint \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ds ds' \quad (31.0.31)$$

Ora, se il primo circuito è chiuso,

$$\int \frac{d^2 r}{ds ds'} = 0$$

Pertanto

$$\int \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ds = \int \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} + \frac{d^2 r}{ds ds'} \right) ds = - \int \frac{\cos \epsilon}{r} ds \quad (31.0.32)$$

Ma, per i § 423, 524

$$\iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds' = M \quad (31.0.33)$$

Possiamo scrivere quindi la forza elettromotrice sul secondo circuito

$$- \frac{d}{dt} (iM) \quad (31.0.34)$$

che è in accordo con quella già stabilita sperimentalmente; § 539.

Sulla formula di Weber, considerata come risultante da un'azione trasmessa da una particella di elettricità a un'altra, con una velocità costante.

861. In una lettera molto interessante a W. Weber⁸, Gauss torna sui concetti elettrodinamici che l'avevano a lungo occupato, e che avrebbe pubblicato se fosse riuscito a stabilire ciò che considerava come la vera chiave di volta dell'Elettrodinamica, cioè un modo per dedurre la forza che agisce tra le particelle elettriche in movimento dalla considerazione di una azione tra queste particelle, non più istantanea, ma propagantesi nel tempo, in un modo analogo a quanto avviene per la luce. Non era riuscito a stabilire questa deduzione quando abbandonò le sue ricerche elettrodinamiche, e aveva la convinzione intima che prima di tutto era necessario formarsi una rappresentazione completa del modo in cui avviene questa propagazione.

Tre matematici eminenti hanno iniziato a fornire questa chiave di volta all'Elettrodinamica.

862. In una Memoria presentata alla Società reale di Gottinga, nel 1858, ritirata più tardi e pubblicata negli *Annales de Poggendorf* solo nel 1867, dopo la morte dell'autore, Bernhard

⁸19 marzo 1845, *Werke*, vol. V. p. 629.

Riemann dedusse i fenomeni dell'induzione delle correnti elettriche da una forma modificata dell'equazione di Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2V}{dt^2}$$

dove V è il potenziale elettrostatico e α una velocità.

Questa equazione è della stessa forma di quelle che esprimono la propagazione delle onde o di altre vibrazioni nei mezzi elastici; ma l'autore sembra evitare di fare esplicitamente menzione di un mezzo nel quale avverrebbe la propagazione.

Lo studio matematico di Riemann è stato esaminato da Clausius⁹, che non ammette che i procedimenti matematici siano perfettamente giusti e che ha mostrato che l'ipotesi di un potenziale propagantesi come la luce non porta né alla formula di Weber, né alle leggi note dell'Elettrodinamica.

863. Clausius ha pure esaminato uno studio molto più approfondito di C. Neumann sui *Principi dell'Elettrodinamica*¹⁰. Ma Neumann ha mostrato¹¹ che la sua teoria della trasmissione del potenziale da una particella elettrica a un'altra è del tutto diversa da quella proposta da Gauss, adottata da Riemann e criticata da Clausius, e nella quale la propagazione è simile a quella della luce. Vi è, al contrario, la più grande differenza possibile tra la trasmissione del potenziale, secondo Neumann, e la propagazione della luce.

Un corpo luminoso invia, in tutte le direzioni, luce la cui intensità dipende solo dai corpi luminosi, e non dalla presenza del corpo che è da esso illuminato.

Al contrario, una particella elettrica emette un potenziale il cui valore $\frac{ee'}{r}$ dipende, non solo dalla particella e che lo invia, ma anche dalla particella e' che lo riceve e dalla distanza r che separa le particelle nell'*istante di emissione*.

Nel caso della luce, l'intensità diminuisce allontanandosi dal corpo luminoso; il potenziale emesso giunge fino al corpo sul quale agisce, senza che il suo valore iniziale subisca la minima alterazione.

La luce ricevuta dal corpo illuminato è, in generale, solo una frazione della luce che cade su questo corpo; il potenziale ricevuto dal corpo attratto è identico o uguale al potenziale che arriva su questo corpo.

Infine, la velocità di trasmissione del potenziale non è, come quella della luce, costante rispetto all'etere o allo spazio; ma è piuttosto, come quella di un proiettile, costante rispetto alla velocità che possiede la particella che l'emette nel momento dell'emissione.

Si vede quindi che, per comprendere la teoria di Neumann, ci dobbiamo rappresentare il modo di trasmissione del potenziale in un modo assai diverso da quanto consideriamo abitualmente nella propagazione della luce. Potrà mai accettare questa concezione come la "construirbare Vorstellung", la rappresentazione fattibile, del modo di trasmissione che sembra necessario a Gauss? Non saprei dire; ma, da parte mia, non sono mai stato capace di combinare nella mia mente e di rappresentarmi un'immagine avente qualche coerenza con la teoria di Neumann.

864. Il professor Betti¹², di Pisa, ha trattato la questione in un modo diverso. Suppose che i circuiti chiusi, nei quali circola la corrente elettrica, siano formati da elementi che sono polarizzati periodicamente, cioè a uguali intervalli di tempo. Questi elementi polarizzati agiscono gli uni sugli altri come piccoli magneti i cui assi sono nella direzione della tangente al circuito. Il periodo di questa polarizzazione è lo stesso per tutti i circuiti elettrici. Betti suppose che l'azione di un elemento polarizzato su un altro posto a una certa distanza avviene, non in modo

⁹*Pogg.* vol. CXXXV, p. 612.

¹⁰Tubinga, 1868

¹¹*Mathematische Annalen*, I, p. 317.

¹²*Nuovo Cimento*, XXVII; 1868.

istantaneo, ma dopo un tempo proporzionale alla distanza tra gli elementi. In questo modo, ottiene, per l'azione di un circuito elettrico su un altro, espressioni in accordo con quelle che si sa essere vere. Ma, in questo caso ancora, Clausius ha mosso contro certe parti dello sviluppo matematico delle critiche nei cui dettagli non entriamo qui.

865. Sembra che vi sia, nella mente di questi uomini eminenti, qualche prevenzione o qualche obiezione, a priori, contro l'esistenza del mezzo dove si produrrebbero i fenomeni di radiazione luminosa e calorica e le azioni elettriche a distanza. È vero che, in un certo periodo, quelli che si dedicavano a speculazioni sulle cause dei fenomeni fisici avevano l'abitudine di spiegare ogni specie d'azione a distanza per mezzo di un fluido etereo speciale, il quale aveva il compito di produrre la funzione e le proprietà necessarie. Essi riempivano l'intero spazio di tre o quattro tipi di etere sovrapposti, le cui proprietà erano immaginate solo per salvare le apparenze; così i ricercatori più ragionevoli preferivano accettare, non solo la legge particolare di Newton sull'attrazione a distanza, ma anche il dogma professato da Cotes¹³, che l'azione a distanza è una delle proprietà prime della materia e che nessun'altra spiegazione richiedeva questo fatto. Così la teoria ondulatoria della luce ha incontrato una vivace opposizione, motivata non tanto dalla sua incapacità a spiegare i fenomeni, quanto per l'ipotesi stessa di un mezzo in cui la luce si propagherebbe.

866. Abbiamo visto che nella mente di Gauss le espressioni matematiche dell'azione elettrodinamica portavano alla convinzione che la reale chiave di volta dell'elettrodinamica si trovasse solo in una teoria della propagazione dell'azione elettrica in cui interveniva il tempo. Ora, possiamo immaginare una propagazione dipendente dal tempo solo in due modi: trasporto di una sostanza materiale attraverso lo spazio, o propagazione di uno stato di moto o di tensione in mezzo già esistente nello spazio. Nella teoria di Neumann, si suppone che questa quantità matematica, il potenziale, che non sapremmo concepire come una sostanza materiale, è proiettata da una particella a un'altra, in modo da essere del tutto indipendente dal mezzo, e che, così come lo segnala lo stesso Neumann, differisce estremamente dal modo di propagazione della luce. Nelle teorie di Riemann e di Betti, si suppone che l'azione si propaga in un modo un poco più simile a ciò che avviene per la luce.

Ma in tutte queste teorie si presenta naturalmente una questione: se qualcosa è trasmesso da una particella a un'altra posta a una certa distanza, quale è lo stato di quel qualcosa dopo che ha lasciato la prima particella, prima che abbia raggiunto la seconda? Se questo qualcosa esiste, come nella teoria di Neumann, l'energia potenziale delle due particelle, sotto quale forma dobbiamo concepire che questa energia esiste in un punto dello spazio che non coincide né con l'una né con l'altra delle particelle? Infatti, tutte le volte che della energia è trasmessa da un corpo a un altro, il tempo che intercorre in questa trasmissione, bisogna che vi sia un mezzo o una sostanza dove l'energia esiste dopo aver lasciato il primo corpo, prima di aver raggiunto il secondo; poiché, come osservò Torricelli¹⁴, l'energia "è una quintessenza di natura così sottile che potrebbe essere contenuta in alcun altro recipiente se non nella sostanza più intima degli oggetti materiali". Quindi, tutte queste teorie portano a pensare un mezzo nel quale si produce la propagazione; e, se ammettiamo l'ipotesi di tale mezzo, credo che questo debba occupare un posto predominante nel seguito delle nostre ricerche, e che dobbiamo cercare di combinare nella nostra mente e rappresentare tutti i dettagli della sua azione: è lo scopo che mi sono costantemente proposto in tutto il corso di questo Trattato.

¹³Prefazione ai *Principia* di Newton; seconda edizione.

¹⁴*Lezioni accademiche*, Firenze, 1715.

Indice

1	Teoria elementare del magnetismo	5
2	Forza e Induzione Magnetica	21
3	Solenoidi e fogli magnetici ¹⁵	29
4	Magnetizzazione indotta	39
5	Problemi particolari relativi all'induzione magnetica	47
6	Teoria del magnetismo indotto di Weber	61
7	Misure magnetiche	71
8	Magnetismo terrestre	93
9	Forza elettromagnetica	101
10	Ricerche di Ampère sull'azione reciproca di due correnti	115
11	Induzione delle correnti elettriche	127
12	Induzione di una corrente su se stessa	139
13	Sulle equazioni del moto di un sistema con vincoli	143
14	Teoria dinamica dell'elettromagnetismo	151
15	Teoria dei circuiti elettrici	159
16	Esplorazione del campo per mezzo del circuito secondario	163
17	Equazioni generali del campo elettromagnetico	177
18	Dimensioni delle unità elettriche	187
19	Energia e Tensione nel campo elettromagnetico	193
20	Current sheet	207
21	Correnti parallele	229
22	Correnti circolari	239
23	Strumenti elettromagnetici	255

¹⁵Si veda la *Teoria matematica del magnetismo*, di Sir W. Thomson, *Phil. Trans.*, 1850. o *Reprint*.

24 Osservazioni elettromagnetiche	273
25 Confronto tra bobine	287
26 Unità elettromagnetiche di resistenza	293
27 Confronto tra le unità elettrostatiche e le unità elettromagnetiche	301
28 Teoria elettromagnetica della luce	313
29 Azione dei magneti sulla luce	325
30 Spiegazione del ferromagnetismo e del diamagnetismo per mezzo delle correnti molecolari	339
31 Teoria delle azioni a distanza	345